Středoškolská matematika

Příklad 1. Řešte následující rovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\sin 2x = \cos x$

(b) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$

(c) $\log(x^2 + 8) = 2\log(2 - x)$

(d) $\log_4 (64x^2) = (\log_4 x)^2$

(e) $e^x + 6e^{-x} = 5$

(f) $|x - |2x|| = 1 - |x|$

(g) $\sin x + \cos x = 1$

(h) $2\log_3^2 x = 8\log_3 3 - \log_3 x^6$

(i) $5^{4x-1} + \frac{3}{5}5^{2x+1} = 20$

(j) $|x - 4| - |6 - 3x| = -3 + |-x|$

(k) $\log_{10} x + \frac{8}{\log_{10} x} = 6$

Příklad 2. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $(x + 2)(x - 2) \leq 2x - 4$

(b) $\frac{5x-1}{x-3} \geq -x - 1$

(c) $\left|x - \left|\frac{x}{2}\right|\right| < 3$

(d) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) > 0$

(e) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-3} \geq x + 2$

(f) $|x + 1| - |2 - x| < 1$

(g) $\tan(2x - 1) \geq -\sqrt{3}$

(h) $\cos 2x < \sin x$

(i) $\frac{x+2}{x-1} \geq |2 - x|$

(j) $3^{-x^3-3} > 3^{-|2x^3|}$

(k) $||2x - 1| - 7| \leq 2$

(l) $2 - \cos 2x - 3\sin x < 0$

(m) $\sin x^2 + 12\,|\tan x| \geq -2$

(n) $\frac{x-2}{x+3} \leq \frac{x+1}{x-2}$

Příklad 3. V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ řešte (ne)rovnice:

(a) $-1 < ce^x \leq 0$

(b) $|\sin x| > c$

(c) $|x| + |x + 3| < c$

(d) $\left|x^2 + 2x\right| < c + 2x$

(e) $(c - 1)x^2 - 2cx - c + 8 = 0$

Příklad 4. Načrtněte grafy následujících funkcí a uveďte význačné hodnoty (v jakých bodech jsou protnuty osy, horizontální/vertikální asymptoty atd.):

(a) $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$

(b) $g(x) = 1 - \left|\cos \frac{x}{2}\right|$

(c) $h(x) = \left|e^{|x-1|} - \pi\right|$

(d) $i(x) = \tan|\pi x|$

Příklad 5. Sestrojte kvadratickou nerovnici, která bude mít řešení tvaru:

(a) $x \in (\infty, -6) \cup (4, \infty)$

(b) $x = -2$

(c) $\emptyset$

(d) $x \in [0, 2]$

Příklad 6. Vyjádřete funkce $\sin 4x$ a $\cos 4x$ pomocí násobků a mocnin $\sin x$ a $\cos x$.

Příklad 7. Ukažte, že platí:

(a) Známý vzorec pro řešení kvadratické rovnice.

(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

(d) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ pro $n, k \in \mathbb{N}, n > k > 0$.

Výsledky

1. **(a)** $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, **(b)** $x \in \{k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$, **(c)** $x = -1$, **(d)** $x \in \{\frac{1}{4}, 64\}$, **(e)** $x \in \{\log 2, \log 3\}$, **(f)** $x \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$, **(g)** $x \in \{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, **(h)** $x \in \{\frac{1}{81}, 3\}$, **(i)** $x = \frac{1}{2}$, **(j)** $x \in \{-\frac{1}{3}, \frac{13}{5}\}$, **(k)** $x \in \{10^2, 10^4\}$**.**

2. **(a)** $x \in [0,2]$, **(b)** $x \in [-4,1] \cup (3,\infty)$, **(c)** $x \in (-2,6)$, **(d)** $x \in (1,2)$, **(e)** $[-2,3)$, **(f)** $x \in (-\infty,1)$, **(g)** $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2})$, **(h)** $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$, **(i)** $x \in (1,4]$, **(j)** $x \in (-\infty,-1) \cup (\sqrt[3]{3}, \infty)$, **(k)** $x \in [-4,-2] \cup [3,5]$, **(l)** $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, **(m)** $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$**, (n)** $x \in (-3, \frac{1}{8}] \cup (2,\infty)$**.**

3. **(a)** **(i)** $c > 0 : \emptyset$**, (ii)** $c = 0 : x \in \mathbb{R}$**, (iii)** $c < 0 : x \in (-\infty, \log(-\frac{1}{c}))$, **(b)** **(i)** $c < 0 : x \in \mathbb{R}$**, (ii)** $c \geq 1 : \emptyset$**, (iii)** $c \in [0,1) : x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\arcsin(c) + k\pi, \pi - \arcsin(c) + k\pi)$, **(c)** **(i)** $c \leq 3 : \emptyset$**, (ii)** $c > 3 : x \in (-\frac{c+3}{2}, \frac{c-3}{2})$**,** **(d)** **(i)** $c \leq 0 : \emptyset$**, (ii)** $c \in (0,4] : (-2 + \sqrt{4-c}, \sqrt{c})$**, (iii)** $c > 4 : x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$**,** **(e)** **(i)** $c = 1 : x = \frac{7}{2}$**, (ii)** $c \in (\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}) : \emptyset$**, (iii)** $c \in \{\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}\} : x = \frac{c}{c-1}$**, (iv)** $c \in (-\infty, \frac{9-\sqrt{17}}{4}) \setminus \{1\} \cup (\frac{9+\sqrt{17}}{4}, \infty) : x \in \{\frac{c}{c-1} - \frac{\sqrt{2c^2-9c+8}}{|c-1|}, \frac{c}{c-1} + \frac{\sqrt{2c^2-9c+8}}{|c-1|}\}$**.**