

b

Řešení:

Zadaná funkce je tohoto tvaru:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad \text{je BV}([-\pi, \pi])$$

Funkce je lichá, a tedy všechny koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right)$$

Podle Dirichletovy věty Fourierova řada konverguje k funkci $\operatorname{sgn}(x)$ na celém intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pro každé $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ tedy platí

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n} \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

Řadu $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ lze zapsat pomocí sumy: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme:

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Odtud získáme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{4}{\pi}$$

Příklad 5. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Pozorování: Je-li f trigonometrický polynom, pak její Fourierova řada s tímto polynomem splývá.

Příklad Napište funkci $\cos^6 x, x \in \mathbb{R}$, ve tvaru trigonometrického polynomu

(13) $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} \in C^1(\mathbb{R}) \quad S_n^f \rightarrow f$

$$\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\cos^6(x) = \cos^4(x) \cdot \cos^2(x) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \right) =$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{3}{16} \cos 2x + \frac{1}{4} (\cos 2x)^2 + \frac{1}{16} \cos 2x \cos 4x$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{7}{16} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 4x + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) + \left(\frac{1}{32} (\cos 6x + \cos 2x) \right) =$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 6x$$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Příklad 5) Rozložte ve Fourierovu řadu funkci $\operatorname{sgn}(x), x \in (-\pi, \pi)$, a určete její součet na \mathbb{R} .

Řešení f je lichá, rozšíříme 2π -periodicky na \mathbb{R}
 $a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots$



$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi k} \cdot ((-1)^{k+1} + 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ sudé} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ liché} \end{cases}$$

Fourierova řada pro funkci f

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}$$

$f \in BV([0, 2\pi]) \cap P_{2\pi}$, tedy z J-D kritéria $S_n^f \rightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$

Tedy $\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} = \tilde{f}(x), x \in \mathbb{R}$, kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & x = k\pi, \\ \operatorname{sgn}(x - 2k\pi) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(1c)

$$b) f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ x, & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad \text{e BV (2024)}$$

Řešení. Obě zadané funkce jsou monotónní, spojité a ohraničené na daných intervalech. Provedeme integraci v intervalech $\langle -\pi, 0 \rangle$ a $\langle 0, \pi \rangle$ a dostaneme jednotlivé koeficienty. Platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 + \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2\pi} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

a proto

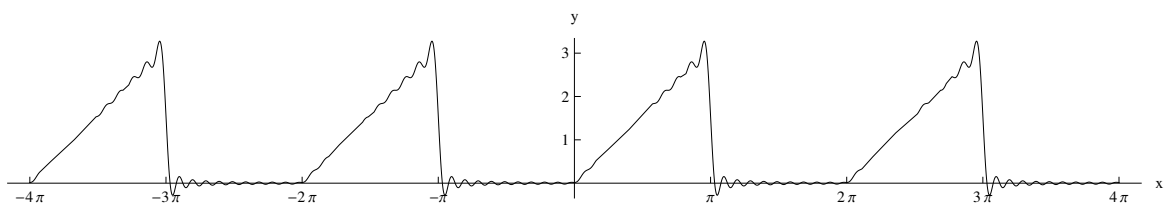
$$a_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2}{9\pi}, \quad a_4 = 0, \quad \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 + \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi \right) = -\frac{1}{n} \cos n\pi = -\frac{1}{n} (-1)^n, \end{aligned}$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots$$

Poté získané koeficienty dosadíme a dostaneme hledaný rozvoj

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \dots \right) + \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right). \end{aligned}$$



Obr. 2. Periodické rozšíření dané funkce

Řešení. Funkce f je po 2π -periodickém dodefinování na \mathbb{R} spojitá. Navíc je monotónní na $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$, a tedy má na těchto intervalech konečnou variaci. Proto je f konečné variace na libovolném omezeném intervalu v \mathbb{R} . Dle Věty 16.4.3 tak Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně na \mathbb{R} k f . Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi^2$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(nx) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right) \\ &= \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \left(\left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) \\ &= \frac{4}{n\pi} \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} \right) \\ &= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}. \end{aligned}$$

Dále $b_n = 0$ díky sudosti funkce f . Tedy

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za x postupně 0 a π , obdržíme rovnosti

$$\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad 0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}.$$

Z nich plynou vztahy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

16.7.2. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje na \mathbb{R} a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

e

Řešení. Definujme funkci g na \mathbb{R} jako

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-2k\pi}, & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu \mathbb{R} a dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na \mathbb{R} .

Počítáme-li její koeficienty, dostáváme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}.$$

Dále pro $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx dx$, $k \in \mathbb{N}$, máme

$$\begin{aligned} I_k &= [e^x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx dx \\ &= \cos(k\pi)(e^\pi - e^{-\pi}) + k \left([e^x \sin kx]_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx dx \right) \\ &= \cos(k\pi)(e^\pi - e^{-\pi}) - k^2 I_k. \end{aligned}$$

Tedy

$$I_k = (-1)^k \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{k^2 + 1}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_n = (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(n^2 + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále máme z již provedeného výpočtu rovnost pro koeficienty b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{-n}{\pi} I_n = (-1)^{n+1} \frac{n(e^\pi - e^{-\pi})}{n^2 + 1}.$$

Tedy

$$g(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za $x = 0$, dostáváme

$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1 \right).$$

•

10

16.7.3. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin 3x + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} . Rozhodněte, zda řada konverguje na \mathbb{R} a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Definujme funkci g na \mathbb{R} jako

$$g(x) = \begin{cases} \sin 3(x - 2k\pi) + 4(x - 2k\pi), & x \in ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = (2k - 1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu \mathbb{R} a dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na \mathbb{R} .

Jelikož je f lichá na $(-\pi, \pi)$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále platí

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3x \sin nx \, dx = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3, \end{cases}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4x \sin nx \, dx &= \frac{8}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \\ &= \frac{8}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}. \end{aligned}$$

Tedy

$$g(x) = \sin 3x + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = 1$ dostáváme

$$\sin 3 + 4 = \sin 3 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}.$$

♣

16.7.4. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi),$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} , která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na \mathbb{R} a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete

$$d) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases} \quad e) BV([0, 2\pi])$$

Řešení. Pro jednotlivé koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi dx + \int_\pi^{2\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} [x]_0^\pi = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos nx dx + \int_\pi^{2\pi} 0 \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin nx dx + \int_\pi^{2\pi} 0 \sin nx dx \right) = \frac{1}{n\pi} [-\cos nx]_0^\pi = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2}{5\pi}, \quad \dots$$

Fourierův rozvoj zadané periodické funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

$$e) f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Řešení. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx$$

Pro výpočet použijeme vzorec $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

Pomocí této Fourierovy řady můžeme vyjádřit např. π^2 .
Položíme-li zde $x = \pi$, obdržíme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ odkud } \pi^2 = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Položíme-li $x = 0$, obdržíme

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ odkud } \pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

12

Příklad 5.1.3. Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Řešení: Hledáme Fourierovu řadu funkce f na intervalu délky 2π , tudíž pro výpočet Fourierových koeficientů využijeme poznámky 4.1.9. Funkce není lichá ani sudá.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx, n \in \mathbb{N}.$$

e BV([0, 2\pi])

Odtud metodou per partes dostaneme

$$a_n = \frac{4}{n^2} \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

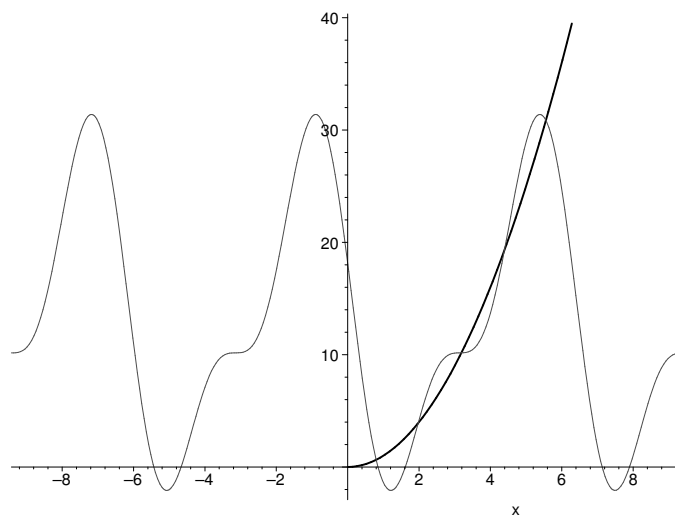
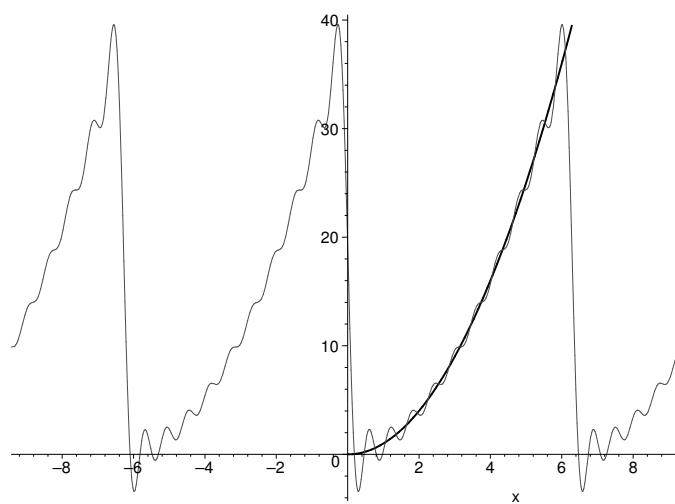
Pro b_n , $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \dots = -\frac{4\pi}{n} \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

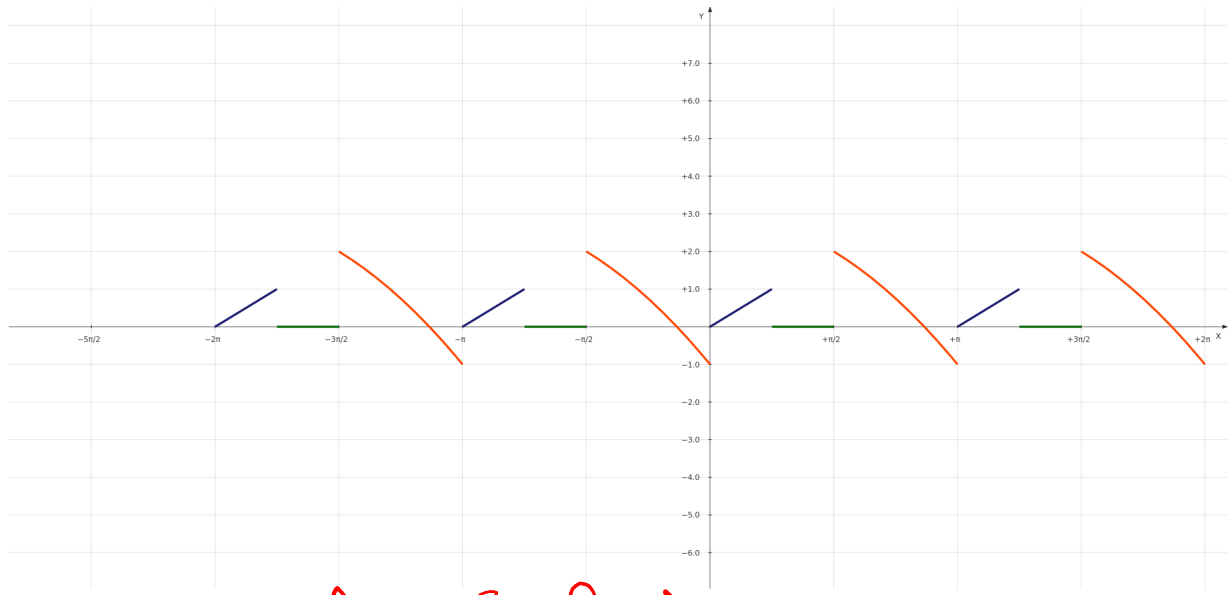
Tedy pro všechna x z intervalu $(0, 2\pi)$ platí

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right)$$

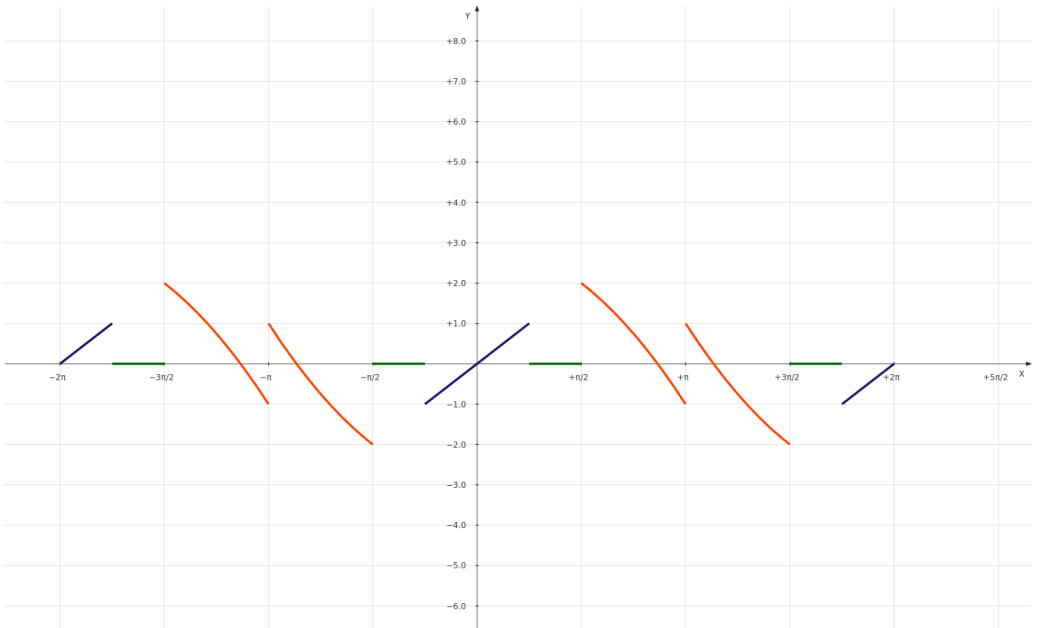
a v krajních bodech intervalu nabývá funkce (podle Dirichletovy věty) hodnoty aritmetického průměru.

Obr.3a: Graf $f(x) = x^2$ na int. $[0, 2\pi]$ pro $n=2$ Obr.3b: Graf $f(x) = x^2$ na int. $[0, 2\pi]$ pro $n=10$

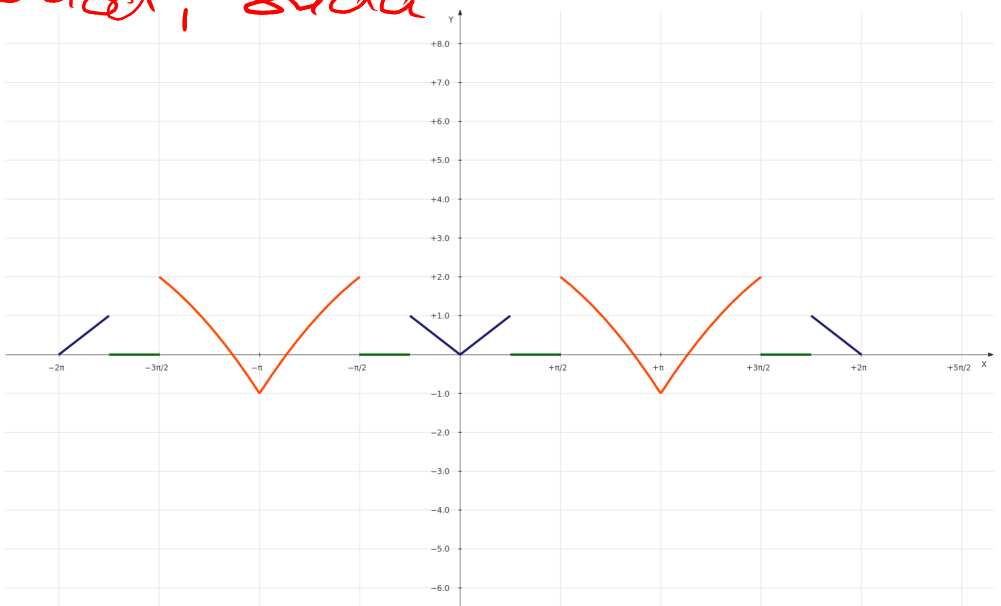
2 π -period



2π-period, lida!



2π-period, suda!



$$[f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4(\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \dots) - 4\pi(\sin x + \frac{1}{2}\sin x + \dots)]$$

$$e) f(x) = \begin{cases} a, & \text{v } (-0, t), \\ -a, & \text{v } (t, 2t). \end{cases}$$

$$[f(x) = \frac{4a}{\pi}(\sin \frac{\pi}{t}x + \frac{1}{3}\sin \frac{3\pi}{t}x + \frac{1}{5}\sin \frac{5\pi}{t}x + \dots)]$$

Příklad 10.2. Rozviňte danou funkci v intervalu $(0, \pi)$ ve Fourierovu řadu sinovou a kosinovou

$$a) f(x) = x.$$

Řešení. Nejprve provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou. Pro pomocnou funkci $F(x)$ platí

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi), \\ -(-x) = x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$\} \in \text{BV}$
([0, \pi])

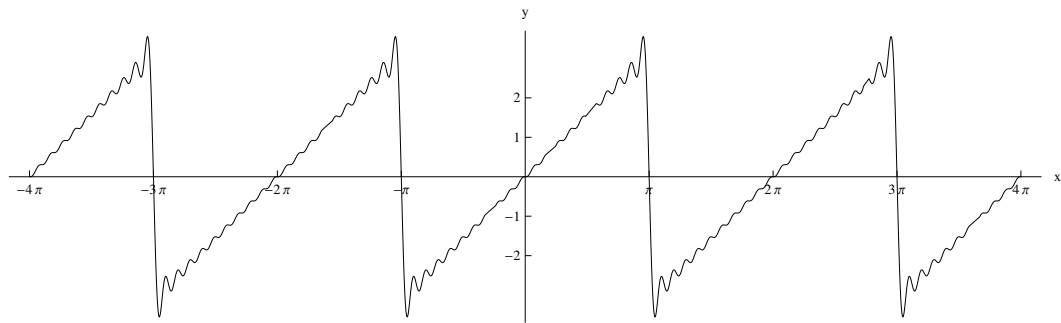
Výpočtem dostáváme Fourierovy koeficienty

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + 0 + 0 - 0 \right) = \\ &= \underline{\underline{-\frac{2}{n}(-1)^n}}. \end{aligned}$$

$$b_1 = 2, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = \frac{2}{3}, \quad \dots$$

Rozvoj v sinovou řadu je tedy

$$f(x) = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x + \dots, \text{ pro } x \in (0, \pi).$$

Obr. 5. Liché periodické rozšíření funkce $x, x \in (0, \pi)$

Nyní provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu kosinovou. Pomocná funkce je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi), \\ -x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Pro Fourierovy koeficienty platí

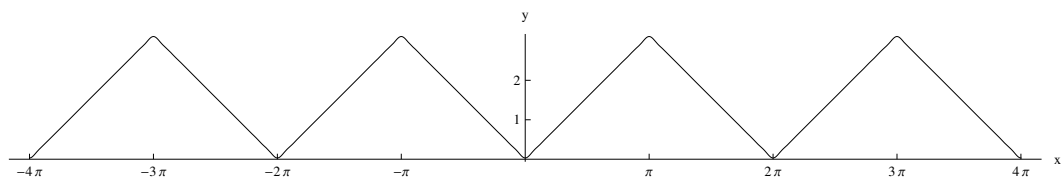
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{n^2} \cos n\pi - 0 - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{9\pi}, \quad \dots$$

Po dosazení dostáváme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \dots, \text{ pro } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Obr. 6. Sudé periodické rozšíření funkce $x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

3b)

Příklad 5.1.4. Určete Fourierovu řadu sudého pokračování funkce $f(x) = e^x$ definované na intervalu $[0, \pi]$.

Řešení: Tato úloha se týká poznámky 4.1.5, podle které je zřejmé, že hledáme rozvoj funkce f v kosinovou řadu. Jedná se o sudou funkci, tudíž

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x dx = \frac{2}{\pi}(e^\pi - 1), \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dvojitou aplikací metody per partes u výrazu a_n obdržíme

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} (e^\pi (-1)^n - 1) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi e^x \cos nx dx.$$

Nyní můžeme řešit následující rovnici

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} (e^\pi (-1)^n - 1).$$

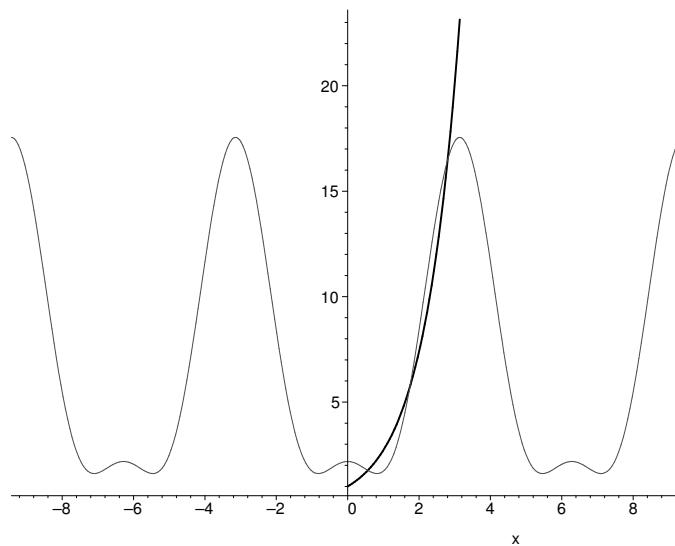
Rovnici vydělíme výrazem $\frac{n^2+1}{n^2}$ a obdržíme

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{2}{n^2+1} (e^\pi (-1)^n - 1) \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

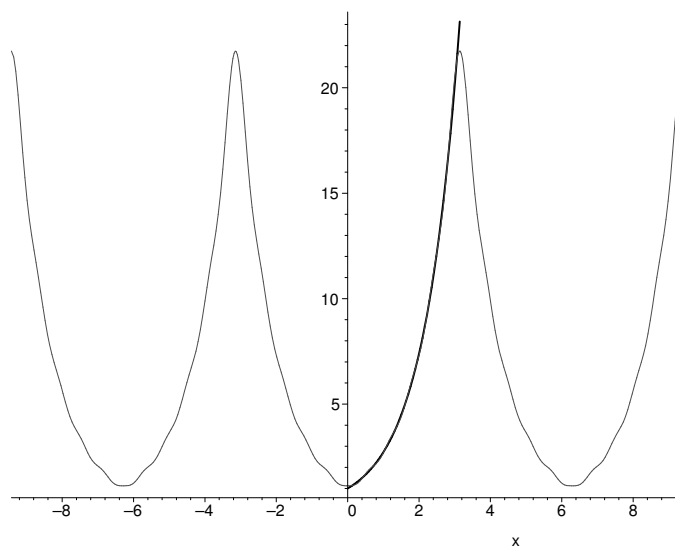
Tedy pro x z intervalu $[0, \pi]$ a jeho sudé pokračování platí

$$e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{n^2 + 1} \cos nx.$$

ta sudá funkce je $\rightarrow V(0, 2\pi)$



Obr.5a: Graf $f(x) = e^x$ na int. $[0, \pi]$ a jejího sudého pokračování, pro $n=2$



Obr.5b: Graf $f(x) = e^x$ na int. $[0, \pi]$ a jejího sudého pokračování, pro $n=10$

součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce g ke g stejnoměrně na \mathbb{R} .

Spočtíme koeficienty této Fourierovy řady. Jelikož je g sudá, jsou členy $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dále máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} [\sin x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[-\cos x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin x \frac{\cos nx}{n} \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{n^2} a_n. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ liché,} \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ pak dostáváme

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

16.7.5. Příklad. Pro $a > 0$ rozviňte funkci

$$f(x) = \cos ax, \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} , která obsahuje pouze členy se $\sin nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na \mathbb{R} a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \cos ax, & x \in (0, \pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \\ -\cos ax, & x \in (-\pi, 0) + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak g je lichá funkce s konečnou variací, a tedy její Fourierova řada konverguje ke g .

Při výpočtu jejích koeficientů máme $a_n = 0$ díky lichosti g a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{a} \sin nx \sin ax \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{n}{a} \cos nx \sin ax \, dx \\ &= -\frac{2n}{\pi a} \int_0^{\pi} \cos nx \sin ax \, dx \\ &= \frac{-2n}{\pi a} \left[\frac{-1}{a} \cos nx \cos ax \right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi a} \int_0^{\pi} \frac{n}{a} \sin nx \cos ax \, dx \\ &= \frac{2n}{\pi a^2} [(-1)^n \cos(a\pi) - 1] + \frac{n^2}{a^2} b_n. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $a \notin \mathbb{N}$. Pak z předchozího plyne

$$b_n = \frac{2n}{\pi(a^2 - n^2)} [(-1)^n \cos(a\pi) - 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $a = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2kx \, dx = 0.$$

Tedy Fourierova řada g má tvar

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n \neq a}^{\infty} \frac{n}{a^2 - n^2} [(-1)^n \cos(a\pi) - 1] \sin nx.$$

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$\begin{aligned} -1 = \cos \pi &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} [(-1)^n - 1] \sin n \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^k (2k+1)}{4 - (2k+1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}.$$

16.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \text{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na \mathbb{R} , která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na \mathbb{R} a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π -periodické rozšíření f na \mathbb{R} , tj. funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in ((-\pi, -\frac{2}{3}\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in ((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ g(x), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos nx dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{4}{\pi n} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right)}}. \end{aligned}$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k + 1, 6k + 3, 6k + 5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k + 2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k + 4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 = h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

16.7.7. Příklad. Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha, \alpha]} \in \mathfrak{F}([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty ?? platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Řešení: Na intervalu $\langle -\pi, 0 \rangle$ jsou části integrálů pro koeficienty a_n, b_n nulové.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(1+n)x - \sin(1-n)x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right)$$

Pro $n > 1$ platí:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(1-n)x - \cos(1+n)x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n} \right]_0^\pi = 0$$

Koeficient b_1 musíme spočítat odděleně: :

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 1 - \cos 2x \, dx = \frac{1}{2\pi} [x - \sin 2x]_0^\pi = \frac{1}{2}$$

Fourierova řada má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right) \cos nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

Podle Dirichletovy věty je součet této řady roven $f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Příklad 6. Rozložte v kosinovou Fourierovu řadu funkci:

(3P)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ -\cos x, & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Protože rozkládáme v kosinovou řadu, jsou všechny koeficienty b_n nulové.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \left([\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{4}{\pi}$$

suda' zopie & BV(20, 24)

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos x dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(1+n)x + \\ &+ \cos(1-n)x dx - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(1+n)x + \cos(1-n)x dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{pro } n \text{ liché} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k+2 \\ \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k \end{cases} \end{aligned}$$

Tento zápis lze sjednotit do jediného:

$$a_n = \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{n}{2}} ((-1)^n + 1) \frac{1}{1-n^2}$$

Pak tedy, protože funkce je spojitá, platí podle Dirichletovy věty na celém

intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} ((-1)^n + 1) \frac{\cos nx}{1-n^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{1-n^2}$$

Příklad 7. Rozložte v sinovou Fourierovu řadu funkci $f(x) = \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení:

Protože rozkládáme v sinovu řadu, všechny koeficienty a_n jsou nulové.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2+n)x + \sin(n-2)x dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n+2} + \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n-2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} ((-1)^{n+1} + 1) \frac{n+2+n-2}{n^2-4} = \frac{2n}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2-4} \end{aligned}$$

Protože funkce je spojitá, podle Dirichletovy věty platí na celém

intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \sin 2x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 4x dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n((-1)^{n+1} + 1) \sin nx}{n^2 - 4} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - 4} \sin(2n+1)x$$

Příklad 8. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & x \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Jde o lichou funkci, tedy všechny její koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\pi \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) =$$

$$= \text{použijte metodu per partes} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\pi \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\pi \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}$$

Podle Dirichletovy věty řada konverguje pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$

kromě $x = 0$ k zadané funkci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Příklad 9. Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Najděte součty řad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Řešení:

Jde o sudou funkci, tedy všechny její koeficienty b_n jsou rovny nule. Spočtu koeficienty a_n :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left[x\pi^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

Řešení. Pro jednotlivé koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi dx + \int_\pi^{2\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} [x]_0^\pi = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos nx dx + \int_\pi^{2\pi} 0 \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin nx dx + \int_\pi^{2\pi} 0 \sin nx dx \right) = \frac{1}{n\pi} [-\cos nx]_0^\pi = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2}{5\pi}, \quad \dots$$

Fourierův rozvoj zadané periodické funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

(4a)

$$e) f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

$\in BV([0, \pi])$

Řešení. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx$$

Pro výpočet použijeme vzorec $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

!! pozor na periodu

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi [\sin(1-2n)x + \sin(1+2n)x] dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1-2n} \cos(1-2n)x - \frac{1}{1+2n} \cos(1+2n)x \right]_0^\pi = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(1-2n)\pi}{1-2n} + \frac{\cos(1+2n)\pi}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} - \frac{1}{1+2n} \right] = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{-1-1}{1-2n} + \frac{-1-1}{1+2n} \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) = \\
 &= \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.
 \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{4}{3\pi}, \quad a_2 = -\frac{4}{15\pi}, \quad a_3 = -\frac{4}{35\pi}, \quad \dots$$

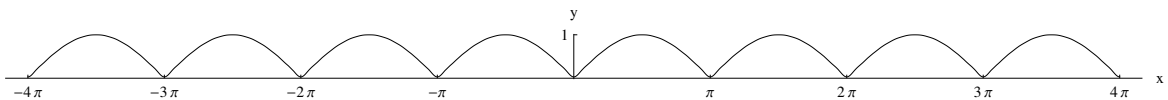
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin 2nx dx$$

Použijeme vzorec $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(1-2n)x - \cos(1+2n)x] dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1-2n} \sin(1-2n)x - \frac{1}{1+2n} \sin(1+2n)x \right]_0^\pi = 0.
 \end{aligned}$$

Fourierův rozvoj dané funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2x - \frac{4}{15\pi} \cos 4x - \frac{4}{35\pi} \cos 6x + \dots$$



Obr. 4. Periodické rozšíření funkce $\sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$

(4b)

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in \langle -t, t \rangle.$$

$\in BV[-t, t]$

Řešení. Daná funkce je lichá na intervalu $\langle -t, t \rangle$, a proto její koeficienty jsou

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{t} \int_{-t}^t \frac{x}{2} \sin \frac{n\pi}{t} x dx = \left| \begin{array}{l} u' = \sin \frac{n\pi}{t} x \quad u = -\frac{t}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{t} x \\ v = x \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2t} \left(\left[-\frac{xt}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{t} x \right]_{-t}^t + \frac{t}{n\pi} \int_{-t}^t \cos \frac{n\pi}{t} x dx \right) = \\
&= \frac{1}{2t} \left[-\frac{xt}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{t} x + \frac{t^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{t} x \right]_{-t}^t = \\
&= \frac{1}{2t} \left(-\frac{t^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{t^2}{n^2\pi^2} \sin n\pi - \frac{t^2}{n\pi} \cos(-n\pi) - \frac{t^2}{n^2\pi^2} \sin(-n\pi) \right) = \\
&= \frac{1}{2t} \left(-\frac{t^2}{n\pi} (-1)^n - \frac{t^2}{n\pi} (-1)^n \right) = \frac{(-1)^n}{2t} \left(-\frac{2t^2}{n\pi} \right) = \underline{\underline{-\frac{(-1)^n t}{n\pi}}}.
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{t}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{t}{2\pi}, \quad b_3 = \frac{t}{3\pi}, \quad \dots$$

Výsledný Fourierův rozvoj funkce je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{t} = \frac{t}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{t} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{t} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{t} + \dots \right).$$

Cvičení 10.1. Rozviňte ve Fourierovu řadu v daném základním intervalu periodicity funkci

$$\text{a) } f(x) = x \quad \text{v } \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$[f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right)]$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{v } (-\pi, 0), \\ x, & \text{v } (0, \pi). \end{cases}$$

$$[f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right) + 3 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{3}{5} \sin 3x + \dots]$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{v } \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & \text{v } \langle \pi, 2\pi \rangle. \end{cases}$$

$$[f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)]$$

$$\text{d) } f(x) = x^2 \quad \text{v } (0, 2\pi)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k \geq 1.$$

Typická úloha, která se v souvislosti s Fourierovými řadami vyskytuje, je nalézt pro nějakou funkci f na intervalu $\langle 0, T \rangle$ její Fourierovu řadu a určit, jaký je její skutečný součet (tj. jak moc dobře řada původní funkci reprezentuje). Protože Fourierova řada je definována pro periodické funkce můžeme tuto úlohu vyřešit třemi různými způsoby:

1. prodloužit funkci f na T -periodickou. Potom dostaneme Fourierovu řadu, které může obsahovat jak členy se sinem tak i kosinem.
2. prodloužit funkci f na lichou $2T$ -periodickou. Potom dostaneme tzv. sinovou Fourierovu řadu, která obsahuje jen členy se sinem.
3. prodloužit funkci f na sudou $2T$ -periodickou. Potom dostaneme tzv. kosinovou Fourierovu řadu, která obsahuje jen členy s kosinem.

Pokud bychom v bodech 2 a 3 přímo počítali koeficienty a_k a b_k pomocí definice Fourierovy řady, museli bychom integrovat přes interval dlouhý $2T$. Nicméně díky jisté symetrii, kterou liché a sudé funkce splňují, lze ukázat, že koeficienty lze v těchto případech spočítat jednodušeji. Konkrétně pro sinovou řadu platí $a_k = 0$ a

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt,$$

kde tentokrát $\omega = \frac{\pi}{T}$. Pro kosinovou máme naopak $b_k = 0$ a

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad \text{kde } \omega = \frac{\pi}{T}.$$

Ukážeme si nyní na konkrétních příkladech, jak se tato úloha řeší. V každém příkladu ukážeme všechny tři možné řešení z výše uvedených bodů.

(4c)

Příklad 3 Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovu řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, 2 \rangle; \\ 2, & t \in \langle 2, 4 \rangle. \end{cases} \quad \text{BV na } [0, 4]$$

Fourierova řada:

Perioda funkce $f(t)$ je tedy $T = 4$. To znamená, že $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Spočteme koeficienty a_k . Pro $k = 0$ máme:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2} \int_2^4 2 dt = 2.$$

Pro $k \geq 1$ dostaneme:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_2^4 2 \cos(k \frac{\pi}{2} t) dt = \left[\frac{1}{k \frac{\pi}{2}} \sin(k \frac{\pi}{2} t) \right]_2^4 = 0.$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že $\sin(2k\pi) = \sin(k\pi) = 0$ pro všechny k .

Dále spočítáme koeficienty b_k , $k \geq 1$:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_2^4 2 \sin(k \frac{\pi}{2} t) dt = \left[-\frac{2}{k\pi} \cos(k \frac{\pi}{2} t) \right]_2^4 = -\frac{2}{k\pi} (\cos(2k\pi) - \cos(k\pi)).$$

Protože $\cos(2k\pi) = 1$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$, dostaneme nakonec

$$b_k = -\frac{2}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ -\frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché.} \end{cases}$$

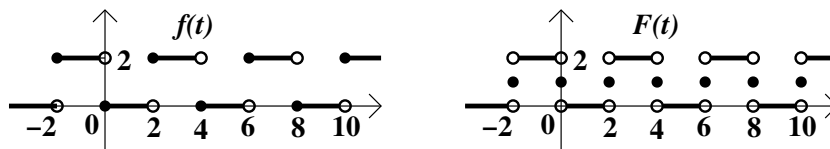
Fourierova řada pro danou funkci tedy je:

$$f \sim \frac{2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right) \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)$$

Jelikož všechny sudé členy vyskytující se v poslední řadě jsou nulové, lze poslední výraz ještě upravit tak, že sčítací index k nahradíme výrazem $2k + 1$ a za b_k dosadíme jeho hodnoty pro lichá k :

$$f \sim 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}t\right)$$

Dále máme určit součet nalezené Fourierovy řady. Nakreslíme si periodické prodloužení f (vlevo), a pak si vzpomeneme na Jordanovo kritérium. Tam, kde je f spojitá, je součet řady roven f . Tam, kde je bod nespojitosti, konverguje řada k průměru $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$ (součet vpravo).



Formulí lze součet vyjádřit takto:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in (4k, 4k+2); \\ 2, & t \in (4k+2, 4k+4); \\ 1, & t = 2k \end{cases} \text{ pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Všimněte si následující věci: „normální“ Fourierka je „skoro sinová“, proč? Protože podle obrázku vidíme, že periodické prodloužení f je vlastně ve tvaru $1 +$ „lichá funkce“, proto také odpovídající řada je ve tvaru $1 +$ „sinová“.

sinová Fourierova:

V tomto případě máme opět $T = 4$. Nicméně $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Protože budeme počítat sinovou řadu víme, že koeficienty u kosinů $a_k = 0$. Spočtěme nyní koeficienty b_k :

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^4 f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_2^4 2 \sin\left(k\frac{\pi}{4}t\right) dt = \left[-\frac{4}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{4}t\right) \right]_2^4 = -\frac{4}{k\pi} [\cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)].$$

Jelikož $\cos(k\pi) = (-1)^k$ a

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 4n, \\ 0 & \text{pro } k = 4n \pm 1, \\ -1 & \text{pro } k = 4n + 2, \end{cases} n \in \mathbb{Z},$$

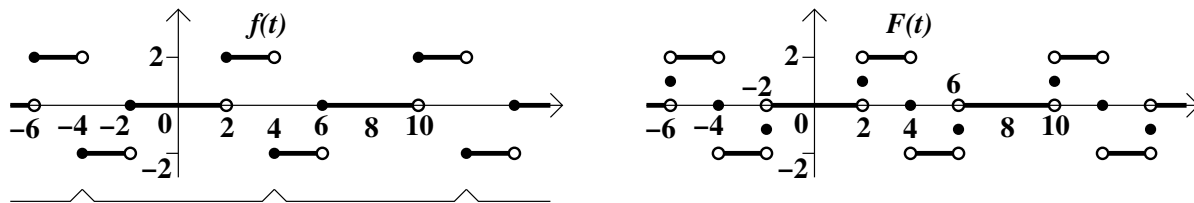
můžeme přepsat poslední výraz pro b_k takto:

$$b_k = -\frac{4}{k\pi} [(-1)^k - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)] = \begin{cases} 0, & k = 4n, \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n \pm 1, \\ -\frac{8}{k\pi}, & k = 4n + 2. \end{cases} n \in \mathbb{Z},$$

Poslední výraz není příliš hezký, takže ho výsledného zápisu řady raději nepoužijeme. Dostáváme tedy:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} [\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k] \sin\left(k\frac{\pi}{4}t\right).$$

Dále určíme součet sinové řady. Nejprve nakreslíme **liché** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4 \rangle$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.



kosinová Fourierova:

Nakonec najdeme kosinovou řadu. Máme tedy $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Koeficienty u sinů $b_k = 0$. Pro koeficienty u kosinů máme:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^4 f(t) dt = 2,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^4 f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_2^4 2 \cos(k \frac{\pi}{4} t) dt = \left[\frac{4}{k\pi} \sin(k \frac{\pi}{4} t) \right]_2^4 = \frac{4}{k\pi} [\sin(k\pi) - \sin(k \frac{\pi}{2})].$$

Jelikož $\sin(k\pi) = 0$ dostáváme:

$$a_k = -\frac{4}{k\pi} \sin(k \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & k = 4n, k = 4n + 2, \\ -\frac{4}{k\pi}, & k = 4n + 1, \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n + 3. \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

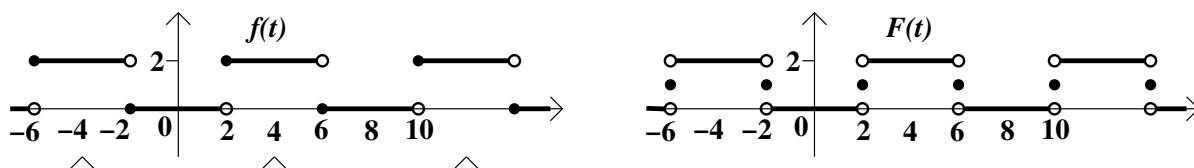
Proto

$$f \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{k\pi} \sin(k \frac{\pi}{2}) \cos(k \frac{\pi}{4} t).$$

Všimněte si, že koeficienty a_k se rovnají 0 pro sudá k a $\frac{4}{k\pi}$ nebo $-\frac{4}{k\pi}$ pro lichá. Pokud tedy nahradíme sčítací index ve výsledné řadě výrazem $2k + 1$, lze výsledek napsat takto:

$$f \sim 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1) \frac{\pi}{4} t).$$

Nakonec určíme součet kosinové řady. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4 \rangle$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.



Příklad 4 Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovu řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.

$$f(t) = 1 - t, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

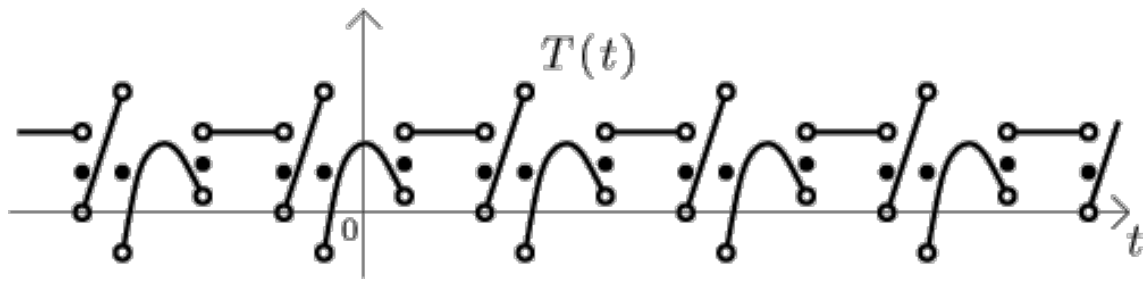
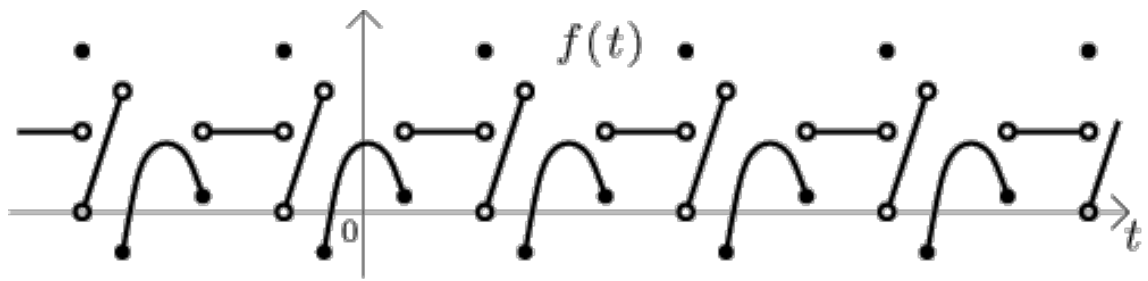
Fourierova řada:

Pro funkci f máme $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Spočítáme koeficienty a_k a b_k .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (1-t) dt = 0.$$

Následující integrály budeme počítat pomocí metody per partes.

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^2 (1-t) \cos(k\pi t) dt = \left| \begin{array}{ll} u = 1-t & v' = \cos(k\pi t) \\ u' = -1 & v = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \end{array} \right| = \left[(1-t) \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right]_0^2 + \frac{1}{k\pi} \int_0^2 \sin(k\pi t) dt.$$



5a

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na \mathbb{R} .

1. Rozviňte tuto funkci do 2π -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

2. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

~~3.~~ Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá a na intervalu $(-\pi, \pi)$ se rovná funkci $\cos \frac{x}{2}$. Proto

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx = \frac{2}{\pi} \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^\pi = \frac{4}{\pi},$$

a (v první rovnosti využijeme $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \left(n + \frac{1}{2} \right) + \cos x \left(n - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{2n+1} \sin x \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{2n-1} \sin x \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{2n+1} \underbrace{\sin \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{2n-1} \underbrace{\sin \pi \left(n - \frac{1}{2} \right)}_{=(-1)^{n+1}} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{2}{\pi} (-1)^n \frac{(-2)}{4n^2-1} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos nx,$$

a protože zadaná funkce po částech C^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém \mathbb{R} , konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Dosazení bodu $x = \pi$ dává

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} (-1)^n,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

~~Parsevalova rovnost~~ (v našem případě $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2},$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

5b

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

1. Dodefinujte ji na celé \mathbb{R} tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π -periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.
2. Spočítejte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
- ~~3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.~~

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sinh ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} e^{inx} \, dx,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočítejme nejprve

$$\int_0^\pi e^{ax} e^{inx} \, dx = \frac{1}{a + in} (e^{a\pi} e^{in\pi} - 1) = \frac{a - in}{a^2 + n^2} (e^{a\pi} (-1)^n - 1),$$

tedy

$$\operatorname{Im} \int_0^\pi e^{ax} e^{inx} \, dx = \frac{n}{a^2 + n^2} (1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}).$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\int_0^\pi e^{-ax} e^{inx} \, dx = \frac{n}{a^2 + n^2} (1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}),$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} e^{inx} \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{a^2 + n^2} [1 - 1 + (-1)^{n+1} (e^{a\pi} - e^{-a\pi})] = \frac{2}{\pi} \sinh a\pi \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2}.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} \sinh a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2} \sin nx,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji \tilde{f}) je funkce po částech \mathcal{C}^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax \, dx = \left(\frac{2}{\pi} \sinh a\pi \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2}. \quad (2)$$

Protože (spočítej si) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax \, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1 \right)$, ($a \neq 0!$) dostaneme konečně:²

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 a\pi} \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1 \right), \quad a \neq 0. \quad (3)$$

²Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim_{a \rightarrow 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)