



## 25. cvičení – ODR vyššího řádu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Poznámka 1** (Bernoulliho rovnice). Rovnici  $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$  lze převést na lineární rovnici pomocí substituce  $z = y^{1-\alpha}$ .

**Definice 2.** *Lineární diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x), \quad (1)$$

kde  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  a  $f$  je funkce spojitá na daném intervalu  $(a, b)$ .

*Homogenní rovnicí* příslušnou k rovnici (1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0. \quad (2)$$

**Poznámka 3.** Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém  $\mathbb{R}$ .

**Definice 4.** *Charakteristickým polynomem* rovnice (2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

**Věta 5** (tvar fundamentálního systému). Nechť  $\chi$  je charakteristický polynom rovnice (2). Nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu  $\chi$  s násobnostmi  $r_1, \dots, r_s$ . Nechť  $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$  jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu  $\chi$  s kladnou imaginární částí a násobnostmi  $q_1, \dots, q_l$ , kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$ . Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s x}, & x e^{\lambda_s x}, & \dots & x^{r_s-1} e^{\lambda_s x}, \\ e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & \dots & x^{q_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, \\ e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & \dots & x^{q_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x \end{array}$$

**Věta 6** (speciální pravá strana). Nechť

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot (P(x) \cos \nu x + Q(x) \sin \nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  a  $P, Q$  jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x} \cdot (R(x) \cos \nu x + S(x) \sin \nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $R, S$  jsou polynomy stupně ne většího než  $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$  a  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  udává, jakou násobnost má číslo  $\mu + i\nu$  jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

### Algoritmus pro vyšší řád

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici:
  - (a) Napíšeme **charakteristický** polynom a najdeme kořeny.
  - (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve **vhodném tvaru**, případně jestli není třeba **součtem** vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a **odhadneme tvar řešení** (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

### Bernoulliho rovnice

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a)  $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

(c)  $y' + 2xy = 2xy^3$

(b)  $xy^2 y' = x^2 + y^3$

### ODR vyššího řádu

2. Přiřaďte funkce ke tvaru  $e^{ax}(P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$ :

(1)  $12x^2 + 2x + 1$

(A)  $e^{0x}(0 \cos 1x + 1 \sin 1x)$

(2)  $\sin x$

(B)  $e^{0x}((12x^2 + 2x + 1) \cos 0x + 0 \sin 0x)$

(3)  $8xe^x$

(C)  $e^{2x}((-2) \cos 1x + 0 \sin 1x)$

(4)  $-2e^{2x} \cos x$

(D)  $e^{1x}((8x) \cos 0x + 0 \sin 0x)$

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

(a)  $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$

(b)  $y'' - 3y' = 3x - 1$

(c)  $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$

(d)  $y'' + y = x + \sin x$

(e)  $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x} \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0$

4. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a)  $y''' + y'' + y' + y = 8xe^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

(b)  $y^{iv} + 8y'' + 16y = 64x \sin 2x$

(c)  $y''' - 2y' + 4y = xe^{-2x}$

(d)  $y''' - 4y'' + 4y' = 2x + e^{2x} - \cos 2x$

5. V jakém tvaru budete hledat řešení?

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| (1) $y''' + y'' + y = e^x$             | (A) $e^x$                             |
| (2) $y''' + y'' - 2y = (x + 1)e^x$     | (B) $Ae^x$                            |
| (3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$   | (C) $(Ax + B)e^x$                     |
| (4) $y''' + y'' = x^3 + x^2$           | (D) $x(Ax + B)e^x$                    |
| (5) $y'' + y' + y = e^x \cos x$        | (E) $x^2(Ax + B)e^x$                  |
| (6) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$   | (F) $Ae^{-x}$                         |
| (7) $y''' - 2y'' + 5y' = 2e^x \sin 2x$ | (G) $Ax^3e^{-x}$                      |
|  | (H) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$    |
|  | (I) $Ax^3 + Bx^2$                     |
|  | (J) $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$            |
|  | (K) $x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$       |
|  | (L) $(x^2 + x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ |
|  | (M) $e^x(A \cos x)$                   |
|  | (N) $e^x(A \cos x + B \sin x)$        |
|  | (O) $x(A \cos x + B \sin x)$          |
|  | (P) $A \cos x + B \sin x$             |
|  | (Q) $xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$     |
|  | (R) $e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$      |

### Zkouškové příklady

6. Najděte řešení diferenciálních rovnic

- |  |   |
|--|---|
| (a) $y^{(4)} - y = x^2$                  | (d) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x \sin x$        |
| (b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$ | (e) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x \cos x$ |
| (c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$       |   |

### Bonus

7. Najděte řešení ODR

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| (a) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(0) = 1$  | (c) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$           |
| (b) $y'' = -y, y(0) = 2, y'(0) = -3$ | (d) $y'' = -y, y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ |

8. V závislosti na parametru  $r \in \mathbb{R}$  najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + ry = 0.$$

9. V závislosti na konstantách  $p, q > 0$  najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + 2py' + q^2y = 0.$$

10. Proč se malé dítě na pružinové houpačce (zvířátko na pružině) houpe rychleji než dospělý? Pohyb je popsán rovnicí  $my'' + ky = 0$ , kde  $m$  je hmotnost houpajícího se člověka a  $k$  charakterizuje pružinu.



Figure 1: <https://www.ihriska-picolino.sk/pruzinova-hojdacka-zirafa-15106>