



12. cvičení – limity funkcí

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Z grafu

1. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
- (g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$
- (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
- (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
- (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \nexists$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$
- (q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$
- (r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cot} x = \infty$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cot} x = -\infty$

Z definice

2. Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

Řešení: Je $f(x) = x + 2$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pomocí tohoto ε stačí určit $\delta > 0$ takové, aby všechna x z prstencového okolí $(2 - \delta, 2 + \delta) \setminus \{2\}$ bodu 2 splňovala nerovnost

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x + 2) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon. \quad (*)$$

Tuto nerovnici umíme vyřešit. Jejím řešením jsou všechna x z intervalu $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$. Z toho je vidět, že stačí položit $\delta = \varepsilon$, neboť potom

$$x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \implies x \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \implies x \text{ splňuje nerovnici } (*)$$

\implies tvrzení o limitě je dokázáno.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

Řešení: Voleme $\varepsilon > 0$. Chceme najít K takové, aby pro všechna $x \geq K$ bylo

$$\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Nerovnici upravíme na vhodnější tvar pro její řešení.

$$\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x - (x+1)}{x+1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{x+1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x+1} \right| < \varepsilon.$$

Protože pro x hledáme okolí $+\infty$, můžeme se omezit na kladná x a tím zrušit absolutní hodnotu. Pak je vidět, že při tomto omezení jsou řešením rovnice všechna x kladná taková, že $x+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ a tedy $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Stačí tedy volit libovolné $K > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (popřípadě $K > 0$, pokud $\frac{1}{\varepsilon} < 1$).

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$

Řešení: Volme K reálné a omezme se na $K > 0$. Chceme najít δ tak, aby pro všechna $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \setminus \{2\}$ platilo, že

$$\frac{1}{|x-2|} \geq K \Leftrightarrow |x-2| \leq \frac{1}{K}.$$

Odtud vyplývá, že stačí volit libovolné kladné $\delta < \frac{1}{K}$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$

Řešení: V bodě nula funkce $\frac{1}{x}$ nemůže mít limitu, protože $\frac{1}{x} < \frac{-1}{\delta}$ na $(-\delta, 0)$ a $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$ na $(0, \delta)$. Pro každé reálné číslo L tedy najdeme δ tak, že L neleží v $f(-\delta, +\delta)$. Je-li pak L kladné nekonečno, potom $U = (1, +\infty)$ je okolím L , ale $f(-\delta, +\delta)$ není podmnožinou U dokonce pro žádné $\delta > 0$ (obsahuje totiž také záporná čísla). Obdobně vyloučíme záporné nekonečno.

Vyšetříme tedy jednostranné limity. Protože hodnoty $\frac{1}{x}$ se zvětšují, jdeme-li k nule zprava, máme podezření, že limita zprava bude $+\infty$. Chceme tedy dokázat, že pro libovolné $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) \geq K$, pokud $x \in (0, \delta)$. Buď tedy $K > 0$ libovolné reálné číslo. Řešením nerovnice (uvědomte si, že $x, K > 0$)

$$f(x) \geq K \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq K \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{K},$$

dostáváme, že stačí volit $\delta < \frac{1}{K}$. Tím je důkaz hotov, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Důkaz, že $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, by probíhal obdobně. Neexistence limity v nule pak též plyne z nerovnosti jednostranných limit.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \nexists$

Řešení: Volme libovolné pravé prstencové okolí nuly $(0, \delta)$. Uvažme body $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Je-li n dost velké ($\frac{1}{n\pi} < \delta$), pak $x_n \in (0, \delta)$ a $\sin x_n = 0$. Uvažme ještě body $y_m = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}$. Opět pro m dost velké ($\frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}} < \delta$) je $y_m \in (0, \delta)$ a $\sin y_m = 1$. Je tedy vidět, že v libovolném okolí $(0, \delta)$ najdeme body, v nichž funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá hodnot nula a jedna, limita zprava tedy nemůže existovat. Důkaz neexistence limity zleva probíhá analogicky, jen u před x_n a y_m napíšeme minus.

Přímo

3. (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+2}{-x+1} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{-3 + 1} = \frac{-11}{2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3)^2 = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{-8-x} = \frac{-3}{-\infty} = 0$
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$
- (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \infty + \infty$

1/0

4. Spočítejte limity, příp. jednostranné limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{x-5}$

Řešení: Dle Věty 4, aplikovanou na jednostranné limity. Zprava:

$f(x) = 6$, $\lim_{x \rightarrow 5+} f(x) = 6$, $6 > 0$. $g(x) = x - 5$, $\lim_{x \rightarrow 5+} g(x) = 0$, $x - 5 > 0$ na $(5, 5 + 1)$. Tedy $\lim_{x \rightarrow 5+} \frac{f}{g} = \infty$.

Zleva: $f(x) = 6$, $\lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = 6$, $6 > 0$. $g(x) = x - 5$, $\lim_{x \rightarrow 5-} g(x) = 0$, $x - 5 < 0$ na $(5 - 1, 5)$. Tedy $\lim_{x \rightarrow 5-} \frac{f}{g} = -\infty$.

Závěr: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{x-5}$ neexistuje.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2}$

Řešení: Máme $f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 > 0$. Navíc $g(x) = (x - 2)^2$, $g(x) > 0$ na $P(2, 3)$. Z věty $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2} = \infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2-16}$

Řešení: (Příklad převzat tu: http://www2.gcc.edu/dept/math/faculty/BancroftED/teaching/handouts/limit_examples_from_class.pdf)

Máme $f(x) = x^2$, $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 16 > 0$. Navíc $g(x) = x^2 - 16$, $g(x) > 0$ na $(4, 5)$.

Z věty je $\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{x^2}{x^2-16} = \infty$.

Zleva pak $g(x) = x^2 - 16$, $g(x) < 0$ na $(3, 4)$. Z věty je $\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{x^2}{x^2-16} = -\infty$.

Závěr: limita neexistuje.

(d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$ **Řešení:** (Příklad převzat tu: http://www2.gcc.edu/dept/math/faculty/BancroftED/teaching/handouts/limit_examples_from_class.pdf)

Limitu lze rozložit

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2}.$$

Nyní lze psát $f(x) = (x-3)(x+1)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 12 > 0$. Navíc $g(x) = (x+3)^2$, $g(x) > 0$ na $P(-3, 42)$. Z věty $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2} = \infty$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$

Řešení: Máme $f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 > 0$. Navíc $g(x) = \sin x$, $g(x) > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$. Z věty je $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sin x} = \infty$.

Zleva pak $f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 > 0$. Navíc $g(x) = \sin x$, $g(x) < 0$ na $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Z věty je $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.

Závěr: limita neexistuje.

0/0

5. Vytkněte výraz s kořenem,

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x + 1}$

Řešení: Rozložíme na

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)}{(x-1)}.$$

Podle předchozího cvičení dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+4)}{(x-1)} = +\infty$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+4)}{(x-1)} = -\infty$$

Limita tedy neexistuje.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 + x^2 - 2x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 + x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 2} \stackrel{VOAL}{=} \frac{0 - 0 + 1}{0 + 0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-1)^2}$

Řešení: Rozložíme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)}{(x-1)}.$$

Dle předchozího cvičení vyjde

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \infty$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+5)}{(x-1)} = -\infty$$

Závěr: limita neexistuje.

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

Řešení: Platí, že $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$ a $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x + \frac{1}{2})$. Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x + \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Řešení: Snadno se ověří, že jednička je kořen, dokonce dvojnásobný. Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$$

Rozložte polynomy na součin a pak teprve umocněte.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{[(x-2)^2]^{10}(x+4)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}}.$$

Bonus

6. Spočítejte limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \text{ kde } m, n \in \mathbb{N}$$

Řešení: Rozložíme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} = \frac{m}{n}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}$$

Řešení: Číslo n tu hraje roli pevně daného čísla, parametru. Postupnými rozklady dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + \dots + (x^n-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + (x+1) + (x^2+x+1) + (x^3+x^2+x+1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n}{1} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

7. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

(a) Nemá limitu v nekonečnu.

Řešení: $f(x) = \cos x$

(b) Nemá limitu v čísle 3.

Řešení: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

(c) Má v nekonečnu limitu nekonečno.

Řešení: $f(x) = x$

(d) Má v nekonečnu limitu -2.

Řešení: $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$

(e) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.

Řešení: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(f) Není spojitá v 0.

Řešení: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(g) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.

Řešení: $f(x) = \tan x$

(h) Má vlastní limitu v nekonečnu a je rostoucí.

Řešení: $f(x) = \arctan x$

8. Proč ten vtip není dobře?

Know your limits

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x - 8} = \infty.$$

Therefore

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5} = \infty.$$

Figure 1: <https://kityates.com/public-engagement/>

Řešení: Protože $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8}$ neexistuje - zprava je ∞ a zleva $-\infty$.

9. Necht' $a \in \mathbb{R}^*$. Rozhodněte zda platí:

a) Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Řešení: Ano - aritmetika limit.

b) Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Potom je buď $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Řešení: Ne - např. pro funkci $f(x) = x$ v 0 dostaneme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$.

c) Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí a . Potom je $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

Řešení: Tvrzení platí. Jde-li $f(x) \rightarrow 0$ v bodě a , pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje prstencové okolí bodu a tak, že $|f(x)| < \varepsilon$. Je-li nyní $K > 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K < \frac{1}{\varepsilon}$ a podle předchozího najdeme prstencové okolí a tak, že $\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} > K$ pro x z tohoto prstencového okolí.

d1) Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Potom vždy existují obě jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{f(x)}$ a $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{1}{f(x)}$, nemusí se však rovnat.

Řešení: Tvrzení neplatí. Stačí vzít $f \equiv 0$ - pak $1/f$ není definována, nelze jí tedy počítat limitu.

d2*) Co když navíc požadujeme, aby $f(x) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a ?

Řešení:

Tvrzení neplatí. Uvažte příklad funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, která v nule konverguje do nuly (je to nulová krát omezená) a tuto funkci předdefinujme $f(\frac{1}{n\pi}) = \frac{(-1)^n}{n\pi}$, kde n jsou celá čísla (tedy v nulových bodech sinu). Potom z odhadu $|f(x)| \leq |x|$ opět plyne konvergence do nuly a funkce je dokonce různá od nuly na \mathbb{R} . Přitom $\frac{1}{f}$ nabývá libovolně velkých i libovolně malých hodnot na jakémkoli jednostranném okolí nuly.