



5. cvičení – Řada a integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leviho pro řady). Nechtě $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ jsou měřitelné **nezáporné** funkce. Potom

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Věta 2 (Lebesgueova věta pro řady). Nechtě $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce a nechtě $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$. Pak $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně pro skoro všechna $x \in X$ a

$$\int_X f d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Algoritmus

1. Rozvineme funkci do řady pomocí známých **Taylorových řad**.
2. Najdeme a odůvodníme vhodnou větu pro prohození řady a integrálu:
 - (a) Jsou funkce f_n **nezáporné**? \rightarrow Levi.
 - (b) Konverguje **absolutně** $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|$? \rightarrow Lebesgue.
 - (c) Jinak: zkusíme sestavit posloupnost částečných součtů a použít Lebesgueovu větu pro posloupnosti.
3. **Prohodíme** řadu a integrál a **spočteme**.
4. Pozn.: Někdy je výhodné počítat v pořadí $\sum \int$ místo $\int \sum$.

Hinty

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n &= \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1 \\ \sum_{n=0}^j q^n &= \frac{1-q^{j+1}}{1-q}, \quad |q| < 1 \\ \int_0^{\infty} e^{-x} x^n &= n! \end{aligned}$$

Příklady

1. Rozviňte do řady

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$(b) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx$$

$$(d) \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$(e) \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}$$

$$(f) \int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 2 \ln 2$$

$$(g) \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$(h) \int_0^\infty e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

$$(i) \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq},$$

$p, q > 0$

2. Sečtete $\sum_{n=1}^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx$.



Figure 1: <https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load/>

- (1c) nejprve ze jmenovatele vytknete e^x , zbytek rozvíjejte jako geometrickou řadu
- (1d) konvergence řady z d'Alamberta
- (1e) $\log a_{-1} = -\log a$
- (1f) Uvažujte limitu částecích součtu geometrické řady. Prohazujte jako limitu posloupnosti a integrál -
- Leibsgueova věta pro posloupnosti.