Integrál

Kristýna Kuncová

Matematická analýza 2 20/21

Vlastnosti - příklady

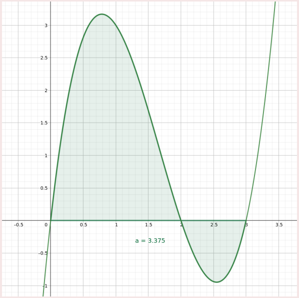
Příklad (Pravda – Nepravda)

Nechť f je funkce, pak $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad (Pravda – Nepravda)

Nechť f je funkce, pak $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ne. (Co když je f kladná nebo střídá znaménko? Pak to nefunguje.)



Vlastnosti - příklady

Příklad (Pravda – Nepravda)

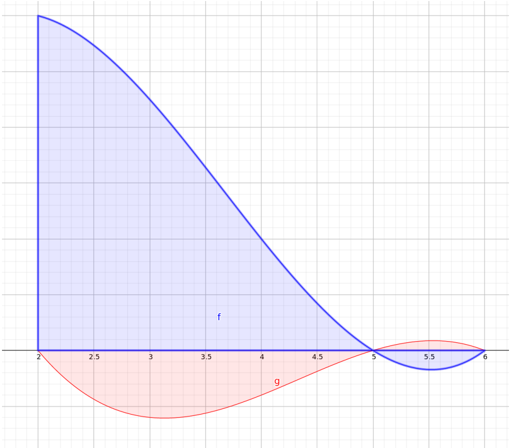
A Jestliže $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $2 \leq x \leq 6$ pak
$$\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

B Jestliže $\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$, pak $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $2 \leq x \leq 6$.

Vlastnosti - příklady

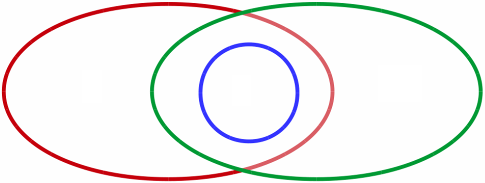
Pravda.

Ne. (Integrál vidí jen plochu, ale už ne, jak jsou funkce doopravdy velké.)

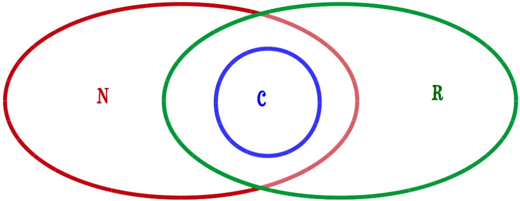


Vztah Newtonova a Riemannova integrálu

Doplňte do Vennova diagramu popisky:
C - funkce spojité na $[a, b]$
R - funkce Riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$
N - funkce Newtonovsky integrovatelné na (a, b)
Najdete protipříklad, proč množiny nesplývají?



Vztah Newtonova a Riemannova integrálu

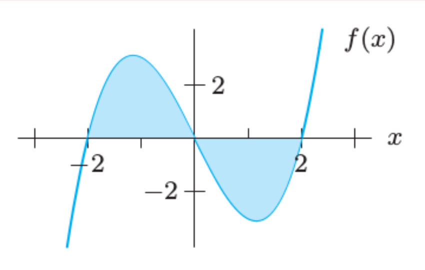


Integrály - příklady

Příklad

Na obrázku je lichá funkce. Jestliže víte, že $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, určete

1. $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$



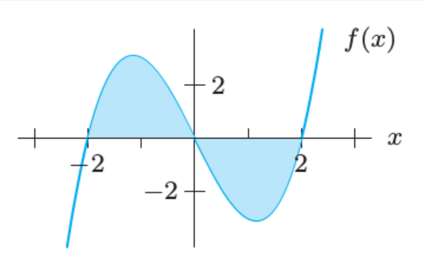
Zdroj: Book.pdf

Integrály - příklady

Příklad

Na obrázku je lichá funkce. Jestliže víte, že $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, určete

1. $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$



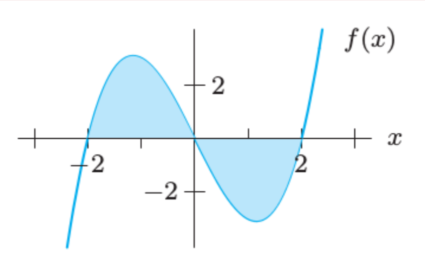
Zdroj: Book.pdf

-4, funkce je lichá, tedy kopečky jsou symetrické a musí mít stejný obsah. A obsahy pod osou x jsou záporné.

Příklad

Na obrázku je lichá funkce. Jestliže víte, že $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, určete

1. $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$



Zdroj: Book.pdf

-4, funkce je lichá, tedy kopečky jsou symetrické a musí mít stejný obsah. A obsahy pod osou x jsou záporné.
0, z větičky o vlastnostech Newtonova integrálu stačí obě čísla sečíst.

Riemannův integrál - příklad

Příklad

Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže hodnoty funkce f jsou

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

Table: Book.pdf

Riemannův integrál - příklad

Příklad

Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže hodnoty funkce f jsou

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

Table: Book.pdf

Návod: načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.

Riemannův integrál - příklad

Příklad

Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže hodnoty funkce f jsou

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

Table: Book.pdf

Návod: načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.
Horní odhad: 606
Dolní odhad: 480

Příklad

Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletovu funkci

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Integrály - příklady

Příklad

Rozřaďte integrály do skupin:

A $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x$

B $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$

C $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$

D $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x$

E $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$

1. kladné
2. 0
3. záporné

Příklad

Rozřaďte integrály do skupin:

A $\int_{-\pi}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x$

B $\int_{0}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x$

C $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$

D $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$

E $\int_{0}^{2\pi} e^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x$

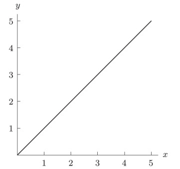
1. kladné
2. 0
3. záporné

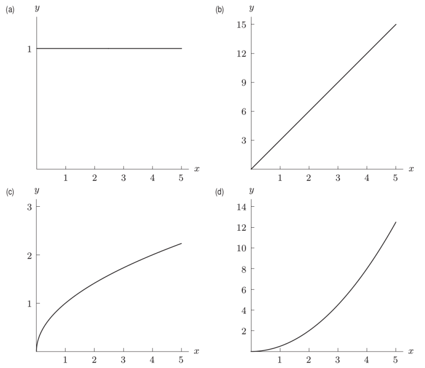
1: D, E
2: B, C
3: A

Funkce se dají buď načrtnout nebo se dají všechny integrály upočítat.

Příklad

Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?

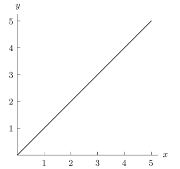


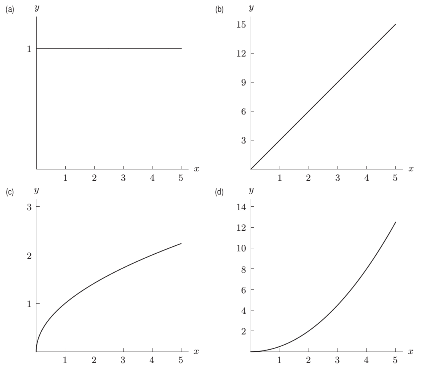


Zdroj: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

Příklad

Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



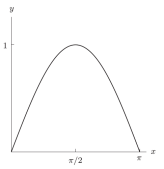


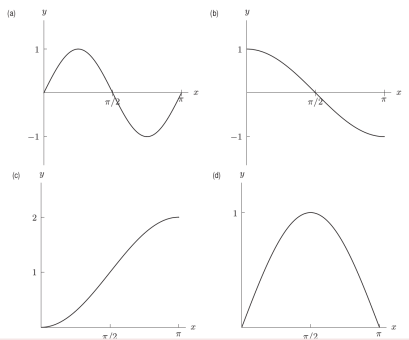
Zdroj: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

D, funkce na obrázku vpravo je $f(x) = x$. Její integrál je $x^2/2$, takže D.

Příklad

Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?

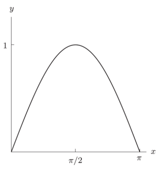


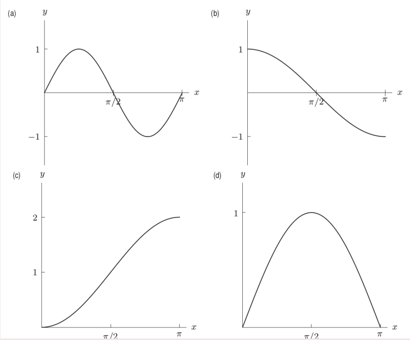


Zdroj: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

Příklad

Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?





Zdroj: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

C, funkce vpravo (takže derivace) je kladná, takže primitivní funkce musí být rostoucí.

Rovnost až na konstantu

Příklad

Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?

Rovnost až na konstantu

Příklad

Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?
Nepravda - problém s s definičním oborem.

Příklad

Které/á z následující jsou tvrzení pravdivá?

- A Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).
- B Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf

Rovnost až na konstantu

Příklad

Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?
Nepravda - problém s s definičním oborem.

Příklad

Které/á z následující jsou tvrzení pravdivá?

A Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

B Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf

B platí. Označme $F(x) = \int f(x)$ a $G(x) = \int g(x)$. Víme, že $F = G$. Pak ale i $F' = G'$, což je vlastně $f = g$.
A neplatí, protože i když se rovnají derivace, tak funkce g a f se mohou lišit o konstantu.

Příklad (Pravda – Nepravda)

Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$divergují. Které výroky jsou pravdivé?

- A $\int f_1 + f_2$ konverguje
- B $\int f_1 + g_2$ diverguje
- C $\int g_1 - g_2$ konverguje
- D $\int f_1 f_2$ konverguje
- E $\int f_1 g_2$ konverguje

Příklad (Pravda – Nepravda)

Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

- A $\int f_1 + f_2$ konverguje
- B $\int f_1 + g_2$ diverguje
- C $\int g_1 - g_2$ konverguje
- D $\int f_1 f_2$ konverguje
- E $\int f_1 g_2$ konverguje

A - konverguje, linearita integrálu
B - diverguje
C - může konvergovat i divergovat
D - může konvergovat i divergovat
E - může konvergovat i divergovat

Příklad (Pravda – Nepravda)

A Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.

B Jestliže $\int_2^\infty f(x)$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Příklad (Pravda – Nepravda)

- A Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.
- B Jestliže $\int_2^\infty f(x)$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

A pravda, B nepravda.

Substituce vs. Per partes

https://learningapps.org/display?v=pgeigqe6j21

Příklad (Pravda – Nepravda)

Nechť $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

A Nechť f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^{a} f = 0$

B Nechť f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^{a} f = 2 \int_{0}^{a} f$

Příklad (Pravda – Nepravda)

Nechť $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

- A Nechť f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^{a} f = 0$
- B Nechť f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^{a} f = 2 \int_{0}^{a} f$

Jen za předpokladu, že integrály existují vlastní. Jinak nemusí existovat.

Příklad

Sestrojte funkce $f_n(x) : [0,1] \to [0,\infty)$ tak, že

1. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
2. pro každé $x \in [0,1]$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

P.S.: Stačí obrázkem.

Příklad

Sestrojte funkce $f_n(x) : [0,1] \to [0,\infty)$ tak, že

1. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
2. pro každé $x \in [0,1]$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

P.S.: Stačí obrázkem.
např. $f_n(x) = 2n\chi_{[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]}$