



9. cvičení – Per partes + substituce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

1. Substituce

(a) $\int \sin^5 x \cos x \, dx$.

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx \rightarrow \int y^5 \, dy \stackrel{C}{=} \frac{y^6}{6} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \frac{\sin^6 x}{6}$$

Funkce $\sin^5 x \cos x$ je definována na \mathbb{R} , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$.

Funkce $f = y^5$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Závěr: $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int -2xe^{-x^2} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x \, dx$ a platí

$$\int -2xe^{-x^2} \, dx \rightarrow \int e^y \, dy \stackrel{C}{=} e^y \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} e^{-x^2}$$

(c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 + x^2$. Potom $dy = 2x \, dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{y} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

(d) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{y} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{\arcsin x}$$

2. Per partes

(a) $\int x \cos x \, dx$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x \cos x \, dx = [x \sin x] - \int \sin x \, dx \stackrel{C}{=} x \sin x + \cos x$$

(b) $\int x e^{-x} dx$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x e^{-x} dx = [-x e^{-x}] - \int -e^{-x} dx \stackrel{C}{=} -x e^{-x} - e^{-x}$$

(c) $e^x \sin x dx$

Řešení:

Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$2 \int e^x \sin x dx \stackrel{C}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x$$

tedy

$$\int e^x \sin x dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

3. Směs

(a) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \frac{1}{x}$. Potom $dy = -\frac{1}{x^2} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \rightarrow - \int \sin y dy \stackrel{C}{=} \cos y \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \cos \frac{1}{x}$$

(b) $\int \ln x dx$

Řešení:

Položme $u' = 1$, $v = \ln x$. Potom $u = \int 1 dx = x$ a $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{C}{=} x \ln x - x$$

(c) $\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = e^x$. Potom $dy = e^x dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx \rightarrow \int \frac{dy}{2 + y} \stackrel{C}{=} \ln |2 + y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \ln(2 + e^x)$$

(d) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x \ln x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx \rightarrow \int \frac{1}{y} dy \stackrel{C}{=} \ln |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \ln(|\ln(\ln x)|)$$

$$(e) \int \arcsin x \, dx$$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, $dy = -2x \, dx$.

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy \stackrel{C}{=} \sqrt{y}$$

Tedy

$$\int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$(f) \int \frac{x}{3-2x^2} \, dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = 3 - 2x^2$. Potom $dy = -4x \, dx$ a platí

$$\int \frac{x}{3-2x^2} \, dx \rightarrow -\frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \ln |y| \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \ln |3-2x^2|$$

$$(g) \int x^2 \sin 2x \, dx$$

Řešení:

První per partes: $u' = \sin 2x$, $u = -\frac{1}{2} \cos 2x$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \right] + \int x \cos 2x =$$

Druhé per partes: $u' = \cos 2x$, $u = \frac{1}{2} \sin 2x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right] - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$(h) \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x) \, dx = \int 1 \, dx \stackrel{C}{=} x$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $b = 0$, pokud $a \neq 0$, a také pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

$$(i) \int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} dx$$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \cotg x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} y^{3/4} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cotg^3 x}$$

$$(j) \int \cos(\ln x) dx$$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

$$(k) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x^2$, pak $dy = -2x dx$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &\rightarrow x \int \frac{1}{-2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\frac{1}{2} 2\sqrt{y} + c \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$(l) \int \sin x \ln(\tg x) dx$$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\tg x)$, $v' = \frac{1}{\tg x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\tg x) dx = -\cos x \ln(\tg x) + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\cos x \ln(\tg x) + \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Na poslední integrál použijeme substituci $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$:

$$- \int \frac{1}{1-y^2} dy = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

tedy celkem

$$\stackrel{C}{=} -\cos x \ln(\tg x) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| = -\cos x \ln(\tg x) + \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right|$$

$$(m) \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \rightarrow \int y dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\arctan^2 x}{2}$$

$$(n) \int x^2 \arccos x dx$$

Řešení: Per partes: $u' = x^2$, $u = \frac{x^3}{3}$, $v = \arccos x$, $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int x^2 \arccos x dx = \left[\frac{x^3}{3} \arccos x \right] + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, odkud plyne $dy = -2x dx$ a $x^2 = 1 - y$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &\rightarrow \frac{1}{6} \int \frac{y-1}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{6} \int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^{1/2} \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$$(o) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \stackrel{C}{=} 2y^{-1/2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

$$(p) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx$$

Řešení: První per partes: $u' = \sqrt{x}$, $u = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $v = \ln^2 x$, $v' = 2 \ln x \frac{1}{x}$.

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x \right] - \int \frac{4}{3} x^{1/2} \ln x dx =$$

Druhé per partes: $u' = \frac{4}{3} x^{1/2}$, $u = \frac{8}{9} x^{3/2}$, $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x \right] - \left[\frac{8}{9} x^{3/2} \ln x \right] + \int \frac{8}{9} x^{1/2} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{3/2} \ln x + \frac{16}{27} x^{3/2}$$

$$(q) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln x$. Pak $dy = \frac{1}{x} dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx \rightarrow \int y^2 dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\ln^3 x}{3}$$

$$(r) \int x^3 e^{-x^2} dx$$

Řešení:

Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int y e^{-y} dy$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= \frac{1}{2} [-y e^{-y}] + \frac{1}{2} \int e^{-y} dy \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} - y e^{-y} - \frac{1}{2} e^{-y} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$(s) \int \operatorname{tg} x dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \operatorname{tg} x dx \rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\ln |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\ln |\cos x|$$

$$(t) \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

Řešení: Pracujeme na intervalu $x \in (0, \infty)$. Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx \rightarrow 2 \int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy \stackrel{C}{=} 2 \arctan y \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \arctan \sqrt{x}$$

$$(u) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Řešení: Vztah upravíme a použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} \stackrel{C}{=} \arctan y \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \arctan e^x$$

$$(v) \int \frac{1}{\sin x} dx$$

Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$(w) \int \cos^3 x dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x dx$ a platí

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \rightarrow \int (1 - y^2) dy \stackrel{C}{=} y - \frac{y^3}{3} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$(x) \int \frac{x}{4+x^4} dx$$

Řešení: Použijeme substituci $y = x^2$. Potom $dy = 2x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{8} \int \frac{dy}{1+(y/2)^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2}$$

$$(y) \int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$$

Řešení: Nejprve použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \rightarrow \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{1+y^2}}$$

pak výraz rozšíříme, abychom mohli použít substituci $t = 1 + y^2$, $dt = 2y dy$:

$$= \int \frac{dy}{y \sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y}{2y^2 \sqrt{1+y^2}} dy \rightarrow \int \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}} dt.$$

Nyní substituujeme $s = \sqrt{t}$, pak $ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Nakonec použijeme tabulkový integrál:

$$\int \frac{1}{s^2-1} dt \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|.$$

Nakonec vrátíme substituce:

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right| \rightarrow -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$$(z) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

Řešení: Per partes: $u' = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{x}$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \arcsin x \right] + \int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce $y = \sqrt{1-x^2}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ a $x^2 = 1-y^2$.

$$\int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \int \frac{1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$