



8. cvičení – éčko

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě vybrané posloupnosti). Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Fakta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Nechť x_n je posloupnost, $x_n \rightarrow \infty$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \sin n}\right)^n$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathbb{R}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1}$

Bonus

2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n$?

3. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ neexistuje?

4. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

5. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?

(1e) Vede na 2 policařty
(1g) Vede na 2 policařty, $-1 \leq \sin n \leq 1$
(1i) Vede na 2 policařty