

Sada 2

Výroková logika

Příklad 1. Dokažte, že výroky jsou ekvivalentní:

- (a) A a $\neg(\neg A)$,
- (b) $A \implies B$ a $\neg B \implies \neg A$,
- (c) $\neg(A \implies B)$ a $A \wedge \neg B$,
- (d) $A \implies B$ a $\neg A \vee B$.

Příklad 2. Dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

- (a) $A \vee (\neg A)$,
- (b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \implies (A \Rightarrow C)$.

Příklad 3. Dokažte, že výroky $A \implies B$ a $\neg(A) \implies \neg(B)$ nejsou ekvivalentní.

Příklad 4. Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

- (a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} : z > x \implies z > y$,
- (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0 \implies x \cdot y \geq 0$,
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$,
- (d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$,
- (e) $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : n < x$,
- (f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} : q \leq x \wedge x < q + 1$.

Příklad 5. Nechť L je množina všech lidí, K množina všech knih, $V(c, k)$ je výroková forma "Člověk c vlastní knihu k " a $C(c, k)$ je výroková forma "Člověk c čte knihu k ". Zapište symbolicky

- (a) Každý čte pouze svoje knihy.
- (b) Každou knihu vlastní nějaký člověk.
- (c) Každou knihu čte nejvýše jeden člověk.
- (d) Každý člověk čte nejvýše jednu knihu.
- (e) Existuje kniha, kterou někdo čte.
- (f) Existuje člověk, který čte nějakou knihu.
- (g) Existuje člověk, který čte cizí knihu.

Příklad 6. Nechť A, B jsou množiny. Dokažte následující tvrzení.

- (a) $\emptyset \subset A$,
- (b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$,
- (c) $((A \cup B) = A) \iff B \subset A$,
- (d) $((A \cap B) = A) \iff A \subset B$.

Zobrazení

Příklad 7. Nechť $A = [0, 1]$ a $B = [0, 2]$. Určete, které z následujících množin jsou grafem nějakého zobrazení z A do B :

- (a) $M_1 = \{(x, y) \in A \times B : x^2 + y^2 = 1\},$
- (b) $M_2 = \{(x, y) \in A \times B : y = x^2 + 1\},$
- (c) $M_3 = \{(x, y) \in A \times B : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}.$

Příklad 8. Nechť $f: A \rightarrow B$ je zobrazení, $X, Y \subset A$ a $U, V, U_\alpha \subset B$, $\alpha \in I$. Platí následující tvrzení? Platí jen některé inkluze?

- (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$
- (b) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y),$
- (c) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha),$
- (d) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha),$
- (e) $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y),$
- (f) $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V).$

Indukce

Příklad 9. Dokažte následující tvrzení pomocí indukce:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n < 2^n,$
- (b) $\forall a, b \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$
- (c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$
- (d) Nechť $x_1, x_2, \dots \in [0, 1]$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje podinterval $[0, 1]$ o délce 2^{-n} , který obsahuje nekonečně mnoho hodnot $x_1, x_2, \dots$.

Navíc

Příklad 10. Nechť A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

- (a) $A \cap B^c,$
- (b) $(A \cup B)^c,$
- (c) $(A \cap B) \setminus C,$
- (d) $B \setminus (A \setminus C),$
- (e) $A \cap (B^c \cup C),$
- (f) $A^c \cap B^c \cap C.$

Příklad 11. Dokažte, že skládání zobrazení je asociativní, ale není komutativní.

Příklad 12. Nalezněte zobrazení která zobrazují

- (a) $(0, 1)$ na $(0, \infty),$
- (b) $[0, 1]$ prostě na $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b,$
- (c) $(0, 1]$ na $(0, \infty),$
- (d) $(0, 1)$ na $[0, 1),$
- (e) $(0, 1)$ prostě na $[0, 1).$

Sada 2 - výsledky

Příklad 4 (a) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} : z > x \wedge z \leq y$. Platí původní výrok, stačí položit $y = x$.

(b) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0 \wedge x \cdot y < 0$. Platí negace, stačí vzít $x = 3, y = -2$.

(c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$. Platí negace. Vezměme $x = 0$. Pak pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $x \cdot y = 0$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$. Platí původní výrok: Volme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a položíme $y = \frac{1}{x}$. Pak $x \cdot y = 1$.

(e) $\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{R} : n \geq x$. Platí negace: Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a položíme $x = n$.

(f) $\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} : x < q \vee x \geq q + 1$. Platí původní výrok: stačí položit $q = [x]$.

Příklad 5

(a) $\forall c \in L \forall k \in K : C(c, k) \implies V(c, k)$

(b) $\forall k \in K \exists c \in L : V(c, k)$

(c) $\forall k \in K \forall c_1, c_2 \in L : (C(c_1, k) \wedge C(c_2, k)) \implies c_1 = c_2$

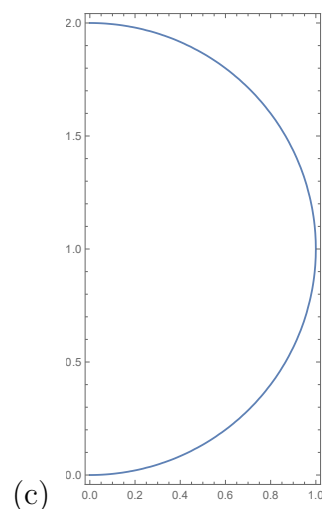
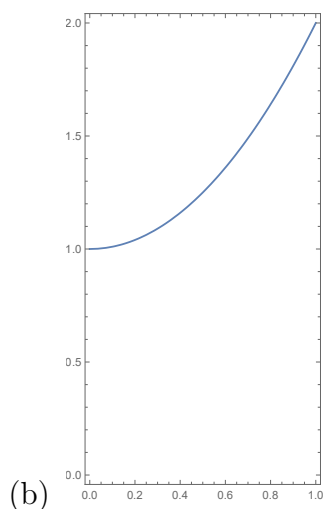
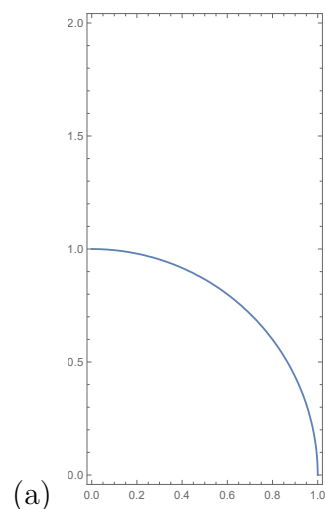
(d) $\forall c \in L \forall k_1, k_2 \in K : (C(c, k_1) \wedge C(c, k_2)) \implies k_1 = k_2$

(e) $\exists k \in K \exists c \in L : C(c, k)$

(f) $\exists c \in L \exists k \in K : C(c, k)$

(g) $\exists c_1, c_2 \in L \exists k \in K : V(c_1, k) \wedge C(c_2, k) \wedge c_1 \neq c_2$

Příklad 7



Příklad 8

(a) Ano.

(d) Ano.

(b) Platí pouze $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

(e) Platí pouze $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$.

(c) Ano.

(f) Ano.

Sada 2 - řešení

Příklad 1 (a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
0	1	0
1	0	1

(b)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg B \implies \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

(c)

A	B	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg(A \implies B)$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

(d)

A	B	$\neg A$	$A \implies B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Příklad 2 (a)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

Příklad 6 (a) Platí triviálně, prázdné tvrzení; chceme ukázat, že $\forall x: x \in \emptyset \implies x \in A$. Vezměme tedy nějaké x . Pak ale $x \notin \emptyset$, a tudíž implikace platí, neboť nepravda implikuje pravdu.

(b) Ukážeme platnost dvou inkluzí:

" $\subset$ ": Necht' $x \in A \cup B$. Pokud $x \in A$, tak tím spíš $x \in A \cup (B \setminus A)$. Pokud $x \notin A$, tak $x \in B \setminus A$, a tedy $x \in A \cup (B \setminus A)$.

" $\supset$ ": Necht' $x \in A \cup (B \setminus A)$. Pokud $x \in A$, tak zřejmě $x \in A \cup B$. Pokud $x \in B \setminus A$, tak speciálně $x \in B \subset A \cup B$.

(c) " $\Rightarrow$ ": Je $B \subset A \cup B = A$.

" $\Leftarrow$ ": Je $A \subset A \cup B \subset A \cup A = A$ a tedy $A = A \cup B$.

(d) Dokáže se analogicky jako (c).

Příklad 8 (a) Ano: ukážeme platnost dvou inkluzí:

" $\subset$ ": Necht' $y \in f(X \cup Y)$. Pak existuje $x \in X \cup Y$ takové, že $f(x) = y$. Toto x musí ležet buď v X nebo v Y . Každopádně $y \in f(X) \cup f(Y)$.

" $\supset$ ": Necht' $y \in f(X) \cup f(Y)$. Pak $y \in f(X)$ nebo $y \in f(Y)$. Předpokládejme, že $y \in f(X)$; v opačném případě by důkaz proběhl analogicky. Tedy existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Je $X \subset X \cup Y$, a tedy $x \in X \cup Y$. Odtud $y \in f(X \cup Y)$.

(b) Ne: Uvažujme $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$, $X = \{0\}$ a $Y = \{1\}$ a zobrazení $f: A \rightarrow B$ definováno následovně: $f(0) = 0 = f(1)$. Pak $f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$, ale $f(X) \cap f(Y) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$. Zkusme tedy dokázat $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. Necht' $y \in f(X \cap Y)$. Pak existuje $x \in X \cap Y$ takové, že $f(x) = y$. x leží v obou X a Y , neboli $y \in f(X)$ a $y \in f(Y)$. Odtud $y \in f(X) \cap f(Y)$.

(c) Ano:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha}\right) &\iff f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} \\ &\iff \exists \alpha \in I : f(x) \in U_{\alpha} \\ &\iff \exists \alpha \in I : x \in f^{-1}(U_{\alpha}) \\ &\iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_{\alpha}). \end{aligned}$$

(d) Ano: Dokáže se podobně jako (c).

(e) Ne: Uvažme $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$, $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2, 3\}$ a zobrazení $f: A \rightarrow B$ definováno následovně: $f(0) = f(2) = 0$ a $f(1) = f(3) = 1$. Pak $f(X \setminus Y) = f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$, ale $f(X) \setminus f(Y) = \{0, 1\} \setminus \{0, 1\} = \emptyset$. Zkusme dokázat, že $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$:

$$\begin{aligned} z \in f(X) \setminus f(Y) &\iff z \in f(X) \wedge z \notin f(Y) \\ &\iff (\exists x \in X : f(x) = z) \wedge (\forall y \in Y : f(y) \neq z) \\ &\implies \exists x \in (X \setminus Y) : f(x) = z \\ &\iff y \in f(X \setminus Y). \end{aligned}$$

(f) Ano: dokáže se podobně jako (c).

Příklad 9 (a) 1. krok. Ověříme platnost tvrzení pro $n = 1$: zřejmě platí, že $1 < 2$.

k -tý krok. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, \dots, k-1$, $k \geq 2$ a z tohoto vyvodíme platnost pro $n = k$. Rozepíšeme $k = (k-1) + 1$ a odhadneme za pomoci indukčního předpokladu:

$$k = (k-1) + 1 < 2^{k-1} + 2 \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k,$$

kde poslední nerovnost platí, neboť $k \geq 2$. Tím je důkaz ukončen.

(b) **1. krok.** Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$.

k -tý krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, \dots, k-1$, $k \geq 2$ a ukážeme platnost pro

$n = k$. Počítejme

$$\begin{aligned}
(a+b)^k &= (a+b)^{k-1}(a+b) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} a^i b^{k-1-i} \right) (a+b) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} a^{i+1} b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} a^i b^{k-i} \\
&= a^k + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right) a^i b^{k-i} + b^k \\
&= a^k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} a^i b^{k-i} + b^k \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i},
\end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme užili indukčního předpokladu a v páté rovnosti využili Pascalovy identity. Tím je důkaz dokončen.

(c) **1. krok.** Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$.

k -tý krok. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, \dots, k-1$. Ukážeme platnost pro $n = k$. Počítejme

$$\sum_{i=1}^k i = \sum_{i=1}^{k-1} i + k = \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Důkaz je tímto hotov.

(d) **1. krok:**

Pro $n = 0$ máme $2^{-0} = 1$, tedy za hledaný podinterval můžeme vzít celý interval $[0, 1]$.

Indukční krok:

Předpokládejme, že máme interval $[a, b] \subset [0, 1]$, který splňuje $b - a < 2^{-(n-1)}$ a množina

$$A = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in [a, b]\}$$

je nekonečná. Označme

$$B = \left\{ i \in \mathbb{N} : x_i \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \right\} \quad \text{a} \quad C = \left\{ i \in \mathbb{N} : x_i \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \right\}.$$

Pak $A = B \cup C$, tedy buď B nebo C musí být nekonečná (A je nekonečná tedy nemůže být sjednocením dvou konečných množin). Pak interval $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ nebo $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ musí obsahovat nekonečně mnoho daných hodnot. Navíc platí

$$\left| \frac{a+b}{2} - a \right| = \frac{|b-a|}{2} \leq \frac{2^{-(n-1)}}{2} = 2^{-n}$$

a obdobně $\left| b - \frac{a+b}{2} \right| \leq 2^{-n}$. Našli jsme tedy hledaný interval.

Příklad 11 Nechtě $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pak máme

$$\forall x \in \mathbb{R} : ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x),$$

tedy skládání je asociativní. Jako protipříklad na komutativitu uvažme funkce $f(x) = -x$ a $g(x) = x^2$. Pak

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(x^2) = -x^2 \quad \text{ale} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (-x)^2 = x^2.$$

Příklad 12 (a) Například $f(x) = \tan(\pi x)$, $x \in (0, 1)$.

(b) Například $f(x) = a + (b - a)x$, $x \in [0, 1]$.

(c) Například

$$f(x) = \begin{cases} \tan(\pi x), & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(d) Například

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \frac{1}{4}), \\ \frac{1}{2} - x, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 2x - 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

(e) Například

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{2}, \\ 2^{-n}, & x = 2^{-n-1} \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{jinak.} \end{cases}$$