Řešení "obtížného" příkladu

Svatopluk Krýsl

29. srpna 2005

Následující úkol je celkem obtížný.

Úkol. Spočtěte rod plochy mnohoznačné funkce $(1-z^n)^{1/n}$. Pro výpočet uvažte Riemann-Hurwitzovu formuly pro sféru $\mathbb{P}^1$, která říká, že pro nakrytí (obecně s větvicími body) $\pi : Y \to \mathbb{P}^1$ splňuje vztah

$$g = \frac{b}{2} - m + 1,$$

kde g je rod Y (kompaktní),b je totální větvicí stupeň, a π je m-listé nakrytí Riemannovy sféry. b je součet všech stupňů větvení přes body větvení x (jistě je konečný z kompaktnosti), přičemž nabývá-li funkce v okolí bodů x, kde $(d\pi)_x$ singulární - bod větvení, hodnoty k-krát (tj. v k bodech okolí x), je stupeň větvení v x roven $k-1$. Např. fce $w = \sqrt{z}$ představuje nakrytí $Y \to \mathbb{C}$, které je dvoulisté (m=2) - vzpomeňte si na známý náčrtek z úvodních přednášek o funkcích komplexní proměnné - a jediným větvicím (ramifikačním) bodem je bod nula, v které je $k = 2$, tj. $b = k - 1 = 1$. Snadno zjistíte ramifikační body $(1-z^n)^{1/n}$. Jsou to právě vrcholy pravidelného n-úhelníka, které jsou nulami uvažované funkce. Nad nimy je uvažovaná funkce lokálně právě n-tou odmocninou a má proto ramifikační stupeň $n-1$. V okolích neobsahující vrcholy n-úhelníka se jedná o typickou n-tou odmocninu mimo viděnou daleko od nuly, tj. počet listů $m = n$. Poznamenejme, že ploše v úkolu se říká Fermatova křivka a vlastní reinkarnace, resp. pouze obměny, důležité v algebraické teorii čísel, převážně alg. teorii eliptických křivek (pro $n > 2$ je $g > 0$ a pro $n = 2$ je $g = 0$, a proto Fermatova křivka nikdy není hypereliptická).