Sada 5

Příklad 1. Spočtěte následující limity za znalosti $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$:

(a) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{100+2n})^n$,

(c) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$,

(d) $\lim_{n\to\infty}(49/50+\frac{1}{7n})^n$.

Příklad 2. Limita posloupnosti zkoušková obtížnost:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3+n^2} - n\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}+1} - \sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}\right) \frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b}\right) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}, a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{100} - (n+2)^{200} + 400n^{199}}{1+2+\ldots+n^{99}}$

Příklad 3. Limita posloupnosti zkoušková obtížnost:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt[3]{n^3+1}\rfloor - \lfloor\sqrt[3]{n^3-1}\rfloor}{\sqrt[n]{1+2^n+\ldots+n^n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\rfloor$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2 n} - \sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100}+n^{99}-1} - \sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^4+\sqrt[3]{n}} - \sqrt[3]{n^4})(\lfloor\sqrt[3]{n+1}\rfloor + \lfloor 2\sqrt[3]{n-1}\rfloor + \ldots + \lfloor n \cdot \sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}}\rfloor)$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor 2\sqrt{n}\rfloor + \ldots + \lfloor n\sqrt{n}\rfloor}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt[3]{n^3+2n}}$

Příklad 4 (Pro echt fajnšmekry - Hausdorffova míra úsečky)**.** Uvažujme rovinu $\mathbb{R}^2$. Označme S úsečku spojující bod $(0,0)$ a bod $(1,0)$. Označme $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq r\}$ (kruh se středem v x a poloměrem r). Pro $k, n \in \mathbb{N}$ položme

$$H^k_{1/n}(S) = \inf\left\{\sum_{i=1}^N (2r_i)^k : S \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i), x_i \in \mathbb{R}^2, 2r_i < \frac{1}{n}, N \in \mathbb{N}\right\}.$$

Spočtěte $\mathcal{H}^1(S) = \lim_{n\to\infty} H^1_{1/n}(S)$ a $\mathcal{H}^2(S) = \lim_{n\to\infty} H^2_{1/n}(S)$.

Sada 5 - výsledky

Příklad 1

(a) $\frac{1}{e}$,

(b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$,

(c) 1,

(d) 0.

Příklad 2

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $(a-b)\cdot 6^{-\frac{2}{3}}$

(d) -159000

Příklad 3

(a) 0,

(b) 0,

(c) 1/2,

(d) -700,

(e) 1/6,

(f) 2,

Příklad 4 $\mathcal{H}^1(S) = 1$ (délka úsečky S) a $\mathcal{H}^2(S) = 0$ ("obsah"úsečky S)

Sada 5 - řešení

Použití Heineho věty

Tvrzení 5 (Heineho věta)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $x \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je spojitá v bodě x,

(ii) pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Chceme spočítat limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n}$. Nejdříve spočteme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Aby původní limita dávála smysl, musí platit $x \geq 0$. Použijeme implikaci $(i) \implies (ii)$ pro $f(x) = \sqrt{x}$ posloupnost (x_n). Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}.$$

Příklad 2 a.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3+n^2} - n\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - n\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}}\right)}{2^n\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^{n^2}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2} - n\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^{n^2}}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3+n^2}\cdot n\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}} + n^2\sqrt[3]{(1+\frac{1}{8^n})^2}}{\sqrt[3]{\left(n^3+n^2\right)^2} + \sqrt[3]{n^3+n^2}\cdot n\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}} + n^2\sqrt[3]{(1+\frac{1}{8^n})^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3+\frac{n^3}{8^n}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^{n^2}}}\cdot n^2\cdot\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{8^n})^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{n}{8^n}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^{n^2}}}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{8^n})^2}\right)} \overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{3}$$

Poslední rovnost jsme získali díky opakovénu použití věty o dvou strážnících na výrazy

$$c_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^{n^2}}},$$

$$d_n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{8^n})^2}.$$

Pak máme

$$\sqrt[n]{1} \leq c_n \leq \sqrt[n]{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Dále máme

$$\sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{(1)^2} \leq d_n \leq 3\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{(1)^2} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 3$$

Příklad 2 b.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}+1}-\sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}\right)\frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}+1-(n^2+2\sqrt{n}+3)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}+1}+\sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}}\frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}-2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}+1}+\sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}}\frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}\frac{-1-\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n}}}\frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\\
&\overset{\text{AL, spoj.}}{=}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}\frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\overset{\text{AL}}{=}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^n+n}}{n}=(*)
\end{aligned}$$

Platí

$$\sqrt{n}-1\le\lfloor\sqrt{n}\rfloor\le\left\lfloor\sqrt{n+2}\right\rfloor\le\sqrt{n+2},$$

a tedy

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}\le\frac{\sqrt{n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}\le\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}.$$

Zároveň

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\overset{\text{AL, spoj.}}{=}1$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\overset{\text{AL, RŠ}}{=}1.$$

Z Věty o dvou policajtech pak platí $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\lfloor\sqrt{n+2}\rfloor}=1$. Dále platí

$$1=\frac{\sqrt[n]{n^n}}{n}\le\frac{\sqrt[n]{n^n+n}}{n}\le\frac{\sqrt[n]{2n^n}}{n}=\sqrt[n]{2}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}1=1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}.$$

Opět použitím Věty o dvou policajtech dostáváme

$$(*)=-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=-\frac{1}{2}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 c.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n+a}-\sqrt[3]{2n+b}\right)\cdot\sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}\left(\sqrt[3]{2n+a}-\sqrt[3]{2n+b}\right)\cdot\frac{(\sqrt[3]{2n+a})^2+\sqrt[3]{2n+a}\cdot\sqrt[3]{2n+b}+(\sqrt[3]{2n+b})^2}{(\sqrt[3]{2n+a})^2+\sqrt[3]{2n+a}\cdot\sqrt[3]{2n+b}+(\sqrt[3]{2n+b})^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{((2n+a)-(2n+b))\cdot\sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}}{(\sqrt[3]{2n+a})^2+\sqrt[3]{2n+a}\cdot\sqrt[3]{2n+b}+(\sqrt[3]{2n+b})^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}}{(n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2+\frac{a}{n}})^2+\sqrt[3]{2+\frac{a}{n}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{b}{n}}+(\sqrt[3]{2+\frac{b}{n}})^2}\overset{\text{VoAL}}{=}\frac{(a-b)\cdot\sqrt[3]{3}}{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=(a-b)\cdot 6^{-\frac{2}{3}}$$

Použili jsme vzorec $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+A^2B^{n-3}+AB^{n-2}+B^{n-1})$.

Příklad 2 d. Pro $k\in\mathbb{N}$ označme $P_{\leq k}(n)$ polynom proměnné n stupně nejvýše k.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^{100}-(n+2)^{200}+400n^{199}}{1+2+\ldots+n^{99}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{200}+100n^{198}+P_{\leq 196}(n)-n^{200}-400n^{199}-4\cdot\binom{200}{2}n^{198}-P_{\leq 197}(n)+400n^{198}}{\frac{n^{99}(n^{99}+1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{198}(100-79600+\frac{P_{\leq 197}(n)}{n^{198}})}{n^{198}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n^{99}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{100-79600+\frac{P_{\leq 197}(n)}{n^{198}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^{99}}}\overset{\text{AL}}{=}-159000.$$

Příklad 3

Vzorové řešení doc. Johanise.