

8. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Necht' $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Variaci funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|; \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } [a, b] \right\}.$$

Řekneme, že funkce $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ omezenou variaci, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $V_a^b(g) < K$ pro každý interval $[a, b] \subset I$.

Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu I značíme $BV(I)$.

Věta 2. Necht' $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in (a, b)$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když $f \in BV([a, c])$ a $f \in BV([c, b])$. Navíc

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Úloha 3. Spočítejte variace následujících funkcí:

- | | |
|-------------------------|--|
| 1.* x^2 na $[0, 1]$, | 3. $\sin x$ na $[0, 10\pi]$, |
| 2. x^2 na $[-1, 1]$, | 4. $\frac{1}{2} \lfloor x \sin \frac{\pi x}{2} \rfloor$ na $[-4, 4]$ |

<https://www.geogebra.org/calculator/ccpnefwv>

Úloha 4 (*). Ukažte, že Dirichletova funkce

$$f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

Úloha 5 (*). Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

<https://www.geogebra.org/calculator/wsv9c6hc>

Věta 6. Necht' f je spojitá na $[a, b]$ a f' existuje a je omezená na (a, b) . Pak $f \in BV([a, b])$.

Úloha 7 (*). Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

má konečnou variaci na $[0, 1]$.

<https://www.geogebra.org/calculator/fcagxskk>

Úloha 8. Dokažte nebo najděte protipříklad

1.* $f \in BV[a, b] \Rightarrow |f| \in BV[a, b]$?

2.* $|f| \in BV[a, b] \Rightarrow f \in BV[a, b]$?

Úloha 9. Dokažte nebo najděte protipříklad. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. jestliže f je omezená, pak je BV,

2.* jestliže f je BV, pak je omezená.

Věta 10. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když existují neklesající a omezené funkce $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $f = g - h$.

Úloha 11. Ukažte, že jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f, g \in BV([a, b])$, pak i $f + g \in BV([a, b])$ a $\alpha f \in BV([a, b])$

Úloha 12. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojitě, omezené a BV na $[a, b]$.

2

Definice 13. Řekneme, že funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b$ máme

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $AC([a, b])$.

Úloha 14 (*). Ukažte z definice, že funkce $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = \sqrt{x}$ jsou absolutně spojitě na $[0, 1]$.

Úloha 15 (*). Ukažte, že Cantorova funkce (která je spojitá i stejnoměrně spojitá) je na intervalu $[0, 1]$ BV, ale není absolutně spojitá.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_funkce

Úloha 16. Najděte funkci, která není absolutně spojitá, ale má konečnou variaci.

Úloha 17. Rozhodněte, zda má AC funkce nutně omezenou derivaci.

Úloha 18 (*). Dokažte nebo najděte protipříklad

- $f \in AC[a, b] \Rightarrow |f| \in AC[a, b]$?
- $|f| \in AC[a, b] \Rightarrow f \in AC[a, b]$?

Úloha 19 (*). Nechť $f, g \in AC([a, b])$. Ukažte, že pak i $fg \in AC([a, b])$.

3

Definice 20. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K -lipschitzovské, jestliže

$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K -lipschitzovské.

Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 21. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval otevřený i neomezený.

Úloha 22. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

- 1.* $|x|$ na $[-1, 1]$ 2.* x^2 na $[1, 2]$ 3. x na \mathbb{R}

Úloha 23 (*). Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na \mathbb{R} 2. \sqrt{x} na $[0, 1]$

Úloha 24. Nechť X je množina slov skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\begin{aligned} \rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) &= 8, \\ \rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) &= 7, \\ \rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) &= 2. \end{aligned}$$

Pro slovo z 10 písmen $x = x_1, x_2, \dots, x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(x) = a, x_2, \dots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Úloha 25. Necht' f, g jsou lipschitzovské na \mathbb{R} . Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$

2. $f(g)$

Úloha 26 (*). Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).

Úloha 27. Najděte funkci, která je AC , ale není Lip.

Úloha 28. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité, lipschitzovské, stejnoměrně spojité a absolutně spojité na $[a, b]$.

Úloha 29. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Úloha 30 (*). Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

(3.1) jak se spočítá variace monotónní funkce?
 (4) volte dělení na střídacích z \mathbb{Q} a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 (5) volte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2n}$
 (7) Věta 6
 (8.1) z definice a $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$
 (8.2) zkuste upravit Dirichletovu funkci
 (9) $|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)|$
 (14.1) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (14.2) Pro ε najděte bod $c = \varepsilon^2/4$. Dělení rozdělte na intervaly před bodem c a po něm. Při odhadu 2. části rozšířte $\sqrt{b_j} + \sqrt{a_j}$. (15) Jak vzniká Cantorova množina? Uíme ji pokrýt dělením? Ve kterých bodech roste Cantorova funkce? (18.1) z definice a $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$
 (18.2) zkuste upravit Dirichletovu funkci
 (19) $ab - cd = ab - ad + ad - cd$
 (22.1) $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$
 (22.2) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
 (23) Problém vzniká s neomezenou derivací.
 (26) Z definice.
 (30) Lagrangeova věta o střední hodnotě.