(1) (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$s_0 = 1$

$s_1 = 0$

$s_2 = 1$

$s_3 = 0$

$c_0 = \frac{s_0}{1+0} = 1$

$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4$

$c_1 = \frac{s_0 + s_1}{1+1} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$c_2 = \frac{s_0 + s_1 + s_2}{3} = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$

$c_3 = \frac{s_0 + \cdots + s_3}{4} = \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{2}{4}$

lze zapsat jako n sudé $\left(\frac{n}{2}+1\right) / n+1$

n liché $\left(\frac{n+1}{2}\right) / n+1$

$\Rightarrow$ 2 podposloupnosti tvoří naši posl.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Bigg\} \boxed{\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}}$$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$

$= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$

$S_0 = 1$

$S_1 = -1$

$S_2 = 2$

$S_3 = -2$

$k = 2n \qquad n+1 = \frac{k}{2}+1$

$a_{2n} = n+1$

Cesàr:

$S_0 = 1$

$S_0 + S_1 = 0$

$S_0 + S_1 + S_2 = 2$

$S_0 + \quad + S_3 = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \dots \end{array}$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{2}+1 & n \text{ sudé} \\ 0 & n \text{ liché} \end{cases}$$

2 podposl.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = 1/2 \end{array}\right\} \lim \nexists$$

(1e) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

$1 + 2 + 3 + 4$

$S_0 = 1$

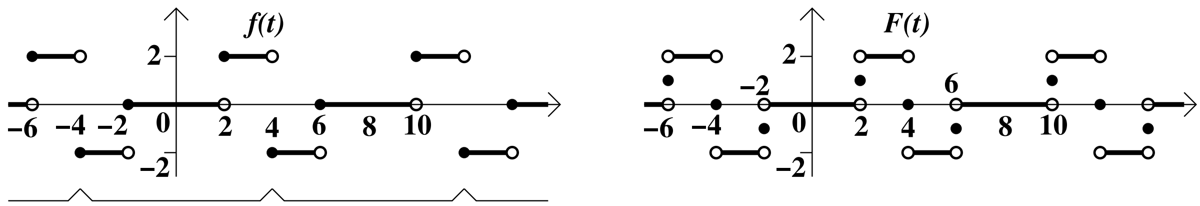
$S_1 = 3$

$S_2 = 6$

$S_3 = 10$

$S_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1+3+6+10+\cdots+\frac{n+1}{2}(n+2)}{n+1} \geq \lim \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)} = \boxed{\infty}$



kosinová Fourierova:

Nakonec najdeme kosinovou řadu. Máme tedy $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Koeficienty u sinů $b_k = 0$. Pro koeficienty u kosinů máme:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\,dt = 2\,,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\cos\!\left(k\frac{\pi}{4}t\right)dt = \left[\frac{4}{k\pi}\sin\!\left(k\frac{\pi}{4}t\right)\right]_2^4 = \frac{4}{k\pi}\left[\sin(k\pi) - \sin\!\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Jelikož $\sin(k\pi) = 0$ dostáváme:

$$a_k = -\frac{4}{k\pi}\sin\!\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 4n\,,\ k = 4n+2\,, \\ -\frac{4}{k\pi}, & k = 4n+1\,, \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n+3\,. \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

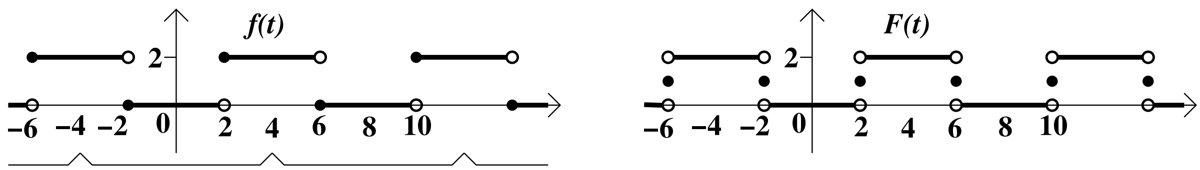
Proto

$$f \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{k\pi}\sin\!\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cos\!\left(k\frac{\pi}{4}t\right).$$

Všiměte si, že koeficienty a_k se rovnají 0 pro sudá k a $\frac{4}{k\pi}$ nebo $-\frac{4}{k\pi}$ pro lichá. Pokud tedy nahradíme sčítací index ve výsledné řadě výrazem $2k+1$, lze výsledek napsat takto:

$$f \sim 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{(2k+1)\pi}\cos\!\left((2k+1)\frac{\pi}{4}t\right).$$

Nakonec určíme součet kosinové řady. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4)$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.



2a **Příklad 4** *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = 1 - t\,,\ t \in \langle 0, 2)\,.$$

Fourierova řada:

Pro funkci f máme $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Spočítáme koeficienty a_k a b_k.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\,dt = 0\,.$$

Následující integrály budeme počítat pomocí metody per partes.

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\cos(k\pi t)\,dt = \left| \begin{array}{cc} u = 1-t & v' = \cos(k\pi t) \\ u' = -1 & v = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t) \end{array} \right| = \left[(1-t)\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^2 + \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \sin(k\pi t)\,dt\,.$$

Protože $\sin(2k\pi) = \sin(0) = 0$ první část posledního výrazu je nulová. Dostáváme tedy

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_0^2 = \frac{1}{k^2\pi^2}(\cos(2k\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{k^2\pi^2}(1-1) = 0\,.$$

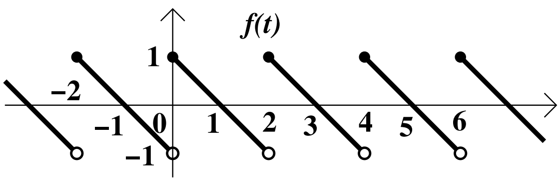
Pro koeficienty b_k dostaneme:

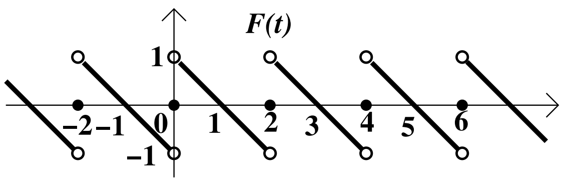
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\sin(k\pi t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = 1-t & v' = \sin(k\pi t) \\ u' = -1 & v = -\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t) \end{array} \right| = \\
&= \left[-(1-t)\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_0^2 - \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \cos(k\pi t)\,dt = \\
&= \left[-(1-2)\frac{1}{k\pi}\cos(2k\pi) + (1-0)\frac{1}{k\pi}\cos(0)\right] - \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^2 = \\
&= \frac{2}{k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}(\sin(2k\pi) - \sin(0)) = \frac{2}{k\pi}\,.
\end{aligned}$$

Výsledná řada tedy je

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi t)\,.$$

Nakonec opět určíme součet výsledné řady. Nejprve nakreslíme periodické prodloužení f (vlevo), pak podle Jordanova kritéria součet řady (vpravo):





sinová Fourierova řada:

Protože normální periodické prodloužení f je liché, měla už normální Fourierovka vyjít jako sinová, což také vyšla.

kosinová Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Protože počítáme kosinovou řadu koeficienty b_k jsou nulové. Pro koeficienty a_k dostaneme

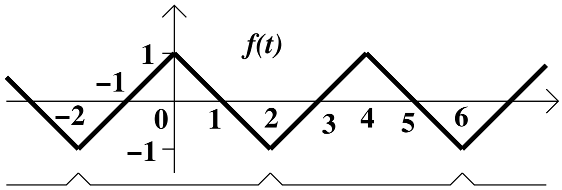
$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\,dt = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = 1-t & v' = \cos(k\frac{\pi}{2}t) \\ u' = -1 & v = \frac{2}{k\pi}\sin(k\frac{\pi}{2}t) \end{array} \right| = \\
&= \left[(1-t)\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\right]_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \\
&= \left[(1-2)\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\pi\big) - (1-0)\frac{2}{k\pi}\sin(0)\right] - \frac{2}{k\pi}\left[\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\right]_0^2 = \\
&= [0-0] - \frac{4}{k^2\pi^2}\big[\cos(k\pi) - 1\big] = \frac{4}{k^2\pi^2}\big[1 - (-1)^k\big] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ \frac{8}{k^2\pi^2}, & k \text{ liché.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Můžeme tedy napsat výslednou řadu. Protože jsou opět sudé členy nulové, zaměníme také sčítací index k za $k+1$.

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}[1-(-1)^k]\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\big((2k+1)\frac{\pi}{2}t\big)\,.$$

Nakonec opět určíme součet. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -2, 2)$. Protože toto prodloužení je spojité, je to i součet řady.



Příklad 5 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = t + \pi\,,\ \ t \in \langle -\pi, \pi)\,.$$

Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Funkce není zadána na intervalu typu $\langle 0, T)$, ale to pro Fourierovou řadu nevadí, stejně ji rozšiřujeme periodicky a tudíž můžeme vzít libovolný interval zahrnující jednu periodu, například $\langle 0, 2\pi)$. Pak by se ale blbě integrovalo, protože v bodě π by byla nespojitost a všechny integrály by se nám rozdělily na dva. Proto budeme raději integrovat přes původně zadaný interval.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\,dt = 2\pi\,.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos(kt)\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = t+\pi & v' = \cos(kt) \\ u' = 1 & v = \frac{1}{k}\sin(kt)\end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(t+\pi)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\,dt = 0 + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

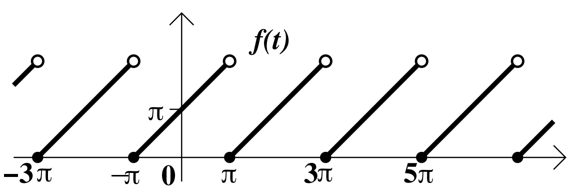
Poslední rovnost plyne z faktu, že kosinus je sudá funkce a tudíž $\cos(k\pi) = \cos(-k\pi)$.

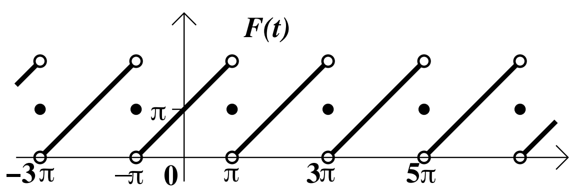
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\sin(kt)\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = t+\pi & v' = \sin(kt) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k}\cos(kt)\end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-(t+\pi)\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\,dt = \\
&= -\frac{2}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Proto

$$f \sim \pi + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kt)\,.$$

Určeme ještě součet výsledné řady. Nejprve nakreslíme periodické prodloužení f (vlevo), pak podle Jordanova kritéria součet řady (vpravo):





Poznámka: Periodické prodloužení dané funkce je ve tvaru $\pi +$„lichá“, tedy i řada je $\pi +$„sinová“.

sinová a kosinová Fourierova řada:

Funkce byla zadána na intervalu, který „překračuje" počátek, tedy zahrnuje kladná i záporná čísla. Nemáme proto možnost si funkci upravit tak, aby byla buď sudá nebo lichá. Můžeme jen doufat, že nějakou symetrii už měla ze zadání. Vidíme ale, že není ani lichá ani sudá, proto nelze udělat ani sinovou, ani kosinovou řadu.

2b

Příklad 6 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 1) \,, \\ 2 - t, & t \in \langle 1, 2) \,. \end{cases}$$

Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Spočteme koeficienty a_k a b_k.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 (2-t)dt = \frac{3}{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(k\pi t)\,dt = \int_0^1 \cos(k\pi t)\,dt + \int_1^2 (2-t)\cos(k\pi t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = 2-t & v' = \cos(k\pi t) \\ u' = -1 & v = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t) \end{array} \right| = \\
&= \left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^1 + \left[(2-t)\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_1^2 + \frac{1}{k\pi}\int_1^2 \sin(k\pi t)\,dt = 0 + 0 + \frac{1}{k\pi}\left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_1^2 = \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}[-1 + \cos(k\pi)] = \frac{1}{k^2\pi^2}[-1 + (-1)^k] = \frac{1}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ -\frac{2}{k^2\pi^2}, & k \text{ liché.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme opět využili toho, že $\sin(0) = \sin(k\pi) = \sin(2k\pi) = 0$, $\cos(2k\pi) = 1$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(k\pi t)\,dt = \int_0^1 \sin(k\pi t)\,dt + \int_1^2 (2-t)\sin(k\pi t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = 2-t & v' = \sin(k\pi t) \\ u' = -1 & v = -\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t) \end{array} \right| = \\
&= \left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_0^1 + \left[-(2-t)\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_1^2 - \frac{1}{k\pi}\int_1^2 \cos(k\pi t)\,dt = \\
&= -\frac{1}{k\pi}[\cos(k\pi) - 1] + \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_1^2 = \frac{1}{k\pi} - 0 = \frac{1}{k\pi}\,.
\end{aligned}$$

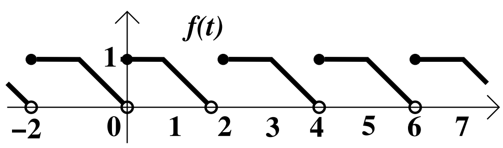
Pro výslednou řadu tedy dostáváme:

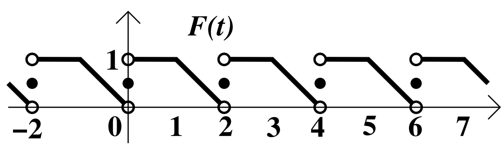
$$f \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1]\cos(k\pi t) + \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right).$$

Protože první člen v závorce je pro všechna sudá k nulový, můžeme řadu rozdělit na dvě a v první nahradit sčítací index výrazem $2k + 1$.

$$f \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)\pi t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\,.$$

Nakonec opět určíme součet výsledné řady. Nejprve nakreslíme periodické prodloužení f (vlevo), pak uděláme součet podle Jordanova kritéria (vpravo).





sinová Fourierova řada:

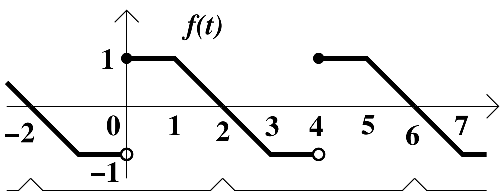
V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Protože počítáme sinovou řadu bude $a_k = 0$. Pro koeficienty b_k dostáváme:

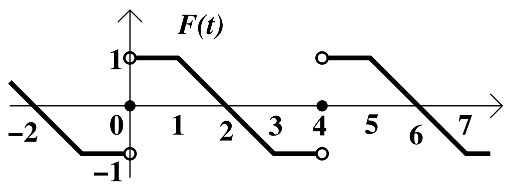
$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \int_0^1 \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt + \int_1^2 (2-t)\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 2-t & v' = \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \\ u' = -1 & v = -\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \end{array} \right| = \\
&= \Bigl[-\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_0^1 + \Bigl[-(2-t)\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 - \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= -\frac{2}{k\pi}\Bigl[\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - 1\Bigr] + \frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - \frac{2}{k\pi}\Bigl[\frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 = \frac{2}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\,.
\end{aligned}
$$

Výsledná řada tedy je

$$
f \sim \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl[\frac{2}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr]\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,.
$$

Nakonec opět určíme součet. Nejprve nakreslíme **liché** periodické prodloužení f (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.





kosinová Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Protože hledáme kosinovou řadu budou koeficienty b_k nulové. Spočtěme koeficienty a_k:

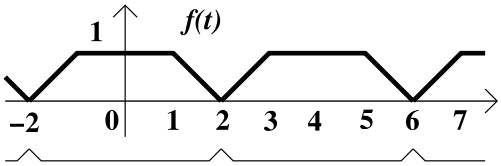
$$
a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 (2-t)dt = \frac{3}{2}\,.
$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \int_0^1 \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt + \int_1^2 (2-t)\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 2-t & v' = \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \\ u' = -1 & v = \frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \end{array} \right| = \\
&= \Bigl[\frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_0^1 + \Bigl[(2-t)\frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 + \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - \frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - \frac{2}{k\pi}\Bigl[\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 = \\
&= -\frac{4}{k^2\pi^2}\Bigl[\cos(k\pi) - \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr] = -\frac{4}{k^2\pi^2}\Bigl[(-1)^k - \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr]\,.
\end{aligned}
$$

Pro výslednou řadu tedy dostáváme:

$$
f \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}\bigl[\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - (-1)^k\bigr]\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,.
$$

Nakonec určíme opět součet. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f. Protože sudé periodické prodloužení funkce f je spojité, musí se součet výsledné řady dle Jordanova kritéria rovnat tomuto prodloužení.



2e

$$\text{b)} f(x) = x \sin x.$$

Řešení. Provedeme nejprve rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou. Pro pomocnou funkci platí

$$F(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \in (0, \pi), \\ -[-x \sin(-x)] = -x \sin x, & x \in (-\pi, 0\rangle. \end{cases}$$

Koeficienty hledané řady jsou

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x \cos(1-n)x - x \cos(1+n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(1-n)x}{1-n} + \frac{\cos(1-n)x}{(1-n)^2} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1+n)x}{(1+n)^2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)^2} - 0 - \frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)^2} - 0 - \frac{1}{(1-n)^2} + 0 + \frac{1}{(1+n)^2} \right] = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{(1-n)^2} - \frac{1}{(1+n)^2} \right] = \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(1-n)^2(1+n)^2}. \end{aligned}$$

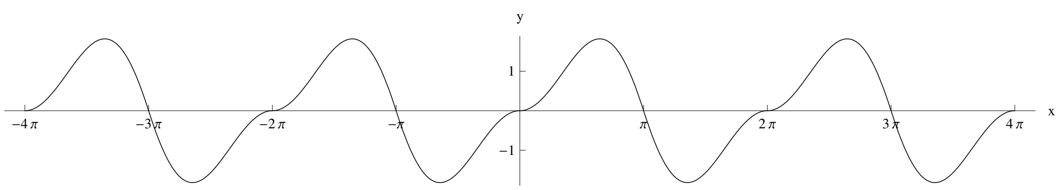
$$b_2 = -\frac{16}{9\pi}, \; b_3 = 0, \; b_4 = -\frac{32}{225\pi}, \; \ldots$$

Pro $n = 1$ nemá daný výsledek smysl, proto je nutné použít pro výpočet b_1 integrál ve tvaru

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - x \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - 0 - \frac{1}{2} - 0 + 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hledaný rozvoj v sinovou řadu je

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{9\pi} \sin 2x - \frac{32}{225\pi} \sin 4x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$



Obr. 7. Liché periodické rozšíření funkce $x \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Nyní provedeme rozvoj v kosinovou řadu, pro jejíž pomocnou funkci platí

$$F(x) = \begin{cases} x\sin x, & x \in (0,\pi), \\ -x\sin(-x) = x\sin x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Fourierovy koeficienty jsou

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big[x\sin(1-n)x + x\sin(1+n)x\big]dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(1-n)x}{1-n} + \frac{\sin(1-n)x}{(1-n)^2} - \frac{x\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1+n)x}{(1+n)^2}\right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos(1-n)\pi}{1-n} + 0 - \frac{\pi\cos(1+n)\pi}{1+n} + 0 + 0 - 0 + 0 - 0\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{\pi(-1)^{n+1}}{1+n}\right] = \frac{(-1)^{n+1}(-2)}{(1-n)(1+n)}. \end{aligned}$$

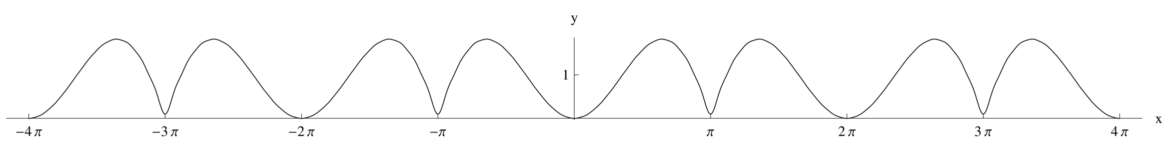
$$a_0 = 2,\ a_2 = -\frac{2}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ \ldots$$

Koeficient a_1 získáme výpočtem příslušného integrálu. Platí

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi}(-\pi - 0 + 0 + 0) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dosazením dostaneme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 3x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle.$$



Obr. 8. Sudé periodické rozšíření funkce $x\sin x, x \in \langle 0, \pi\rangle$

Cvičení 10.2. Rozviňte danou funkci v intervalu $(0,\pi)$ ve Fourierovu a) sinovou a b) kosinovou řadu

$$\text{a)} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\left[\text{a)} \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{6}\sin 6x + \cdots \quad \text{v } (0,\pi)\right]$$

2d

Příklad 5.2.2. *Určete Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu* $[-1, 1]$.
Řešení: Jedná se opět o Fourierovu řadu s obecnou periodou (paragraf 4.2).
Funkce $f(x) = x^2$ je sudá na intervalu $[-1, 1]$, z toho plyne, že

$$b_n = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N},$$

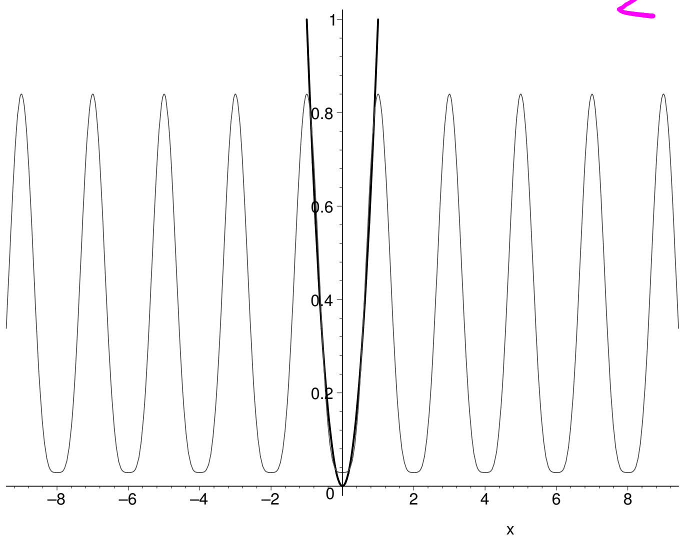
$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x \, dx = 2\frac{n^2\pi^2 \sin n\pi - \sin n\pi + 2 n\pi \cos n\pi}{n^3\pi^3} \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \quad = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

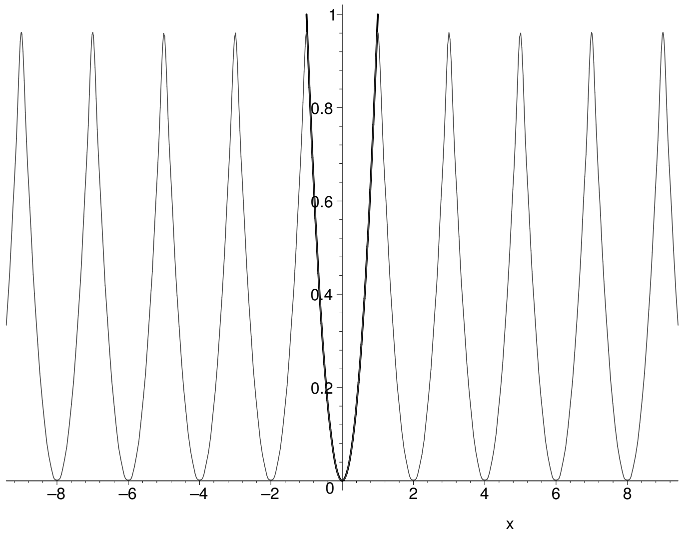
Kde výraz a_n řešíme opět pomocí metody per partes.
Tedy pro x z intervalu $[-1, 1]$ platí

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2\pi^2 \sin n\pi - \cancel{\sin n\pi} + n\pi \cos n\pi) \cos n\pi x}{n^3}.$$

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$$



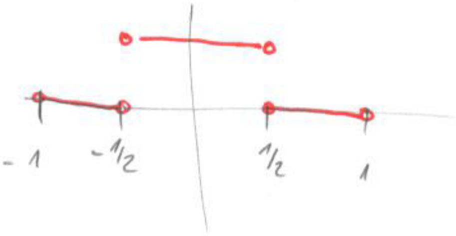
Obr.7a: Graf $f(x) = x^2$ na int. $[-1, 1]$ pro n=2



Obr.7b: Graf $f(x) = x^2$ na int. $[-1, 1]$ pro n=10

③

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1, -1/2) \\ 1 & (-1/2, 1/2) \\ 0 & (1/2, 1) \end{cases}$$



sudá $\rightarrow$ $b_n = 0$ $\qquad 2L = 2 \rightarrow L = 1$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x) \cos \frac{\pi n x}{1} \, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi n x) \, dx = \left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} - \frac{\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right) = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

n sudé: 0 $\qquad$ n liché: $+1 \quad -1$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, dx = 1$$

$$F_1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{\pi(2n-1)} \cos\left((2n-1) x \pi\right)$$

$$c_0 = \frac{\frac{1}{2}}{0+1} = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi x)}{1+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi x)\right)$$

$$c_2 = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos \pi x + \frac{-1 \cdot 2}{\pi \cdot 3} \cos(3\pi x)}{1+2}$$

(4) f 2π - period, $C^1(\mathbb{R})$

- $a_k = 0 \quad \forall k \geq 0 \rightarrow f(x)$ lichá
- $b_k = 0 \quad \forall k \geq 1 \rightarrow f(x)$ sudá

- $a_k = 0$
  - $g(x) = f(x) + f(-x)$

Pro F_g:
$$a_k^g = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)}_{a_k^f} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos(k(-x))\,dx}_{} \right)$$

$y = -x \quad dy = -1\,dx$

$$-\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\cos(-ky)\,dy =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,dy = a_k^f$$

$= 0 + 0$

$$a_0^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\,dx = 0 + 0$$

$y = -x$

$$b_k^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin(kx)\,dx}_{} = b_k^f - b_k^f = 0$$

$y = -x \quad dy = -1\,dx$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\sin(-ky)\,dy = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,dy$$
$$= -b_k^f$$

$\rightarrow \forall$ koef $= 0$, $f(x)$ i $f(-x)$ je C^1 $\rightarrow F_g \rightarrow f \rightarrow$
$0 = f(x) + f(-x) \rightarrow \boxed{f \text{ lichá}}$

- $b_k = 0$ stejně