Numerická a výpočtová matematika
Navazující magisterské studium - SZZ

Tento dokument shrnuje vše podstatné kolem státních závěrečných zkoušek v navazujícím magisterském studiu v programu Numerická a výpočtová matematika. Státní závěrečná zkouška se sestává ze dvou částí:

- Obhajoba diplomové práce
- Ústní část

Obhajoba diplomové práce

Nejprve proběhnou obhajoby diplomových prací. Každý student přednese referát o své práci v délce přibližně 15 minut, a to buď z vlastního notebooku, anebo zašle svou prezentaci předsedovi komise. Prezentace budou probíhat podle abecedního pořádku. Po každé prezentaci budou přečteny posudky vedoucího a oponenta s tím, že se student vyjádří k jejich dotazům či připomínkám. Pak bude všeobecná diskuse, po níž následuje neveřejné zasedání komise. Její předseda pak sdělí studentovi známku.

Ústní část

Po obhajobách následuje ústní zkouška. Student dostane tři otázky vybrané z pěti níže uvedených okruhů (každá otázka z jiného okruhu). Obsah těchto okruhů pokrývají povinné předměty, které jsou u každého okruhu uvedené. Student dostane 45 minut na přípravu všech tří otázek. Následně proběhne v lavici zkoušení dvojicí zkoušejících z každé otázky, a to přibližně 20 minut na otázku. Po vyzkoušení všech otázek následuje neveřejná porada komise, po níž je studentům sdělena známka.

Účelem není prokázat detailní technické znalosti, kompletní důkazy, apod. To studenti již prokázali u zkoušek z jednotlivých předmětů. Zde mají studenti prokázat širší přehled, pochopení základních myšlenek a úvah, širšího kontextu a souvislostí s jinými oblastmi. Seznam témat je přiložen níže.

1. Parciální diferenciální rovnice

- NMMA405 - Parciální diferenciální rovnice 1,
- NMNV401 - Funkcionální analýza,
- NMNV406 - Nelineární diferenciální rovnice

Sobolevovy prostory: Slabá derivace, Sobolevovy prostory - definice a základní vlastnosti (reflexivita, hustota hladkých funkcí). Věta o stopách, věty o spojitém a kompaktním vnoření. Poincarého věta.

Lineární eliptické rovnice: Formulace slabé úlohy pro lineární eliptickou rovnici s různými okrajovými podmínkami, elipticita, Lax-Milgramova věta. Ekvivalence úlohy s minimalizací kvadratického funkcionálu. Regularita řešení.

Lineární evoluční rovnice: Bochnerovy prostory – definice, duály, slabá časová derivace. Slabá formulace parabolické a hyperbolické rovnice druhého řádu. Základní myšlenka existence a jednoznačnosti řešení pomocí Galerkinovy aproximace.

Funkcionální analýza: Spektrální analýza symetrických lineárních operátorů v Hilbertových prostorech. Kompaktní symetrické operátory (spektrální vlastnosti, vyjádření ve tvaru řady, rozklad identity). Spektrální analýza spojitých lineárních operátorů v Banachových prostorech (otevřenost rezolventní množiny, rezolventní operátor ve tvaru řady a jeho derivace).

Nelineární diferenciální rovnice: Monotónní, koercivní a potenciální operátory, základy teorie existence a jednoznačnosti řešení. Němyckého operátory. Aplikace na parciální diferenciální rovnice v divergenčním tvaru.

2. Metoda konečných prvků

- NMNV405 - Metoda konečných prvků 1
- NMNV406 - Nelineární diferenciální rovnice

Teorie konečných prvků: Galerkinova metoda pro řešení lineární eliptické rovnice, Céovo lemma. Definice abstraktního konečného prvku, jednoduché příklady konečných prvků Lagrangeova a Hermiteova typu. Afinní ekvivalence. Teorie aproximací v Sobolevových prostorech: aproximační vlastnosti operátorů zachovávajících polynomy, Bramble-Hilbertovo lemma.

Aplikace na lineární eliptické rovnice: Odhad chyby metody konečných prvků v H^1 a L^2 normě, Aubin-Nitscheho lemma. Nehomogenní okrajové podmínky.

Aplikace na nelineární rovnice: Aplikace metody konečných prvků na řešení nelineárních rovnic v divergenčním tvaru.

3. Numerická lineární algebra

- NMNV411 - Algoritmy maticových iteračních metod,
- NMNV412 - Analýza maticových iteračních metod – principy a souvislosti

Principy a algoritmy: Krylovovy podprostory a projekční proces, metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic se symetrickou maticí (CG, MINRES, SYMMLQ) a nesymetrickou maticí (GMRES, FOM, BiCG). Metody pro řešení problému nejmenších čtverců (CGLS, LSQR).

Analýza a souvislosti: Konvergenční chování metod pro symetrické, normální a obecné matice. Vliv aritmetiky s konečnou přesností. Zastavovací kritéria. Projekční proces a problém momentů. Souvislosti s ortogonálními polynomy a Gauss-Christoffelovou kvadraturou. Sdružené gradienty pro funkcionální rovnice v Hilbertových prostorech.

4. Adaptivní diskretizační metody

- NMNV403 - Numerický software 1

Adaptivní metody numerické integrace, odhad chyby metodou polovičního kroku, Gauss-Kronrodovy kvadraturní vzorce, lokální a globální adaptivní strategie.

Adaptivní metody pro obyčejné diferenciální rovnice, globální a lokální chyby, odhady lokální chyby, Runge-Kutta-Fehlbergovy metody, adaptivní volba časového kroku.

5. Numerické metody optimalizace

- NMNV503 - Numerické metody optimalizace 1

Nelineární rovnice a jejich soustavy: Iterace funkcí, řád konvergence, podmínky pro konvergenci k pevnému bodu a podmínky pro vyšší řády konvergence. Newtonova metoda, Kantorovičova věta o lokální konvergenci. Aproximace derivace v Newtonově metodě, metoda sečen, konvergenční věta (bez důkazu). Kvazinewtonovské metody (Broyden), konstrukce a vlastnosti. Kontinuační (homotopické) metody, základní myšlenka.

Minimalizace funkcionálu: Myšlenka metod spádových směrů, úloha hledání vhodné aproximace v daném směru (Armijovy a Wolfeho podmínky), metoda největšího spádu, Newtonova metoda, metody sdružených směrů a nelineární metoda sdružených gradientů, kvazi-newtonovské metody. Myšlenka metod důvěryhodné oblasti, úloha hledání vhodné aproximace na důvěryhodné oblasti pomocí dogleg strategie či pomocí Steihaug verze metody sdružených gradientů. Věty o konvergenci uvažovaných metod (bez důkazů).