Početní část zkoušky 12.11.2009

Jméno:

Skupina:

1. (7b)
   (i) Napište Taylorův polynom třetího stupně v nule funkcí $\sinh x$ a $\sin x$.
   (ii) Odvoďte (jakkoli, ale správně) polynom třetího stupně funkce $\operatorname{arctg} x$ v nule.
   (iii) S jejich pomocí spočtěte
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{arctg} x) - x}{\sin x - x}.$$
   (iv) Výsledek ověřte pomocí l'Hospitalova pravidla.

2. (9b) Nalezněte primitivní funkci včetně intervalů, na kterých má vše smysl
   $$\int \sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx\,.$$

3. (3b) Nechť
   $$f(x) = \begin{cases} 2Ax^3 + B & x \geq 1 \\ 2Bx + A + 1 & x < 1. \end{cases}$$
   Nalezněte A, $B \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ měla na $\mathbb{R}$ spojitou derivaci.

4. (8b) Vyšetřete průběh funkce
   $$f(x) = \frac{|1 + x|}{\sqrt[3]{x}}$$
   včetně co nejpřesnějšího načrtnutí grafu funkce.

Teoretická část zkoušky 12.11.2009

Jméno:

Skupina:

1. (8b) a) Zformulujte a dokažte věty o substituci pro primitivní funkce.
   b) Zformulujte a dokažte tyto věty i pro případ Riemannova integrálu.
   c) Naznačte, jak byste větu o substituci použili na výpočet

   $$(\mathcal{R})\int_0^{8\pi} \frac{dx}{1+\sin^4 x}$$

   (integrál nepočítejte!).

2. (8b) a) Nechť $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ je reálná funkce, $c\in(a,b)$. Uveďte definice pojmů: f je rostoucí v (a,b) a f je konvexní v (a,b).
   Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků (tj. výrok dokažte, nebo najděte protipříklad):
   I) f je rostoucí v (a,c), f je rostoucí v (c,b) $\Longrightarrow$ f je rostoucí v (a,b).
   II) f je konvexní v (a,c), f je konvexní v (c,b) $\Longrightarrow$ f je konvexní v (a,b).
   III) f je rostoucí v (a,c), f je rostoucí v (c,b), f je spojitá v (a,b) $\Longrightarrow$ f je rostoucí v (a,b).
   IV) f je konvexní v (a,c), f je konvexní v (c,b), f je spojitá v (a,b) $\Longrightarrow$ f je konvexní v (a,b).

3. (7b) Zformulujte a dokažte Heineho větu.
   Ukažte na příkladech, jak lze Heineho větu použít k

   - důkazu toho, že $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje
   - tomu, aby se na limitu posloupnosti $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ dalo použít l'Hospitalovo pravidlo.