



## 13. cvičení – odmocniny

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Poznámka 1.** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité v bodě  $a \in \mathbb{R}$ , pak také funkce  $f + g$  a  $fg$  jsou spojité v bodě  $a$ . Je-li navíc  $g(a) \neq 0$ , pak také funkce  $\frac{f}{g}$  je spojitá v bodě  $a$ .

**Věta 2** (Policajti pro funkce). 1. Nechť existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Nechť  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

2. Nechť existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : f(x) \leq g(x)$ . Nechť  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

**Věta 3** (O limitě složené funkce). Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$  a nechtě funkce  $f$  a  $g$  splňují

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S)  $f$  je spojitá v  $A$ ;

(P)  $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : g(x) \neq A$ ;

pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$ .

### Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \dots + A^2B^{n-3} - AB^{n-2} + B^{n-1}), \quad n \text{ liché}$$

### Příklady

1. Spočtěte limity

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin(x^2)$

(d)  $\heartsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

(f)  $\clubsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \cos x)$

(h)  $\spadesuit \lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x$

(i)  $\star \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cos x$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x}$

(k)  $\spadesuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x}$

2. Spočítejte limity

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$  (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$  (g)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$  (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$  (h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$  (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

**Bonus**

3. Spočítejte limity

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$  (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$  (f)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$  (g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/3} \left[ (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \right]$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ , kde  $a > 0$

4. Určete konstanty  $a$  a  $b$ , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$

6. Vyšetřete chování kořenů  $x_1$  a  $x_2$  kvadratické rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ , v níž se koeficient  $a$  blíží k nule a koeficienty  $b$  a  $c$  jsou konstantní, přičemž  $b \neq 0$ .

7. Nechť  $a, A \in \mathbb{R}$ . Nechť

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A.$$

Rozhodněte, zda je možné, aby pak

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ,  
 (b) ani jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  neexistovala,  
 (c) existovala právě jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

(2d) $\sqrt{x^2} =  x $ (2e) nestává dosadit? (3a) vytkneme (3d) $(v-x)^2 = v^2 - 2vx + x^2$ (5) rozšíříme	(1d) vytkneme nejvyšší člen (1f) vytkneme nejvyšší člen (1h) $x + \sin x \geq 1$ (1i) jak asi vypadá graf? (1k) je funkce vůbec definovaná na okolí $\infty$ ?
--	--