

6. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I* , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu). Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu). Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .

Poznámka 4. 1. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f .

2. $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

3. Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f + g) = \int f + \int g$.

Příklady 5. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $(\frac{1}{a}F(ax + b) + C)' = f(ax + b)$, pokud $a \neq 0$.

Příklady

Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

1. $f(x) = (1 + \sin x + \cos x)$

8. $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha)$

2. $f(x) = (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)$

9. $f(x) = \frac{1}{x + A}$

3. $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$

10. $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$

4. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$

11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$

12. $f(x) = (2x - 3)^{10}$

6. $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$

13. $f(x) = \cotg^2 x$

7. $f(x) = (3 - x^2)^3$

14. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

$$15. f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$16. f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$$

$$17. f(x) = \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right), a \in \mathbb{R}$$

$$18. f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}$$

$$19. f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$20. f(x) = (2^x + 3^x)^2$$

$$21. f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$$

$$22. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$$