



24. cvičení – Opakování teorie

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Implikace

1. Najděte nebo vyvráťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků.
(od prof. M. Huška: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/>)

Jak na to:

- nakreslíme si diagram a doplňujeme šipky, nejlépe velké a barevně. Další šipky je pak možno doplnit/vyvrátit díky tranzitivitě.
- dokazujeme přímo $A \implies B$;
- nepřímo $B' \implies A'$;
- pro vyvrácení nebo sporem $A \wedge B'$;
- protipříklad, který splňuje $A \wedge B'$.

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ D & \xleftrightarrow{\quad} & C \end{array}$$

(a) Necht' $A \subset \mathbb{R}$

(A) A je nespočetná

(B) A je nekonečná

(C) A je neomezená

(D) $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná

♣ $D \Rightarrow A$

(b) Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost.

(A) $\{a_n\}$ není konstantní

(B) $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost

(C) $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost

(D) množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná

♣ $B \Rightarrow C$

2 Úvod a Posloupnosti

2. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?
 3. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.
 4. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?
 5. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?
(b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
 6. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?
 7. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou nenulovou posloupnost b_n , aby $a_n b_n \rightarrow 0$.
 8. ☞ Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?
 9. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.
 10. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A, x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?
-

3 Funkce

11. Necht' je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J . Musí být klesající na $I \cup J$?
12. Necht' je funkce konvexní na intervalu $[-1, 0]$ a také na $[0, 1]$? Musí být pak konvexní na $[-1, 1]$?
13. Sestrojte (stačí obrázkem) nezápornou funkci f na intervalu $(0, 1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ a aby

$$\inf\{f(x); x \in (0, 1)\} = 0, \quad \sup\{f(x); x \in (0, 1)\} = 1.$$

14. ✨ Necht' f je nekonstantní periodická funkce na \mathbb{R} . Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
15. ❀ Necht' f je funkce spojitá na \mathbb{R} , necht' navíc existují limity v nevlastních bodech a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z \mathbb{R} maxima nebo minima.

16. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$

konstantní ve svém definičním oboru a řešení odůvodněte.

17. ❀ Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a, c) a (c, b) , dále existují a jsou si rovny $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.
18. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.
19. ♡ Necht' je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.
20. Sestrojte (stačí obrázkem) ryze monotónní funkci na intervalu $(0, 1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
21. Necht' $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl.) Určete, které výroky jsou pravdivé

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| (a) f i g jsou liché. | iii. $g(f)$ je sudá |
| i. $f + g$ je lichá | iv. $g + f$ je sudá |
| ii. fg je lichá | (c) f i g jsou rostoucí |
| iii. $f(g)$ je lichá | i. $f + g$ jsou rostoucí |
| (b) f je sudá, g je lichá. | ii. fg jsou rostoucí |
| i. fg je sudá | iii. $f(g)$ jsou rostoucí |
| ii. $f(g)$ je sudá | (d) f je sudá |

- i. je-li f rostoucí na $(0, \infty)$, je rostoucí i na $(-\infty, 0)$. ii. je-li f konvexní na $(0, \infty)$, je konvexní i na $(-\infty, 0)$.

(1a) $D \Rightarrow A$: zkompleťte $A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$.	Bolzano-
(1b) $B \Rightarrow C$: myšlenka jako v Dk.	
Weierstrassovy věty.	
(8) co log n ?	
(14) Heine.	
(15) Definice limity + nabývání extrémů na omezeném	
a uzavřeném intervalu.	
(17) Máme nějakou větu o limesu derivací? Jaké má podmínky? (A co tedy nesmí splňovat naše problématická funkce?)	
(19) $x \sin \frac{x}{x}$	