



## 16. cvičení – limita složené funkce 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Fakt

$\alpha > 0, \beta > 0, c > 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{c^x} = 0.$$

### K odvození

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

### Hinty

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

### Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$

(d)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$

(e)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

(f)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 4)} - \ln x^2}{\operatorname{arccot} x}$

(h)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

(k)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1}$

(m)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ , kde  $a > 0$ .

(n)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

(o)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$

(p)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

## Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1 + x^2}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)} (\log(1 + x^3))^2$$

## Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(TRUE–FALSE) Nechť funkce  $f(x)$  není shora omezená v žádném okolí  $P(0, \delta)$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

(TRUE–FALSE) Nechť  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . Pak existuje okolí  $P(0, \delta)$  takové, že funkce  $f$  je zdola omezená na  $P(0, \delta)$ .

4. Nechť  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce. Ukažte, že

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

(1d) Vytkněte nejrychlejší rostoucí člen z logaritmu	(1m) Užití $a^x = e^{x \ln a}$
(1e) Zbavme se odmocniny	(1n) Převědte na základní limitu
(1f) Vytkněte dominantní člen z logaritmu	(1o) Vytkněte dominantní člen
(1h) Užití vzorce pro logaritmus	(1p) Vytkněte dominantní člen
(1k) Vytkněte nejrychlejší rostoucí člen	