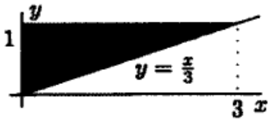
**řešení:**
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast $\Omega$. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa $\Omega$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál




$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{3y} \big(\underbrace{\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz}_{=x^2+y^2}\big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big( \underbrace{\int_0^{3y} (x^2+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x:=0}^{x:=3y}=12y^3} \Big)\,dy = \int_0^1 12y^3\,dy = 12\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 3$$

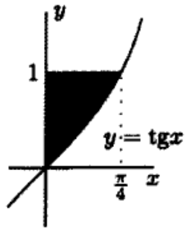
nebo jinak

$$V(\Omega) = \int_0^3 \Big( \underbrace{\int_{\frac{x}{3}}^1 (x^2+y^2)\,dy}_{=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y:=\frac{x}{3}}^{y:=1}=\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3} \Big)\,dx = \int_0^3 \Big(\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3\Big)\,dx = \left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{81}x^4\right]_0^3 = 3.$$

**Příklad 9.8:**
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le x \le \operatorname{arctg} y,\, 0 \le z \le \frac{6x}{1+y^2}\right\}.$$

(1) **řešení:**
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast $\Omega$. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa $\Omega$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál




$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{\operatorname{arctg} y} \big(\underbrace{\int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1\,dz}_{=\frac{6x}{1+y^2}}\big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+y^2} \underbrace{\int_0^{\operatorname{arctg} y} 6x\,dx}_{=[3x^2]_{x:=0}^{x:=\operatorname{arctg} y}=3\operatorname{arctg}^2 y} \Big)\,dy = 3\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 y}{1+y^2}\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+y^2}\cdot(1+y^2)\,dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64},$$

použili jsme substituci $t := \operatorname{arctg} y$, pak $dt = \frac{1}{1+y^2}\,dy$ tedy $dy = (1+y^2)\,dt$, $0 \rightsquigarrow 0$ a $1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4}$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\operatorname{tg} x}^1 \frac{6x}{1+y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\,[\operatorname{arctg} y]_{y:=\operatorname{tg} x}^{y:=1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\,dx = \left[\frac{3}{4}\pi x^2 - 2x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64},$$

neboť $\Omega$ lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ a $\operatorname{tg} x \le y \le 1$.

**Příklad 9.9:**
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 1 \le y \le 2,\, 0 \le x \le \ln y,\, 0 \le z \le \frac{6x}{y}\right\}.$$

# 12 Trojný integrál - Transformace integrálů

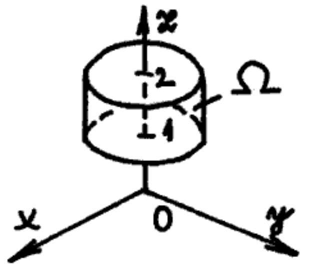
(2a)

**111. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ určený vztahy $1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle 1, 2 \rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.

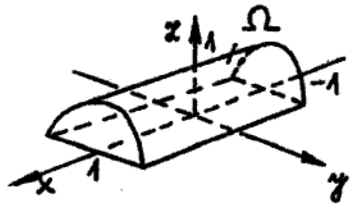



Obrázek 41: $\Omega: 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\varphi) \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^1 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

**112. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$.

**Řešení** Vztahy $-1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou $x$. Viz Obrázek 42.




Obrázek 42: $\Omega: -1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic". Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho \cos\varphi,$$
$$z = \varrho \sin\varphi.$$

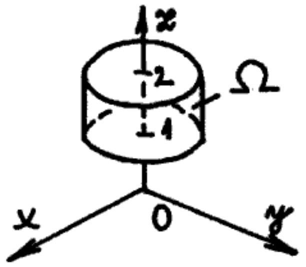
# 12 Trojný integrál - Transformace integrálů

**111. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$ je válec. Viz Obrázek 41. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle 1, 2 \rangle.$$

Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.




Obrázek 41: $\Omega : 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$

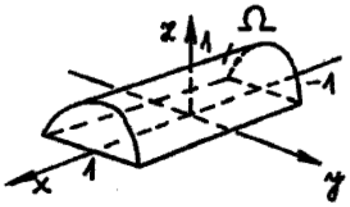
$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

**112. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$.

(2b)

**Řešení** Vztahy $-1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou $x$. Viz Obrázek 42.




Obrázek 42: $\Omega : -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$

Provedeme transformaci do „válcových souřadnic". Transformační rovnice jsou tvaru

$$x = x,$$
$$y = \varrho \cos \varphi,$$
$$z = \varrho \sin \varphi.$$

Jakobián transformace je

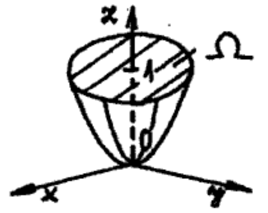
$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

(2b)

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\, \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

**113. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2+y^2 \le z \le 1$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.




Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\, \mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\, [z]_{\varrho^2}^1\, \mathrm{d}\varphi)d\varrho =$$
$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\, \mathrm{d}\varphi)d\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\, [\varphi]_0^{2\pi}\, \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

**114. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

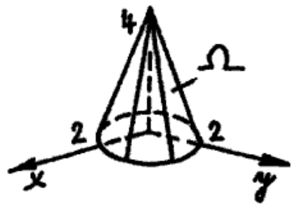
**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.

(2i)

Provedeme transformaci do válcových souřadnic

$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4 - 2\varrho\rangle.$$

(2i)



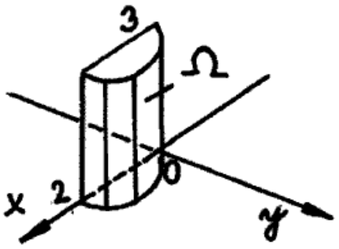

Obrázek 44: $\Omega : 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{4-2\varrho} z\varrho \,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-2\varrho} \varrho \,\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (4-2\varrho)^2 \varrho \,\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho = \pi \int_0^2 (4-2\varrho)^2 \varrho \,\mathrm{d}\varrho = \frac{16}{3}\pi.$$

**115. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2};\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2+y^2-2x = 0$.

**Řešení** Vztah $x^2+y^2 = 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2+y^2 = 1$. Odtud a ze vztahů $z = 0, z = 3, y \leq 0$ plyne, že $\Omega$ je polovina válce. Viz Obrázek 45. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 2\cos\varphi \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$
$$z \in \langle 0, 3 \rangle.$$




Obrázek 45: $\Omega : z = 0, z = 3, y \geq 0, x^2+y^2-2x = 0$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \Big(\int_0^3 z\varrho^2 \,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\varphi} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 \varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 8.$$

(4c)

**A Sphere**

The equation for the outer edge of a sphere of radius $a$ is given by $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. If we want to consider the volume inside, then we are considering the regions $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. We will set up the inequalities in three ways.

1. *In Cartesian Coordinates*: Solving for $z$ gives $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Then the projection of the sphere onto the $xy$-plane (i.e. the equation you get when you have $z = 0$ in the sphere equation) is just the circle $x^2 + y^2 = a^2$. Now we must describe this with inequalities. All together, the solid can be described by the inequalities $-a \leq x \leq a$, $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$, $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. So we can find the volume:

$$\iiint_E 1\, dV = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1\, dz dy dx = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy dx$$

$$= \int_{-a}^{a} 2\frac{1}{2}\pi(a^2 - x^2)\, dx = \pi(2a^3 - \frac{2}{3}a^3) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Note: Same note as I made for the circular cylinder concerning skipped steps in the integration.

2. *In Cylindrical Coordinates*: The bound on $z$ would still be the same, but we would use polar for $x$ and $y$. All together, the solid can be described by $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$, $-\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$. And we get a volume of:

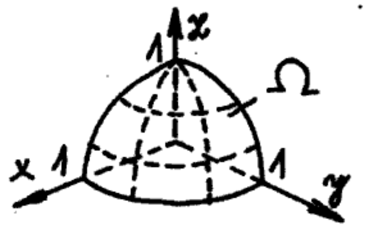
$$\iiint_E 1\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dz dr d\theta = 2\pi \int_0^{a} 2r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{a^2} \sqrt{u}\, du = 2\pi\frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

3. *In Spherical Coordinates*: In spherical coordinates, the sphere is all points where $0 \leq \phi \leq \pi$ (the angle measured down from the positive $z$ axis ranges), $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (just like in polar coordinates), and $0 \leq \rho \leq a$. And we get a volume of:

$$\iiint_E 1\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi = \int_0^{\pi} \sin(\phi)\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} \rho^2 d\rho = (2)(2\pi)\left(\frac{1}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

In all three cases, we see that we get the expected volume formula.



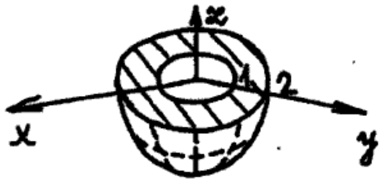

Obrázek 47: $\Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

**118. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, kde $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

(2d)

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena poloprostorem $z \leq 0$ a dvěma sférami. Viz Obrázek 48. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 1, 2\rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle, \\ \vartheta &\in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle. \end{aligned}$$




Obrázek 48: $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\varrho^2 \sin\vartheta \cdot \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta}{(\varrho^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{\varrho^4} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left[\frac{-1}{3\varrho^3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{24} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{7}{12}\pi.$$

**119. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$.

**Řešení** Vztah $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$ upravíme na tvar $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$. Odtud plyne, že $\Omega$ je elipsoid. Elipsoid ztransformuje v kouli. Stačí položit

$$\begin{aligned} x &= 2u, \\ y &= v, \\ z &= 2w. \end{aligned}$$

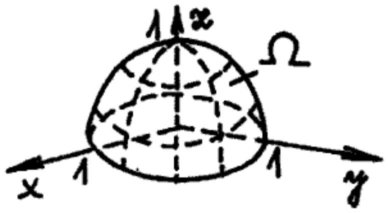
Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

**116. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ je horní polovina koule. Viz Obrázek 46. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, a \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$




Obrázek 46: $\Omega : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} (\varrho \cos\varphi \sin\vartheta)^2 (\varrho\cos\vartheta)(\varrho^2 \sin\vartheta)\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^5 \cos^2\varphi \sin^3\vartheta \cos\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_0^a \varrho^5 \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin\vartheta \\ \mathrm{d}t = \cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta \\ 0 \to 0, \frac{\pi}{2} \to 1 \end{array} \right| = \frac{1}{6}a^6 \cdot \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{6}a^6 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}\pi a^6.$$

**117. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ je osmina koule ležící v prvním oktantu. Viz Obrázek 47. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

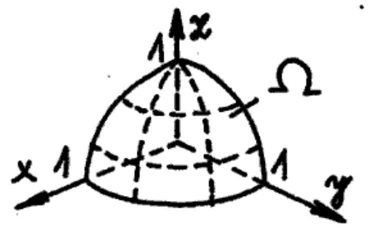
(2e)

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \varrho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \varrho^2\cos^2\vartheta} \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta)\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \underline{\frac{\pi}{8}}.$$

(28)

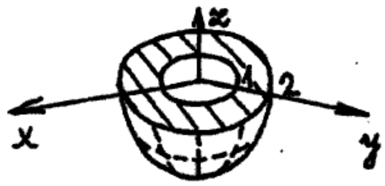



Obrázek 47: $\Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

**118. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, kde $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena poloprostorem $z \leq 0$ a dvěma sférami. Viz Obrázek 48. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 1, 2 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \vartheta &\in \langle \tfrac{\pi}{2}, \pi \rangle. \end{aligned}$$




Obrázek 48: $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\varrho^2 \sin\vartheta \cdot d\varrho d\varphi d\vartheta}{(\varrho^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{\varrho^4} \sin\vartheta \, d\varrho d\varphi d\vartheta = \int_1^2 \frac{d\varrho}{\varrho^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{-1}{3\varrho^3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{24} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{7}{12}\pi.$$

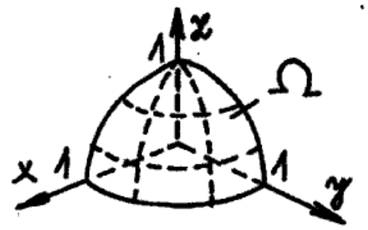
**119. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, kde $\Omega : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$.

**Řešení** Vztah $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$ upravíme na tvar $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$. Odtud plyne, že $\Omega$ je elipsoid. Elipsoid ztransformuje v kouli. Stačí položit

$$\begin{aligned} x &= 2u, \\ y &= v, \\ z &= 2w. \end{aligned}$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

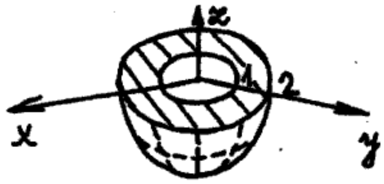



Obrázek 47: $\Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

**118. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, kde $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena poloprostorem $z \leq 0$ a dvěma sférami. Viz Obrázek 48. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle.$$




Obrázek 48: $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\varrho^2 \sin\vartheta \cdot d\varrho d\varphi d\vartheta}{(\varrho^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{\varrho^4} \sin\vartheta \; d\varrho d\varphi d\vartheta = \int_1^2 \frac{d\varrho}{\varrho^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\vartheta =$$
$$= \left[\frac{-1}{3\varrho^3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{24} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{7}{12}\pi.$$

( ) **119. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, kde $\Omega : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$.

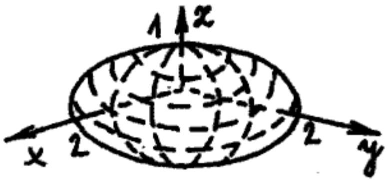
(24)

**Řešení** Vztah $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$ upravíme na tvar $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$. Odtud plyne, že $\Omega$ je elipsoid. Elipsoid ztransformuje v kouli. Stačí položit

$$x = 2u,$$
$$y = v,$$
$$z = 2w.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$




Obrázek 49: $\Omega : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic, která kouli ztransformuje v kvádr, tj. trojrozměrný interval. Viz Obrázek 49.

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} 4\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 4 \iiint\limits_{\Omega^{**}} \varrho^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = 4 \int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 4 \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{16}{3}\pi.$$

**120. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

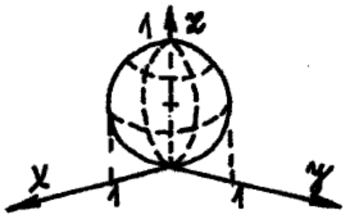
**Řešení** Vztah $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ upravíme na tvar $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$. Odtud plyne, že $\Omega$ je koule se středem v bodě $[0, 0, \frac{1}{2}]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Provedeme transformaci, která posune střed koule do počátku. Stačí položit

$$x = u,$$
$$y = v,$$
$$z = w + \frac{1}{2}.$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dále provedeme transformaci do sférických souřadnic, která ztransformujeme kouli v kvádr. Viz Obrázek 50.




Obrázek 50: $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{u^2 + v^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \iiint\limits_{\Omega^{**}} \varrho \sin\vartheta \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

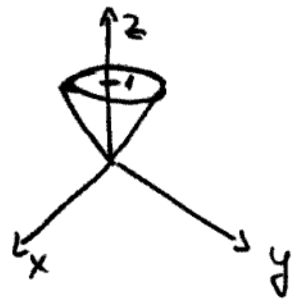
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \varrho^3 \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{1}{64} \cdot 2\pi \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{1}{64}\pi^2.$$

(2g) $\int z\,d\lambda$ $\qquad x^2+y^2 \le z^2 \le 1 \qquad z \ge 0$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$z = z$




$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{z} z\cdot r \; dr\,dz\,d\alpha$$

$r^2 \le z^2 \le 1 \qquad z \in [0,1]$

$r \in [0,z] \qquad \alpha \in [0,2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} z\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{z} dz\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \tfrac{1}{2} z^3 \, dz\,d\alpha = 2\pi\left[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}z^4\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

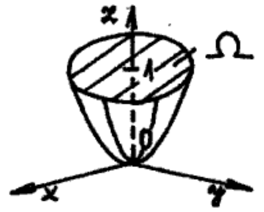
Jakobián transformace je

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi = [x]_{-1}^{1} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi.$$

**113. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz Obrázek 43.




Obrázek 43: $\Omega : x^2 + y^2 \le z \le 1$

Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle \varrho^2, 1\rangle.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{\varrho^2}^1 \varrho^2\,\mathrm{d}z)\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2\,[z]_{\varrho^2}^1\,\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \varrho^2(1-\varrho^2)\,\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \varrho^2(1-\varrho^2)\,[\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \underline{\frac{4}{15}\pi}.$$

**114. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 44.
Provedeme transformaci do válcových souřadnic

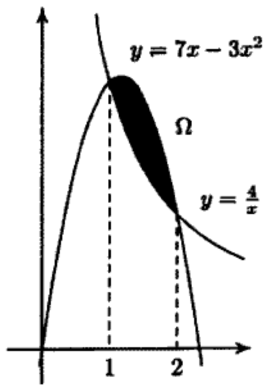
$$\varrho \in \langle 0, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 4 - 2\varrho\rangle.$$

## 9. Objem pomocí trojného integrálu

**Příklad 9.1:**
Vypočítejte obsah rovinného obrazce

$$\Omega = \left\{ [x, y]; \frac{4}{x} \le y \le 7x - 3x^2 \right\} .$$

**řešení:**
Obsah budeme počítat dvojným integrálem z jedničky přes oblast $\Omega$. Nejprve si tuto oblast nakreslíme. Její dolní „okraj" je popsán rovnicí hyperboly $y = \frac{4}{x}$ a horní „okraj" parabolou $y = 7x - 3x^2$. Vypočítáme průsečíky obou křivek, přičemž dostaneme kubickou rovnici




$$\frac{4}{x} = 7x - 3x^2 \qquad\qquad 3x^3 - 7x^2 + 4 = 0 ,$$

kterou obecně neumíme řešit (užívají se tzv. Cardanovy vzorce). V našem případě si uvědomíme, že jeden z kořenů bude jistě 1, proto můžeme polynom levé strany rovnice postupně rozložit

$$3x^3 - 7x^2 + 4 = (x-1)(3x^2 - 4x - 4) = (x-1)(x-2)(3x+2)$$

a získáme kořeny 1, 2 a $\frac{2}{3}$. Dvojný integrál pak převedeme pomocí Fubiniovy věty na dvojnásobný

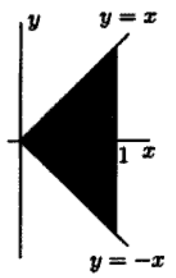
$$P(\Omega) = \iint_\Omega 1\,dx\,dy = \int_1^2 (\underbrace{\int_{\frac{4}{x}}^{7x-3x^2} 1\,dy}_{=7x-3x^2-\frac{4}{x}})\,dx = \int_1^2 (7x - 3x^2 - \frac{4}{x})\,dx = \left[\frac{7}{2}x^2 - x^3 - 4\ln x\right]_1^2 = \frac{7}{2} - 4\ln 2 .$$

(2j)

**Příklad 9.2:**
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z]; 0 \le x \le 1, |y| \le x, 0 \le z \le xy^2 \right\} .$$

**řešení:**
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast $\Omega$. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa $\Omega$, přičemž podmínku $|y| \le x$ přepíšeme na $-x \le y \le x$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál




$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 (\int_{-x}^{x} (\underbrace{\int_0^{xy^2} 1\,dz}_{xy^2})\,dy)\,dx =$$

$$= \int_0^1 ( \underbrace{\int_{-x}^{x} xy^2\,dy}_{\left[x\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=x} = \frac{2}{3}x^4} )\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15} .$$

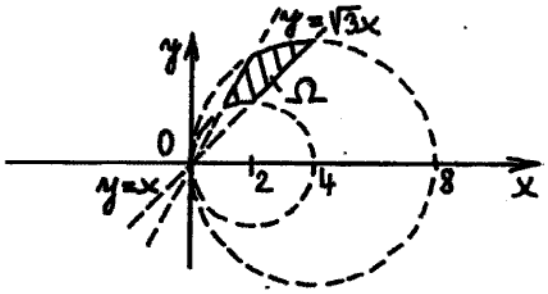
**Příklad 9.3:**
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z]; 0 \le y \le 1, x^2 \le y, 0 \le z \le x^2 + y \right\} .$$

# 13 Aplikace vícerozměrných integrálů

**121. Příklad** Spočtěte obsah rovinného obrazce $M$ ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

**Řešení** Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.




Obrázek 51: $M$: $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce $M$ určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože $\Omega$ je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \le \varrho \le 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\varrho^2\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

3

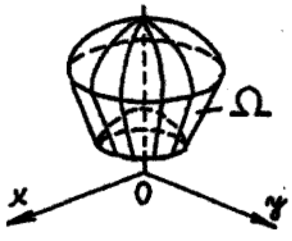
**122. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahy $x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3}\cdot 2\pi \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$



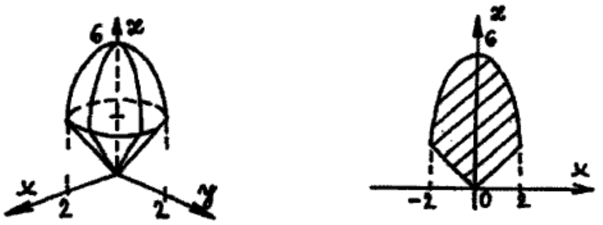

Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

(4) **123. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahem $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - (x^2+y^2)$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2+y^2} = 6 - (x^2+y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z-2)(z+3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$
\begin{gathered}
\varrho \in \langle 0, 2 \rangle, \\
\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \\
z \in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle.
\end{gathered}
$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.




Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - (x^2+y^2)$

$$
\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big( \int_0^{2\pi} \Big( \int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho \, \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \Big( \int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\varrho =
$$

$$
= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3) \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[ 3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4 \right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}}.
$$

**124. Příklad** Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x,y) \geq 0$.

**Řešení** Velikost povrchu $S$ paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M$ je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$
\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,
$$

(5) **126. Příklad** Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

**Řešení** Střed krychle $\Omega$ umístíme do počátku systému souřadnic. Tedy $\Omega = \langle -a, a\rangle^3$. Dále nalezneme funkci hustoty $\varrho(x,y,z)$. Vzdálenost bodu $a = [x,y,z]$ od počátku je dán vztahem $d(a,o) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Odtud plyne $\varrho(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého vrcholu. Platí $\varrho(a,a,a) = k(a^2+a^2+a^2)$. Tedy $k = \frac{1}{3a^2}$. Celkem $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)$. Vzhledem k symetrii tělesa i funkce lze integrovat pouze přes první oktant $\Omega_1$. Konečně hmotnost tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3a^2}\iiint\limits_{\Omega_1} x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{8}{3a^2}\int_0^a\left(\int_0^a(\int_0^a x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3a^2}\int_0^a\left(\int_0^a\left[x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3\right]_0^a\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{8}{3a}\int_0^a\left(\int_0^a(x^2+y^2+\frac{1}{3}a^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\int_0^a(x^2+\frac{2}{3}a^2)\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{8}{3}a^3}.$$

(6) **127. Příklad** Určete hmotnost koule o poloměru $a$. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

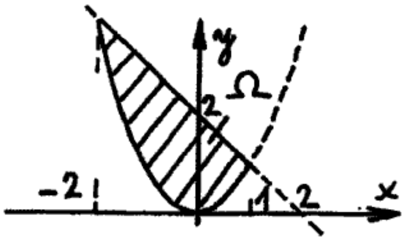
**Řešení** Střed koule $\Omega$ umístíme do počátku systému souřadnic. Nalezneme funkci hustoty $\varrho(x,y,z)$. Platí $\varrho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého bodu na povrchu koule. Například bodu $[a,0,0]$. Platí $\varrho(a,0,0) = ka$. Odtud $k = \frac{1}{a}$. Celkem $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hmotnost tělesa $\Omega$ určíme opět ze vztahu $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega}\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Je výhodné provést transformaci do sférických souřadnic. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega_*}\varrho^3\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a\varrho^3\mathrm{d}\varrho\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{4}\varrho\right]_0^a\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\cdot[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi\cdot 2 = \underline{\pi a^3}.$$

(7) **128. Příklad** Určete těžiště rovinného obrazce $M$, který je ohraničen křivkami $y = x^2, x+y = 2$. Hustota obrazce je konstantní a je rovna 1.

**Řešení** Těžiště $T$ rovinného obrazce $M$ určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_x(M)}{m(M)}, \frac{S_y(M)}{m(M)}\right]$. Obrazec zapíšeme jako oblast typu $(x,y)$. Řešením rovnice $x^2 = 2-x$ dostáváme $(x-1)(x+2) = 0$ a odtud $x = -2, x = 1$. Platí tedy $-2 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 2-x$. Viz Obrázek 55.




Obrázek 55:

(7)

$$m(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

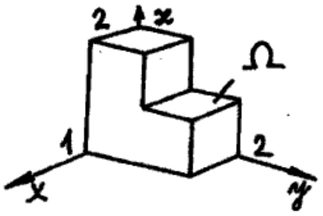
$$S_x(M) = \iint\limits_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(2-x)^2 - x^4\mathrm{d}x = \left[2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5\right]_{-2}^{1} = \frac{36}{5}.$$

$$S_y(M) = \iint\limits_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}x(2-x-x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{1} = -\frac{9}{4}.$$

Odtud plyne, že $T = \left[-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right]$.

(8) **129. Příklad** Určete těžiště tělesa $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ s konstantní hustotou, kde $\Omega_1 = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$ a $\Omega_2 = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

**Řešení** Těžiště $T$ tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}\right]$. Viz Obrázek 56. Je-li hustota $\varrho(x,y,z) = c$, pak zřejmě $m(\Omega) = 3c$.




Obrázek 56:

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_1} cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^2 z\,\mathrm{d}z + c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^1 z\,\mathrm{d}z = \frac{5}{2}c.$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_1} cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 y\mathrm{d}y \int_0^2 \mathrm{d}z + c\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 y\mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z = \frac{5}{2}c.$$

$$S_{yz}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_1} cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^2 \mathrm{d}z + c\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z = \frac{3}{2}c.$$

Odtud plyne, že $T = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

(9)

**130. Příklad** Určete moment setrvačnosti elipsoidu $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ vzhledem k ose $y$.

**Řešení** Moment setrvačnosti tělesa $\Omega$ vzhledem k ose $y$ určíme ze vztahu

$$I_y(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} x^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Provedeme transformaci do zobecněných sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned} x&=a\varrho\cos\varphi\sin\vartheta,\\ y&=b\varrho\sin\varphi\sin\vartheta,\\ z&=c\varrho\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Jakobián transformace je $J=-abc\varrho^2\sin\vartheta$. Přitom $\varrho\in\langle 0,1\rangle, \varphi\in\langle 0,\pi\rangle, \vartheta\in\langle 0,\pi\rangle$.

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a^3bc\iiint\limits_{\Omega^*}\varrho^4\cos^2\varphi\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta+$$

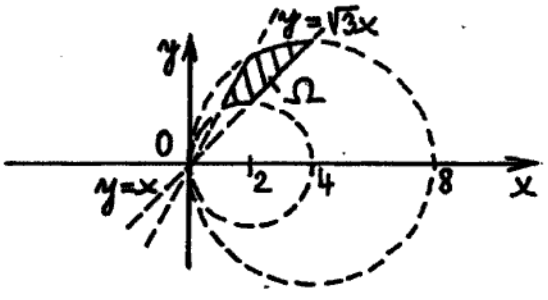
$$+abc^3\iiint\limits_{\Omega^*}\varrho^4\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta=a^3bc\int_0^1\varrho^4\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\mathrm{d}\vartheta+$$

$$+abc^3\int_0^1\varrho^4\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta=\frac{4}{15}\pi a^3bc+\frac{4}{15}\pi abc^3=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+c^2).$$

## 13 Aplikace vícerozměrných integrálů

(10) **121. Příklad** Spočtěte obsah rovinného obrazce $M$ ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

**Řešení** Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.




Obrázek 51: $M$: $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce $M$ určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože $\Omega$ je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \le \varrho \le 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\varrho^2\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \underline{\pi + 3\sqrt{3} - 6}.$$

**122. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahy $x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

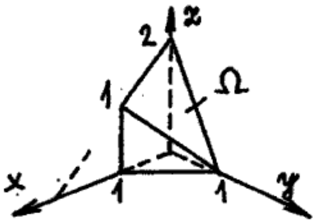
$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3}\cdot 2\pi \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$

**93. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} xy + z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, x + 2y + z = 2$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ je jehlan. Viz Obrázek 23. Oblast $\Omega$ je libovolného typu. Lze zvolit tedy typ $(x, y, z)$. Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 2 - x - 2y\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.



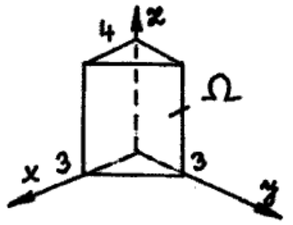

Obrázek 23: $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, x + 2y + z = 2$

$$\iiint\limits_{\Omega} xy + z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{2-x-2y} xy + z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left[ xyz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-2y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} xy(2 - x - 2y) + \frac{1}{2}(2 - x - 2y)^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{13}{40}.$$

(11) **94. Příklad** Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{z+4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega: x = 0, y = 0, 0 \le z \le 4, x + y = 3$.

**Řešení** Integrační obor $\Omega$ je hranol. Viz Obrázek 24. Obor $\Omega$ zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu $(x, y, z)$. Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x, 0 \le z \le 4\}$.




Obrázek 24: $\Omega: x = 0, y = 0, 0 \le z \le 4, x + y = 3$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{z+4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \left( \int_0^{3-x} \left( \int_0^4 \frac{x+y}{z+4} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^3 \left( \int_0^{3-x} \left[ (x+y) \ln|z+4| \right]_0^4 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \ln 2 \int_0^3 \left( \int_0^{3-x} (x+y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \ln 2 \int_0^3 \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{3-x} \mathrm{d}x = \ln 2 \int_0^3 x(3-x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 \mathrm{d}x = 9 \ln 2.$$

12. Přiřaďte rovnici obrázku.

2 (a) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2+y^2 \leq 1\}$

12 (b) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z^2; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4; z \geq 0\}$

4 (c) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$

6 (d) Ohraničeno plochami $z=0$, $z=3$, $x^2+y^2-2x=0$ a navíc $y \geq 0$

7 (e) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1; z \geq 0\}$

5 (f) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4-2\sqrt{x^2+y^2}\}$

9 (g) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \ngeq 0\}$ $z \leq 0$

10 (h) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+4y^2+z^2 \leq 4\}$

11 (i) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq z\}$

8 (j) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)\}$

1 (k) $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$ a $M_2 = [0,1] \times [1,2] \times [0,1]$

3 (l) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; z \geq 0; y^2+z^2 \leq 1\}$