



22. cvičení – Průběh funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Uvažujte funkci $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadanou předpisem

$$\begin{cases} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Rozhodněte, zda je funkce spojitá na $[0, \infty)$.

Řešení: Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce spojitá dle věty o aritmetice a spojitosti.

Pro $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2x} = 0 \cdot 1,$$

neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-2}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = 0.$$

Závěr: protože limita se rovná funkční hodnotě, funkce je spojitá v 0 zprava, tedy funkce je spojitá na $[0, \infty)$.

(b) Rozhodněte, zda existuje $f'_+(0)$, a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení: Zderivujeme z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{e^{2x}} \stackrel{VOAL}{=} 0 \cdot 1,$$

neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Závěr: $f'_+ = 0$.

(c) Rozhodněte, zda má funkce f asymptotu v ∞ , a pokud ano, určete ji.

Řešení:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log x}{e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + 1}{2e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{4e^{2x}} = 0.$$

dále

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \log x + x}{2e^{2x}} \\ &\stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log x + 2 + 1}{4e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{8e^{2x}} = 0. \end{aligned}$$

Závěr: asymptota existuje a je tvary $y = 0$.

- (d) Rozhodněte, zda existuje $a \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (a, ∞) .

Řešení: Na intervalu $x \in (0, \infty)$ máme

$$f'(x) = -2e^{-2x}x^2 \log x + e^{-2x}(2x \log x + x) = e^{-2x}x(2(1-x)\log(x) + 1).$$

Přímo najít nulový bod bude obtížné, spočteme tedy limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2(1-x)\log x + 1 \stackrel{VOAL}{=} \infty(-\infty) + 1 = -\infty.$$

Protože limita se rovná $-\infty$, musí z definice limity existovat takové $a \in (0, \infty)$, že $f' < 0$ na (a, ∞) .

Tedy podle věty o derivaci a monotonii je f klesající na (a, ∞) . (A tedy monotónní.)

- (e) Rozhodněte, zda existuje $b \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je konkávní na intervalu $(0, b)$.

Řešení: Na $(0, \infty)$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(-2x^2 \log x + 2x \log x + x) + e^{-2x}(-4x \log x - 2xx + 2 \log x + 2 + 1) = e^{-2x}(4x^2 \log x - 8x \log x - 4x + 2 \log x + 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4x^2 \log x - 8x \log x - 4x + 2 \log x + 3) \stackrel{VOAL}{=} 0 - 0 - 0 - \infty + 3 = -\infty.$$

Tedy z definice limity musí existovat $b \in (0, \infty)$ takové, že $f'' < 0$ na $(0, b)$.

Podle věty o druhé derivaci a je tedy f konkávní na $(0, b)$.

2. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Ukažte, že je funkce f dobře definovaná.

Řešení: Musí platit

$$-1 \leq \frac{2\log x}{1+\log^2 x} \leq 1,$$

neboli

$$-1 - \log^2 x \leq 2\log x \leq 1 + \log^2 x.$$

Při substituci $t = \log x$ píšeme

$$-1 - t^2 - 2t \leq 0, \quad 2t - 1 - t^2 \leq 0.$$

Lze přepsat na

$$-(t+1)^2 \leq 0, \quad -(t-1)^2 \leq 0,$$

což ale platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a po odsubstituování pro $x \in (0, \infty)$.

- (b) Rozhodněte, ve kterých bodech $x \in [0, \infty)$ existují jednostranné derivace funkce f a pro tyto body je spočtěte.

Řešení: Mechanicky zderivujeme na $(0, \infty) \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\log^2 x}{(\log^2 x + 1)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\log^2 x + 1) - 2 \log x \cdot \frac{2}{x} \log x}{(\log^2 x + 1)^2} = -2 \frac{\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)}$$

Protože funkce f je na $(0, \infty)$ spojitá (složení a aritmetika spojitých funkcí), najdeme derivace v e a $1/e$ z věty o limitě derivace:

$$\begin{aligned} f'_+(e) &= \lim_{x \rightarrow e^+} f'(x) = -\frac{1}{e} \\ f'_-(e) &= \lim_{x \rightarrow e^-} f'(x) = \frac{1}{e} \\ f'_+(1/e) &= \lim_{x \rightarrow 1/e^+} f'(x) = e \\ f'_-(1/e) &= \lim_{x \rightarrow 1/e^-} f'(x) = -e \end{aligned}$$

V bodě 0 najdeme derivaci zprava z definice:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin\left(\frac{2\log x}{1 + \log^2 x}\right)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{0/0} \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1}{x(\log^2 x + 1)} = -\infty. \end{aligned}$$

- (c) Určete intervaly monotonie funkce f .

Řešení: Ze znaménka první derivace máme:

- f klesá na $(0, 1/e)$ a (e, ∞) ,
- f roste na $(1/e, e)$.

- (d) Určete obraz množiny $[0, e]$ při zobrazení f .

Řešení: Funkce je spojitá v 0 zprava (je potřeba upočítat) a její hodnota je tam $f(0) = 0$. Na intervalu $(0, 1/e)$ klesá, $f(1/e) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Na intervalu $(1/e, e)$ roste, $f(e) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Závěr: $f([0, e]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (e) Určete intervaly konvexity a konkavity funkce f .

Řešení: Mechanicky zderivujeme na $(0, \infty) \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$.

$$f''(x) = \frac{2(\log x + 1)^2}{x^2(\log^2 x + 1)^2} \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)$$

Ze znaménka druhé derivace plyne, že funkce je konkávní na $(1/e, e)$ a konvexní na $(0, 1/e)$ a (e, ∞) .

3. Uvažujte funkci $f(x) = \sqrt{|\sin x|} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(a) Nalezněte body maxima a minima funkce f , pokud existují.

Řešení: Úvodní rozbor:

- Funkce je spojitá na \mathbb{R} (složení a součin spojitých funkcí).
- Funkce je periodická s periodou $T = 4\pi$.
- Funkci rozepíšeme na

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin x} \cos \frac{x}{2}, & x \in (0, \pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = 0 + k\pi, \\ \sqrt{-\sin x} \cos \frac{x}{2}, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi. \end{cases}$$

Nyní mechanicky zderivujeme. Prve uvažujme interval $(0, \pi) + 2k\pi$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cos x \cos \frac{x}{2} + \sqrt{\sin x} \left(-\sin \frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + |\sin x|(-\sin \frac{x}{2})}{\sqrt{\sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin x}}. \end{aligned}$$

Na intervalu $(\pi, 2\pi) + 2k\pi$ postupujeme analogicky a dostaneme

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin x}}, & x \in (0, \pi) + 2k\pi, \\ -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\sqrt{-\sin x}}, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi. \end{cases}$$

Nulové body - řešíme rovnici $\cos \frac{3x}{2} = 0$, neboli

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Výsledek $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$. (Pozor, některé z těchto bodů vyšly ve zlomových bodech $0 + k\pi$.)

Při porovnání znamének první derivace pak vyjde

- f je rostoucí na $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$, $(7\pi/3, 11\pi/3)$,
- f je klesající na $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(2\pi, 7\pi/3)$, $(11\pi/3, 4\pi)$.

Z toho pak vyjdou extrémy v bodech:

- lok. maximum: $\{\pi/3, 2\pi, 11\pi/3\}$.
- lok. minimum: $\{0, 5\pi/3, 7\pi/3\}$.

(b) Určete obor hodnot funkce f .

Řešení: Jelikož funkce je spojitá (tedy nabývá mezihodnot), máme $H_f = [f(5\pi/3), f(\pi/3)] = \left[-\frac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}}\right]$.

(c) Existuje otevřený interval I obsahující bod $\frac{\pi}{2}$, na kterém je funkce f konvexní?

Řešení: Zderivujme funkci na intervalu $(0, \pi)$:

$$f'' = \frac{-3 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(x) - \cos(x) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{4 \sin(x) \sqrt{\sin(x)}}.$$

Máme tedy

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}}.$$

Protože f'' je spojitá na $(0, \pi)$, tak existuje interval (a, b) , $\frac{\pi}{2} \in (a, b)$ takový, že $f'' < 0$ na (a, b) . Tedy f je na (a, b) konkávní.

Závěr: hledaný interval pro konvexitu neexistuje.

4. Uvažujte funkci f zadanou předpisem

$$\begin{cases} (x^2)^{\sin x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Najděte intervaly, kde je funkce f spojitá.

Řešení: Prve funkci přepíšeme na

$$\begin{cases} e^{(\sin x) \ln x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ je funkce spojitá z vět o aritmetice a skládání spojitých funkcí.

V bodě 0 spočteme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x^2} = e^0 = 1,$$

protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x^2 = 1 \cdot 0.$$

(Druhou limitu lze upočítat l'Hospitalem.)

Limita se tedy rovná funkční hodnotě a funkce je spojitá v 0. Závěr: funkce je spojitá na celém \mathbb{R} .

(b) Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.

Řešení: Prve spočteme f' na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

$$f' = x^{2 \sin(x)} \left(\cos x \ln(x^2) + \frac{2 \sin(x)}{x} \right)$$

Protože funkce je spojitá v 0, lze aplikovat větu o limitě a derivaci, tedy

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\sin x \ln x^2} \left(\cos x \ln(x^2) + \frac{2 \sin(x)}{x} \right) \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1(1 \cdot (-\infty) + 2) = -\infty. \end{aligned}$$

Analogicky vyjde i $f'_-(0) = -\infty$.

Závěr: $f'(0) = -\infty$.

(c) Rozhodněte, zda existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\delta, \delta)$.

Řešení: Protože $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty$, musí existovat okolí $P_\eta(0)$, že $f'' < 0$ na $P_\eta(0)$.

Díky větě o monotonii ale máme, že f je klesající na $(-\eta, 0)$ a na $(0, \eta)$. Tedy není možné, aby f byla rostoucí na nějakém intervalu $(-\delta, \delta)$.

(d) Rozhodněte, zda existuje $\xi > 0$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (ξ, ∞) .

Řešení: Uvažujme první derivaci

$$f'(x) = e^{\sin x \ln x^2} \left(\cos x \ln(x^2) + \frac{2 \sin(x)}{x} \right).$$

Pro všechna $x > 0$ platí

$$e^{\sin x \ln x^2} > 0.$$

Uvažujem pomocnou funkci

$$g(x) = \cos x \ln x^2 + \frac{2 \sin x}{x}$$

Pak speciálně v bodech $2k\pi$ je

$$g(2k\pi) = \cos 2k\pi \ln(2k\pi)^2 + \frac{2 \sin 2k\pi}{2k\pi} = \ln(2k\pi)^2 > 0.$$

Naopak

$$g(\pi + 2k\pi) = \cos(\pi + 2k\pi) \ln(\pi + 2k\pi)^2 + \frac{2 \sin(\pi + 2k\pi)}{\pi + 2k\pi} = -\ln(\pi + 2k\pi)^2 < 0.$$

Odtud plyne, že funkce f je rostoucí v bodech $2k\pi$ a klesající v bodech $\pi + 2k\pi$. Jelikož pro každé $\xi > 0$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $2k\pi > \xi$ tak není možné, aby funkce f byla monotónní na nějakém intervalu (ξ, ∞) . Protože pokud by byla rostoucí (resp. neklesající), musela by být rostoucí (neklesající) i v bodech $\pi + 2k\pi$, což je ve sporu se zápornou derivací v těchto bodech.

Analogicky kdyby f byla klesající (nerostoucí), musela by být klesající (nerostoucí) i v bodech $2k\pi$, což je spor s kladnou derivací.

Závěr: Takové ξ neexistuje.

Bonus

Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

5. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, ale není monotónní na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$.

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 0 \cdot x = 0.$$

Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f . ♣

5.5. Teoretické příklady k derivaci funkce

5.5.1. Příklad. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. V každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme derivaci dle Věty 5.1.17 jako

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

V bodě 0 vyjde

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dle Věty 4.2.15. Podíváme-li se na posloupnost

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje tato posloupnost k 0, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\cos(2\pi n)) = -1.$$

Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.16) není pravda, že $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.5.2. Příklad. Pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.42)$$

a tedy f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Funkce f však není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.5.1 dokážeme (5.42).

Položíme-li

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim a_n = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2\sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) \right) = -\infty,$$

a tedy f' není omezená zdola na žádném okolí 0. Podobně, položíme-li

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim b_n = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2\sqrt{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\pi) \right) = \infty,$$

a tedy f' není omezená shora na žádném okolí 0. ♣

5.5.3. Příklad. Necht f je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, pro který platí, že $-x \in \mathcal{D}(f)$, kdykoliv $x \in \mathcal{D}(f)$. Necht $a \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $f'_+(a)$. Pak existuje $f'_-(-a)$ a platí

$$f'_-(-a) = \begin{cases} -f'_+(a), & f \text{ je sudá,} \\ f'_+(a), & f \text{ je lichá.} \end{cases}$$

Řešení. Necht $\delta \in (0, \infty)$ je takové, že $[a, a + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$, a předpokládejme, že f je sudá. Pak platí $(a - \delta, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Položme

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in (a, a + \delta).$$

Pak $g(x) = \frac{f(-x) - f(-a)}{x - a}$, $x \in (a, a + \delta)$, a použitím Věty 4.2.20 dostáváme

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{y \rightarrow a^-} g(-y) = \lim_{y \rightarrow a^-} \frac{f(y) - f(-a)}{-y - a} \\ &= - \lim_{y \rightarrow a^-} \frac{f(y) - f(-a)}{a - (-a)} = f'_-(-a). \end{aligned}$$

Tvrzení pro případ liché funkce se ověří obdobně. ♣

5.5.4. Příklad. Necht

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

5.4.5. Poznámka. Je-li reálná funkce g rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že g je monotónní na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$. Stačí vzít $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde f je funkce z Příkladu 5.5.2, a položit $a = 0$. Potom $g'(x) = 1 + f'(x)$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále $g'(0) = 1$, a tedy g je rostoucí v 0. Funkce f' není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0, a proto v každém okolí bodu 0 funkce g' nabývá kladných i záporných hodnot. Předpokládejme nejprve, že g je neklesající na jistém okolí $B(0, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom pro každé $x, y \in B(0, \delta)$, $x \neq y$, platí

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq 0.$$

Díky větě o srovnání (Věta 4.2.9(b)) dostáváme, že $g'(y) \geq 0$ pro každé $y \in B(0, \delta)$, což je spor. Obdobný spor obdržíme, pokud předpokládáme, že g je nerostoucí na jistém okolí bodu 0.

5.4.6. Věta. Necht $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ roste (respektive neklesá) v každém bodě intervalu I (v případných krajních bodech I uvažujeme příslušné jednostranné varianty). Pak f roste (respektive neklesá) na I .

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu I , a uvažujme libovolné body $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme $M = \{c \in (a, b]; f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená množina, neboť b je horní závorou M . Funkce f je rostoucí zprava v bodě a , a proto existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta_1)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že $f(x) < f(s)$ pro všechna $x \in P_-(s, \delta_2)$. Z definice suprema existuje $t_1 \in M \cap P_-(s, \delta_2)$, pro které tedy platí $f(a) < f(t_1) < f(s)$. Proto dostáváme $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Kdyby totiž platilo $s < b$, našli bychom $\delta_3 \in \mathbb{R}$, $\delta_3 > 0$, takové, že $f(x) > f(s)$ pro všechna $x \in P_+(s, \delta_3)$. Pak tedy libovolné $t_2 \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(t_2)$, což znamená $t_2 \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána, a tedy díky $s \in M$ máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je důkaz nerovnosti $f(a) < f(b)$ proveden.

Předpokládejme nyní, že f je neklesající v každém bodě I . Mějme dány body $a < b$ z intervalu I a zvolme pevné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Funkce $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, $x \in I$, je rostoucí v každém bodě I , tedy dle první části důkazu platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ■

5.4.7. Věta. Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci (v případných krajních bodech I uvažujeme jednostranné derivace). Pak f roste (respektive neklesá, klesá, neroste) na I .

Důkaz. Má-li funkce v každém bodě intervalu I kladnou derivaci, je v každém bodě I rostoucí podle Věty 5.4.3. Z Věty 5.4.6 pak plyne, že f je rostoucí na I .

Ostatní případy jsou obdobné. ■