

10. cvičení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php>
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci). Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b) , která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci). Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

$$(a) f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$(c) f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

2. Hyperbolické:

$$(a) f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

3. Směs

$$(a) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$(c) f(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$(b) f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$$

$$(d) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$x = \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \ln(1+e^x) + C$ •	$\int \cos x dx = \sin x + C$ •
$x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln x+\sqrt{x^2-1} + C$ •	$\int \sin x dx = -\cos x + C$ •
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ •	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ •
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$ •	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \tan \frac{x}{2} + C$ •
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ •	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \sec x + \tan x + C$ •
$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ •	$\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \ln \tan x + C$ •