Řešte obyčejnou diferenciální rovnici 2h POČETNÍ

[10]

1) $$y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x \quad \text{na} \quad I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

a) O jakou rovnici se jedná? Specifikujte.

b) Napište všechna její řešení!

c) Jaká je dimenze (ať nad $\mathbb{R}$ či nad $\mathbb{C}$) prostoru řešení. ~~Prostor je afinní, a tak jeho dimenze~~

d) Napište nějaký prostor tomuto prostoru izomorfní!

2) Sečtěte $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$. Všechny své kroky odůvodněte. [9]

Poté vyšetřete chování řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}$ ~~je~~.

~~rozhodněte~~

3) Nechť $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem [12]

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$$

a) Existuje okolí U bodu $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ a okolí V bodu $1 \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall (x,y) \in U \ \exists! z \in V$, že $F(x,y,z) = 0$?

b) Existuje okolí U' bodu $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ a okolí V' bodu $1 \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall (x,z) \in U' \ \exists! y \in V'$, že $F(x,y,z)=0$.

~~d) Nechť $\alpha(x,y) := f(x,y,g(x,y))$~~

c) Pokud je odpověď na a) & b) kladná, existují zřejmě funkce g & h

$g:(x,y)\in U \mapsto g(x,y)\in V$

$h:(x,z)\in U' \longrightarrow g(x,\cancel{z})\in V'$ takové, že

$F(x,y,g(x,y))=0 \ \forall (x,y)\in U$

$F(x,h(x,z),z))=0 \ \forall (x,z)\in U'$

Určete $\frac{\partial\alpha}{\partial x}(1,1)$ & $\frac{\partial\beta}{\partial x}(1,1)$, kde

$\alpha(x,y):=F(x,y,g(x,y))$, $(x,y)\in U$

$\beta(x,z):=F(x,h(x,\cancel{z}),z))$, $(x,y)\in U'$.

4) Určete nejmenší a největší hodnoty fce [9]

$f(x,y,z):=x^2+2y^2+3z^2$, kterých nabývá

na $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2\leq 100\}$.

Rozdělte $M=M^\circ \cup \partial M$, kde

M° je otevřená (v $\mathbb{R}^3$) &

∂M je daná rovnicí (vazbou).

TEORIE [14]

1) a) Definujte $\limsup_{n\to+\infty} a_n$, kde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posl. reálných čísel.

Spočtěte $\limsup_{n\to+\infty} [(-1)^n+1]$. (Napište řešení & eventuálně zdůvodněte.)

[2]

b) Nechť (Q,ϱ) je metrický prostor. Definujte U je otevřená. Definujte U je kompaktní.

[3]

2) Formulujte a dokažte větu o derivaci mocninné řady

form. ← 4 + 8 → dk

[12]

3) Formulujte větu o derivaci složené fce více proměnných. (Parc. derivaci → např., či tot. dif. složené ... jak chcete "~~\[illegible\]~~")

[7]

4) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otevř., $(x_0,y_0)\in U$.

[6]

Je pravda

"$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \implies$

(x_0,y_0) je lokální extrém"?

Pokud ano, dokažte tuto větu.

Pokud ne, uveďte protipříklad a dokažte jeho správnost / relevanci.