MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marián Poppr

Prostorové formy

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Především bych chtěl poděkovat svému vedoucímu doc. Svatopluku Krýslovi nejen za všechen čas, kterými mi věnoval, ale hlavně za energii, jíž vložil do tohoto textu. Nesmím však opomenout vyjádřit dík své rodině za podporu jak materiální, tak i duchovní.

Název práce: Prostorové formy

Autor: Marián Poppr

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Předkládaná práce se zabývá základy Riemannovy geometrie. Věnujeme se otázkám existence a jednoznačnosti metrik a konexí na hladkých varietách. Popisujeme exponenciální zobrazení a zkoumáme prostorové formy, tedy úplné variety s konstantní sekcionální křivostí. Za pomoci Jakobiho pole dokazujeme lokální verzi Killingovy–Hopfovy věty popisující izometrie mezi prostorovými formami.

Klíčová slova: Riemannovy variety, sekcionální křivost, Jakobiho pole, Killingova–Hopfova věta.

Title: Space forms

Author: Marián Poppr

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In the presented thesis, we focus on foundations of Riemannian geometry. We are concerned with the problematics of the existence and uniqueness of metrics and connections on smooth manifolds. We explore the exponential map as a tool for a study of space forms – complete manifolds with constant sectional curvature. Using Jacobi fields we are going to prove the local case of the Killing–Hopf theorem, which describes isometries between space forms.

Keywords: Riemannian manifolds, sectional curvature, Jacobi field, Killing–Hopf theorem.

Obsah

Úvod

Riemannova geometrie zavedením metriky umožňuje počítat na hladkých varietách délky, úhly či například křivost. Mezi nejjednodušší hladké variety můžeme považovat ty s konstantní křivostí, proto, chtěli bychom-li se seznámit s Riemannovou geometrií, je vhodné těmto varietám porozumět, což bylo cílem právě čtené bakalářské práce.

V této práci směřujeme k důkazu lokální verze Killingovy–Hopfovy věty, která dokazuje existenci lokálních izometrií mezi varietami se stejnou konstantní křivostí. Její globální verze, dokázaná Killingem pro konstatní nulovou a pozitivní sekcionální křivost a Hopfem obecně dokonce říká, že neexistují až na izometrii jiné jednoduše souvislé Riemannovy variety dimenze n než $\mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Daná globální věta by však značně přesahovala rámec této práce.

Než však budeme moci přistoupit k důkazu její lokální varianty, bude třeba věnovat pozornost poznatkům ve dvou kapitolách.

V první nejprve zavedeme Riemannovu metriku a fakt, že ne všechny metriky musí existovat na hladkých varietách, ilustrujeme na neexistenci Lorentzovy metriky na sféře $\mathbb{S}^2$. Poté se budeme věnovat existenci a jednoznačnosti Riemannovy konexe a přes paralelní přenos zavedeme exponenciální zobrazení.

V druhé kapitole nejdříve rozšíříme poznatky o křivosti a uvedeme příklady variet s konstantní křivostí a to rovnou $-1, 0$ a 1. Dále definujeme Jakobiho pole dávající v souvislost geodetické křivky a křivost, abychom posléze přešli k důkazu lokální Killingovy–Hopfovy věty.

Zdrojem k této práci byla především monografie do Carma [do Carmo, 1993].

1. Základní pojmy

V textu uvažujme *hladkost* jakožto diferencovatelnost třídy C^∞.

1.1 Riemannova metrika

Definice 1 (Riemannova metrika)**.** *Nechť M je hladká varieta.* Riemannovou metrikou *pak nazýváme hladké tenzorové pole g typu $(0,2)$, takové že pro každé $m \in M$ je $g(m)$ symetrická a pozitivně definitní bilineární forma.*

Definice 2 (Riemannova varieta)**.** *Hladkou varietu M spolu s Riemannovou metrikou g nazýváme* Riemannova varieta *a značíme (M, g).*

Pro dvě lineární formy α a β nad vektorovým prostorem V, pokud napíšeme $\alpha\beta$, tak budeme rozumět symetrickou bilineární formu

$$(\alpha\beta)(X,Y) = \frac{1}{2}(\alpha(X)\beta(Y) + \alpha(Y)\beta(X)),$$

kde X, Y jsou vektory z V. Obdobně budeme rozumět příslušnou symetrickou bilineární diferenciální formu.

Věta 1. *Mějme Riemannovu varietu (M, g). A nechť $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ je obor lokálních souřadnic. Pak můžeme g na U vyjádřit vzorcem*

$$g = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} dx^k dx^l, \tag{1.1}$$

kde $g_{kl} = g\big(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\big)$.

Důkaz. Díky bilinearitě formy g stačí ověřit rovnost na dvojicích souřadnicových vektorových polí $\frac{\partial}{\partial x^i}$ a $\frac{\partial}{\partial x^j}$, definovaných na oboru lokálních souřadnic (U, φ).

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} dx^k dx^l\Big)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^l\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^l\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\delta_i^k\delta_j^l + \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\delta_j^k\delta_i^l\right] = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}).
\end{aligned}$$

Jelikož forma g je symetrická, tak $g_{ij} = g_{ji}$, a tedy dostáváme

$$\Big(\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} dx^k dx^l\Big)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij},$$

čímž je rovnost (1.1) dokázána. □

Nad $\mathbb{R}^n$ lze zkonstruovat speciální případ Riemannovy metriky, tvz. *Eukleidovu metriku g_{Euc}*, definovanou vztahem $((g_{Euc})(m))_{kl} = \delta_{kl}, m \in \mathbb{R}^n$, jenž je vyjádřen vůči standardním souřadnicím na $\mathbb{R}^n$.

Definice 3 (Indukovaná metrika)**.** *Nechť* $\Phi : M \to (N, g_N)$ *je hladké vložení variety* M *do variety* N*. Pak* indukovanou metriku $\Phi^* g_N$ *definujme vztahem,* $(\Phi^* g_N)(X, Y) = g_N(\Phi_* X, \Phi_* Y)$*, kde* X *a* Y *jsou odpovídající vektorová pole na* M*.*

Jelikož Φ je difeomorfismus (na svůj obraz), tak $(\Phi_*)_m$ je invertibilní na $T_{\Phi(m)}\Phi(M)$ pro každý bod m na M a $\Phi^* g_N$ je pak pozitivně definitní. Tedy se stále jedná o Riemannovu metriku.

Nyní budeme chtít ukázat, že na každé hladké varietě existuje alespoň jedna Riemannova metrika. To ukážeme pomocí rozkladu jednotky. Nejprve je však třeba zavést následující pojmy. Nechť M je topologický prostor. Řekneme, že systém množin $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je *otevřené pokrytí* M, pokud U_α jsou otevřené množiny a $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$. Dále systém $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ podmnožin M nazveme *lokálně konečným,* pokud pro každý bod $m \in M$ existuje jeho okolí V tak, že $V \cap U_\beta \neq \emptyset$ jen pro konečně mnoho indexů β. Řekneme, že soubor $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ hladkých nezáporných funkcí na M je *rozkladem jednotky,* pokud je systém $\{\mathrm{supp} f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokálně konečný a $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(m) = 1$ pro každé $m \in M$. Konečně rozklad jednotky $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ nazveme *podřízeným pokrytí* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, pokud pro každé $\beta \in B$ existuje $\alpha \in A$ takové, že $\mathrm{supp} f_\beta \subseteq U_\alpha$.

Věta 2 (O existenci rozkladu jednotky)**.** *Pro každé otevřené pokrytí hladké variety existuje jemu podřízený rozklad jednotky.*

Důkaz. [Lee, 2002, str. 54] □

Věta 3 (O existenci Riemannovy metriky)**.** *Na každé hladké varietě* M *existuje alespoň jedna Riemannova metrika* g*.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ je hladký atlas na hladké varietě M s dimenzí rovnou n takový, že $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ pro $\alpha \in A$. Dle Věty 2 můžeme uvažovat rozklad jednotky $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ podřízený atlasu $\mathcal{A}$. Tudíž pro každé β lze zvolit množinu $U_{\alpha(\beta)}$ tak, že v $U_{\alpha(\beta)}$ leží nosič f_β, kde $\alpha(\beta) \in A$. Protože $\varphi_{\alpha(\beta)} : U_{\alpha(\beta)} \to V_{\alpha(\beta)}$ je difeomorfizmus, tak lze na $U_{\alpha(\beta)}$ zkonstruovat indukovanou metriku $g_\beta = (\varphi_{\alpha(\beta)})^*((g_{Euc})_\beta)$, kde $(g_{Euc})_\beta$ je zúžení g_{Euc} na množinu $V_{\alpha(\beta)}$.

Mějme nyní součet $g = \sum_{\beta \in B} f_\beta g_\beta$, kde f_β jsou nezáporné funkce takové, že $\sum_{\beta \in B} f_\beta = 1$. Zároveň víme, že pro každý bod $m \in M$ je pouze konečně mnoho $f_\beta(m) > 0$. Označíme–li tuto množinu indexů β jako $I(m)$, pak díky Větě 2 je $I(m)$ neprázdná. Protože pro každé $\beta \in I(m)$ leží m v nosiči f_β, tak máme definovaný skalární součin $(g_\beta)_m$. Proto i lineární kombinace $g_m = \sum_{\beta \in I(m)} f_\beta(m)(g_\beta)_m$ je skalárním součinem. Symetrii zřejmě g_m také splňuje. Celkem $g = \sum_{\beta \in B} f_\beta g_\beta$ je dobře definované hladké tenzorové pole na M. Tím jsme sestrojili Riemannovu metriku g. □

Lorentzova metrika na sféře $\mathbb{S}^2$

Pokud bychom na hladké varietě v každém bodě uvažovali nejen pozitivně definitní bilineární formy, ale i indefinitní regulární a pevné signatury, získali bychom tvz. *pseudo–Riemannovu varietu.* Ta na rozdíl od Riemannovy nemusí existovat na všech hladkých varietách. Příkladem může být tvz. *Lorentzova metrika* na sféře $\mathbb{S}^2$. Jde o pseudo–Riemannovu metriku, jíž určená bilineární forma je regulární, a která má bez jednoho záporného pouze kladná vlastní čísla. K důkazu neexistence využijme následující známé věty.

Věta 4 (O ježkovi)**.** *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{S}^{2n} \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ neexistuje spojité všude nenulové vektorové pole.*

Důkaz. [Burns a Gidea, 2005, str. 77] $\square$

Mějme Riemannovu metriku g, příslušnou Lorentzovu metriku h na $\mathbb{S}^2$ a pro každé $m \in \mathbb{S}^2$ hladké zobrazení $A_m : T_m\mathbb{S}^2 \to T_m\mathbb{S}^2$ definované vztahem:

$$g_m(A_mX,Y) = h_m(X,Y),$$

kde $X,Y \in T_m\mathbb{S}^2$. Všimněme si, že zobrazení A_m je samosdružené, jelikož

$$g_m(X,A_mY) = g_m(A_mY,X) = h_m(Y,X) = h_m(X,Y) = g_m(A_mX,Y).$$

Nechť $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ je hladký atlas na $\mathbb{S}^2$. Pro každou mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ obdržíme hladká souřadnicová pole, jejichž Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací získáme hladká ortonormální vektorová pole Y_1^α, Y_2^α. Potom matice $\hat{A}$ lineárního zobrazení A_m je pro všechna $m \in U_\alpha$ symetrická, vyjádříme-li ji vůči ortonormální bázi $\{(Y_1^\alpha)_m, (Y_2^\alpha)_m\}$. Proto existuje hladké zobrazení $\wedge : U_\alpha \to \mathrm{Sym}(2, 2; \mathbb{R})$ přiřazující každému $m \in U_\alpha$ matici $\hat{A}$ zobrazení A_m. Zároveň její vlastní čísla jsou reálná a můžeme pro ni v každém bodě m najít rozklad na vlastní podprostory, které odpovídají zápornému a kladnému číslu.

Nejprve ukážeme, že záporné vlastní číslo λ je na U_α hladkou funkcí A_m. To stačí dokázat pro $\hat{A}$ v $\mathrm{Sym}(2, 2; \mathbb{R})$. Uvažujme nyní funkci $f : \mathbb{R} \times \mathrm{Sym}(2, 2; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(\hat{\lambda}, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}) := \det(\hat{A} - \hat{\lambda}E_2) = \hat{\lambda}^2 - \hat{\lambda}\mathrm{Tr}\hat{A} + \det\hat{A},$$

kde $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ jsou odpovídající hladké koeficienty $\hat{A}$. Stačí ukázat, že pro každé $\hat{A}_0 \in \mathrm{Sym}(2, 2; \mathbb{R})$ existuje vlastní číslo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $f(\lambda_0, \hat{A}_0) = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial\hat{\lambda}}(\lambda_0, \hat{A}_0) \neq 0$. Pak dle věty o implicitní funkci existuje hladká funkce ψ na okolí $\hat{A}_0$, taková že $\lambda = \psi(\hat{A}_0)$ na $\mathrm{Sym}(2, 2; \mathbb{R})$. Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje takové vlastní číslo λ^*, aby platila rovnost $\dfrac{\partial f}{\partial\hat{\lambda}}(\lambda^*,-) = 0$. Po zderivování f (podle $\hat{\lambda}$) dostaneme podmínku

$$\lambda^* = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{A}.$$

S využitím toho, že λ^* je vlastní číslo, získáme

$$0 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{A}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{A}\right)\mathrm{Tr}\hat{A} + \det\hat{A},$$
$$0 = (\mathrm{Tr}\hat{A})^2 - 4\det\hat{A}.$$

Zároveň z indefitnosti a regularity matice $\hat{A}$ víme, že součin jejích vlastních čísel je záporný. Pokud budeme chápat vztah $f = 0$ jako kvadratickou rovnici v proměnné λ^*, tak získáme spor následovně. Z výše uvedeného výpočtu víme, že daná rovnice má nulový diskriminant, tedy má dvojnásobný kořen, jehož druhá mocnina nemůže být však záporná. Tak je $\hat{\lambda}$ podle věty o implicitní funkci hladkou funkcí na $\mathrm{Sym}(2, 2; \mathbb{R})$. Tudíž λ je na $\mathbb{S}^2$ hladkou funkcí.

Avšak dokázání hladkosti vlastního vektoru není snadné. Chtěli bychom-li například explicitně vyjádřit vlastní vektor vlastního čísla -1 jako prvek jednodimenzionálního jádra matice $(A_m - E_2)$, tak pro $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ musíme k jeho určení zvolit první řádek, leč v případě $A_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ řádek druhý. Odvolejme se na [Kato, 1982, str. 140], kde použijeme Větu o spojitosti vlastního vektoru na prosotu symetrických matic. Tím jsme tedy získali hladké vektorové pole, jež je všude nenulové, což je však spor s Větou o ježkovi. Tedy na $\mathbb{S}^2$ neexistuje Lorentzova metrika.

Poznamenejme na závěr, že vlastní číslo jsme nakonec pro úvahu nepotřebovali, nicméně důkaz jeho hladkosti není složitý (opírá se jen o Větu o inverzní funkci) a ilustruje problém, který se v důkazech neexistence Lorentzovy metriky na sféře často chybně pokládá za zřejmý.

Definice 4 (Izometrie)**.** *Uvažujme Riemannovy variety* (M, g) *a* $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$*. Pak difeomorfizmus* $F : M \to \widetilde{M}$ *nazveme* izometrií, *pokud pro každý bod* $m \in M$ *a každé dva vektory* $u, v \in T_m M$ *platí*

$$g_m(v, w) = g_{F(m)}((dF)_m v, (dF)_m w).$$

Lineární izomorfizmus $L : (V, B) \to (\widetilde{V}, \widetilde{B})$ mezi vektorovými prostory se skalárními součiny nazveme *izometrií,* platí-li po každé vektory $v, w \in V$, že $B(v, w) = \widetilde{B}(L(v), L(w))$. Zároveň je zřejmé, že každá tato izometrie je ortogonálním zobrazením.

1.2 Afinní konexe

Definice 5 (Afinní konexe)**.** *Nechť* M *je hladká varieta.* Afinní konexí *pak nazveme zobrazení* ∇*, které uspořádané dvojici hladkých vektorových polí* X *a* Y *na* M *přiřadí hladké vektorové pole* $\nabla_X Y$ *a jež splňuje následující podmínky*

(*A*1) ∇ *je bilineární,*

(*A*2) $\nabla_{fX} Y = f(\nabla_X Y)$, *kde* f *je libovolná hladká funkce na* M,

(*A*3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f(\nabla_X Y)$, *kde* f *je libovolná hladká funkce na* M.

Uvažujeme-li hladká vektorová pole X, Y jako v předchozí definici, pak dle [Lee, 1997, str. 50] závisí $(\nabla_X Y)(m)$ pro každé $m \in M$ pouze na hodnotě X v bodě m a na hodnotě Y na nějakém okolí bodu m.

Máme-li na hladké varietě M obor lokálních souřadnic $\Big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\Big)$, pak na U můžeme lokálně pomocí souřadnicových vektorových polí $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$

jednoznačně vyjádřit každé (hladké) vektorové pole. Předpokládejme, že na M je dána afinní konexe ∇. Nyní definujme *Christoffelovy symboly* (Γ^k_{ij}) jako ty jediné hladké funkce na U splňující

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Na $\mathbb{R}^n[u^1, \dots, u^n]$ zavedeme jednoduchý příklad afinní konexe tzv. *Eukleidovu konexi,* jako zobrazení D množiny $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, definované

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) \frac{\partial}{\partial u^i},$$

kde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ a $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$.

Nyní ověříme, že jde doopravdy o afinní konexi. $(A1)$ zřejmě platí. Ověřme nyní $(A2)$ a $(A3)$ pak plyne analogicky. Uvažujme hladkou funkci f na $\mathbb{R}^n$ a počítejme

$$D_{fX} Y = \sum_{i=1}^n (fX)(Y^i) \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^n f X(Y^i) \frac{\partial}{\partial u^i} = f D_X Y.$$

Definice 6 (Torze a křivost)**.** *Na hladké varietě M s afinní konexí ∇ definujme* torzi *jako zobrazení T množiny $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ do $\mathfrak{X}(M)$ splňující*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

pro libovolná hladká vektorová pole X,Y na M.

Jako křivost *označme zobrazení R množiny $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ do $\mathfrak{X}(M)$ splňující*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

pro libovolná hladká vektorová pole X, Y, Z na M.

Definice 7 (Riemannova konexe)**.** *Afinní konexi ∇ na Riemannově varietě (M, g) nazveme* Riemannovou konexí, *pokud má nulovou torzi a splňuje rovnost*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{1.2}$$

pro libovolné hladké pole X, Y, Z na M.

Věta 5 (Základní věta Riemannovy geometrie)**.** *Na každé Riemannově varietě (M, g) existuje právě jedna Riemannova konexe ∇.*

Důkaz. Uvažujme pole $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Pomocí jejich cyklické záměny a definice Riemannovy variety uvažujme následující tři rovnice

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \tag{1.3a}$$
$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \tag{1.3b}$$
$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \tag{1.3c}$$

Dokažme nejprve jednoznačnost Riemannovy konexe. Předpokládejme tedy, že na M tedy existuje Riemannova konexe ∇. Pomocí rovnic (1.3a), (1.3b) a (1.3c) vytvořme rovnici (1.3a) + (1.3b) − (1.3c). Na levé straně dostaneme

$$(\text{LS}) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y).$$

Napravo pak máme

$$\begin{aligned}(\mathrm{PS}) = {}&[g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)] + [g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)]\\ &- [g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)].\end{aligned}$$

Nyní využijme nulovosti torze a symetrie g a upravujeme pravou stranu

$$\begin{aligned}(\mathrm{PS}) &= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X)\\ &= g(2\nabla_Y X + [X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X).\end{aligned}$$

Vyjádřeme nyní z rovnice člen s ∇

$$\begin{aligned}2g(\nabla_Y X, Z) = {}&Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\\ &- g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Povšimněme si, že pravá strana rovnice nezávisí na ∇. Jelikož pro každý bod $m \in M$ je g_m nedegenerovaná, tak získáme jednoznačně určený vektor $(\nabla_Y X)(m)$. Tím je důkaz jednoznačnosti ∇ na M hotov.

Přistupme nyní k dokazování existence konexe. Tu definujme pomocí rovnice (1.4). Stačí tedy jen ukázat, že jde opravdu o Riemannovu konexi. Nejprve potvrďme platnost podmínek $(A1), (A2), (A3)$. $(A1)$ je splněna triviálně. Dokažme nyní správnost $(A2)$, platnost $(A3)$ se ukáže podobným výpočtem.

Nechť f je hladkou funkcí na M, pak počítejme

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{fY} X, Z) &= Xg(fY, Z) + fYg(Z, X) - Zg(X, fY)\\ &\quad - g([X, fY], Z) - g([X, Z], fY) - g([fY, Z], X)\\ &= [(Xf)g(Y, Z) + fXg(Y, Z)] + fYg(Z, X)\\ &\quad - [(Zf)g(X, Y) + fZg(X, Y)] - g((Xf)Y + f[X, Y], Z)\\ &\quad - fg([X, Z], Y) - g(-(Zf)Y + f[Y, Z], X)\\ &= f2g(\nabla_Y X, Z)\\ &= 2g(f(\nabla_Y X), Z).\end{aligned}$$

Ověřme nyní nulovost torze

$$\begin{aligned}2g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\\ &\quad - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)\\ &\quad - Yg(X, Z) - Xg(Z, Y) + Zg(Y, X)\\ &\quad + g([Y, X], Z) + g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y)\\ &= 2g([Y, X], Z).\end{aligned}$$

Zbývá ověřit rovnost (1.2). Počítejme

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_X Z, Y) &= Yg(X, Z) + Xg(Z, Y) - Zg(Y, X)\\ &\quad - g([Y, X], Z) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y)\\ &\quad + Xg(Z, Y) + Zg(Y, X) - Yg(X, Z)\\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([X, Y], Z) - g([Z, Y], X)\\ &= 2Xg(Z, Y).\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Důkaz předchozí věty zároveň dává návod, jak na Riemannově varietě (M,g) spočítat Christoffelovy symboly. Uvažujme nyní na M obor lokálních souřadnic $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$ a dosaďme do rovnosti (1.4) za X, Y, Z postupně souřadnicová vektorová pole $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}$. Jelikož souřadnicová vektorová pole spolu komutují, členy s Lieovou závorkou budou nulové. Obdržíme tedy vztah

$$\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m} g_{mk} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\Big].$$

Označíme-li g^{kl} inverzní matici k matici g_{lk}, platí $\sum_{l=1}^{n} g^{kl} g_{lj} = \delta_j^k$. Vynásobením obou stran g^{kl} a sečtením získáme následující vztah pro Christoffelovy symboly

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} g^{kl}\Big[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\Big].$$

Ze symetrie g pak snadno vidíme, že platí následující symetrie pro Christoffelovy symboly $\Gamma_{ij}^{l} = \Gamma_{ji}^{l}$.

1.3 Paralelní přenos a geodetické křivky

Na hladké varietě M nejprve definujeme následující pojmy. Uvažujme hladkou křivku $\gamma : I \to M$, kde symbolem I budeme označovat uzavřený interval. Pak pod pojmem *vektorové pole* V *podle křivky* γ budeme rozumět zobrazení $V : I \to TM$ takové, že existuje $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ splňující vztah $V(t) = \widetilde{V}_{\gamma(t)}$ pro každé t z intervalu I. Prostor všech vektorových polí podle γ označíme jako $\mathfrak{T}(\gamma)$ a vektorové pole V budeme chápat jako *rozšiřitelné* vektorovým polem $\widetilde{V}$ podél γ.

Nakonec zavedeme následující značení. Pro $t_0 \in I$ položíme

$$\dot{\gamma}(t_0) := \gamma_{*t_0}\Big(\frac{d}{dt}\Big)_{t_0},$$

kde t je standardní souřadnice na $\mathbb{R}$.

Definice 8 (Kovariantní derivace podél křivky)**.** *Nechť M je hladká varieta s afinní konexí ∇. Pro libovolnou hladkou křivku $\gamma : I \to M$ definujeme* kovariantní derivaci podél této křivky γ *jako to jediné zobrazení $D_t : \mathfrak{T}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{T}(\gamma)$ splňující vztah*

$$D_t V(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \widetilde{V},$$

kde $\widetilde{V}$ je libovolné rozšíření V podél γ.

Nyní je třeba ověřit korektnost předchozí definice. Dokažme nejprve jednoznačnost. Zvolme t_0 a chtějme ukázat, že hodnota $D_t V(t)$ nezávisí na rozšíření.

Zvolme lokální souřadnice $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$ tak, že $\gamma(t_0) \in U$ a vyjádřeme v nich $\dot{\gamma}, \widetilde{V}$ a V jako

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}^j(t)\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_{\gamma(t)}, \widetilde{V} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{V}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ a } V = \sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde $\gamma^j = x^j \circ \gamma, \widetilde{V}^i \in C^\infty(U)$ a $V^i \in C^\infty(I)$.

Počítejme

$$\begin{aligned}
D_tV(t) &= \nabla_{\sum_{j=1}^n \dot\gamma^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)}} \sum_{i=1}^n \widetilde{V}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^n \dot\gamma^j(t)\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widetilde{V}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right]_{\gamma(t)} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \dot\gamma^j(t)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\widetilde{V}^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{V}^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right]_{\gamma(t)} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \dot\gamma^j(t)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\widetilde{V}^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + V^i \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_{\gamma(t)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d(\widetilde{V}\circ\gamma)^i}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \dot\gamma^j(t) V^i \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_{\gamma(t)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[\frac{dV^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot\gamma^j(t)(V^i\Gamma_{ij}^k)_{\gamma(t)}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\gamma(t)},
\end{aligned}$$

kde v páté rovnosti jsme použili řetízkového pravidla. Tedy $D_tV(t)$ záleží jen na V a γ, čímž je důkaz jednoznačnosti hotov. Pro důkaz existence zvolme rovnost z výpočtu a položme

$$D_tV(t) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{dV^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot\gamma^j(t)(V^i\Gamma_{ij}^k)_{\gamma(t)}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\gamma(t)} \tag{1.5}$$

na daném souřadnicovém oboru U. Tím jsme zjevně definovali objekt splňující definici kovariantní derivace na U a z jednoznačnosti ji lze definovat na celé varietě.

Definice 9 (Paralení vektorové pole)**.** *Nechť M je hladká varieta s afinní konexí ∇. Pak vektorové pole V podél hladké křivky γ nazveme* paralelní, *pokud $D_tV = 0$.*

Lemma 6 (Paralelní přenos)**.** *Nechť $\gamma : I \to M$ je hladká křivka a $t_0 \in I$. Pak pro každý vektor $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ existuje právě jedno paralelní vektorové pole V podél γ takové, že $V(t_0) = V_0$.*

Důkaz. Lemma plyne z použití známých vět o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (viz např. [Pontryagin, 1962]) na rovnost (1.5). □

Snadno si všimneme, že pokud γ je hladkou křivkou na Riemannově varietě (M, g) a V je paralelní vektorové pole podél γ, pak dle rovnosti (1.2) platí $g(V, V) =$ konstanta, jak se nyní přesvědčíme

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[g(V(t), V(t)] = \frac{d}{dt}[g((V\circ\gamma)(t), (V\circ\gamma)(t))] &= \frac{d}{dt}[g(V, V)\circ\gamma(t)] \\
&= \left[\gamma_{*t}\left(\frac{d}{dt}\right)_t\right] g(V, V) = \dot\gamma(t)(g(V, V)) \\
&= g(D_tV, V) + g(V, D_tV) = 0.
\end{aligned}$$

Budeme říkat, že *paralelní přenos zachovává délku.*

Definice 10 (Geodetická křivka)**.** *Nechť M je hladká varieta s afinní konexí ∇. Pak hladkou křivku $\gamma : I \to M$ nazveme* geodetickou*, pokud*

$$D_t \dot{\gamma}(t) = 0$$

pro každé $t \in I$.

Věta 7 (O geodetických křivkách)**.** *Mějme Riemannovu varietu (M, g). Pak pro každý bod $m \in M$ a pro každý vektor $X \in T_m M$ existuje právě jedna geodetická křivka $\gamma_{m,X} : I \to M$ taková, že $\gamma_{m,X}(0) = m$ a $\dot{\gamma}_{m,X}(0) = X$.*

Důkaz. V lokálních souřadnicích $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ rozepíšeme pomocí (1.5) rovnici $D_t \dot{\gamma} = 0$, tak získáme soustavu

$$\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^i (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) = 0 \qquad \text{pro } k = 1, \dots, n. \tag{1.6}$$

Jde tedy o soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Důkaz opět získáme za použití známých vět o řešeních soustav obyčejných diferenciálních rovnic [Pontryagin, 1962]. □

Definice 11 (Exponenciální zobrazení)**.** *Nechť (M, g) je Riemannova varieta a bod $m \in M$. Pak exponenciálním zobrazením budeme rozumět zobrazení $\exp_m : T_m M \to M$ definované vztahem*

$$\exp_m(X) := \gamma_{m,X}(1),$$

kde $\gamma_{m,X}(1)$ je hodnota zobrazení z Věty 7*, pro ta X, pro něž $\gamma_{m,X}(1)$ existuje.*

Jelikož rovnice (1.6) je homogenní, tak platí $\gamma_{m,tX}(1) = \gamma_{m,X}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Z toho získáme následující vztah

$$\exp_m(tX) = \gamma_{m,tX}(1) = \gamma_{m,X}(t). \tag{1.7}$$

Podrobněji rozepsáno v [Kowalski, 2001, str. 60].

Lemma 8. *Mějme Riemannovu varietu (M,g) a bod $m \in M$. Pak existují okolí $U \subset T_m M$ bodu 0_m a $V \subset M$ bodu m tak, že $\exp_m$ je difeomorfismus zobrazující U na V.*

Důkaz. Zkoumejme zobrazení $d(\exp_m)_{0_m} : T_{0_m}(T_m M) \to T_m M$. Spočteme push-forward $\exp_m(tX)$ podle podle t a položíme $t = 0$, pak díky vztahu (1.7) získáme

$$d(\exp_m)_{0_m}(X) = \dot{\gamma}_{m,X}(0) = X.$$

Proto $d(\exp_m)_{0_m}$ je identita, a tak z Věty o inverzní funkci pro hladké variety je $\exp_m$ lokální difeomorfismus, který zobrazuje nějaké okolí bodu $0_m \in T_m M$ na nějaké okolí bodu $m \in M$. □

2. Prostorové formy

V této kapitole budeme značit (M, g) jako Riemannovu varietu.

2.1 Křivost

Věta 9 (Vlastnosti křivosti)**.** *Nechť (M, g) je Riemannova varieta s Riemannovou konexí ∇ a křivostí R. Pak platí následující*

(a) *R je tenzorové pole typu $(1, 3)$,*

(b) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(c) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,

(d) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

(e) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$,

(f) *$g(R(X, Y)Z, W)$ je tenzorové pole typu $(0, 4)$,*

kde X, Y, Z, W jsou hladká pole na M.

Důkaz. *ad* (b) : plyne snadno z definice a z toho, že Lieova závorka je antisymetrická

ad (a) : nechť f je hladkou funkcí na M, pak postupně ověřme

$$\begin{aligned}
R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - [(Yf)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z] - [f\nabla_{[X,Y]} Z - (Yf)\nabla_X Z] \\
&= fR(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

Rovnost $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$ získáme z předchozího výpočtu a (b). Dále ověřme

$$\begin{aligned}
R(X, Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X,Y]} fZ \\
&= \nabla_X ((Yf)Z + f\nabla_Y Z) \\
&\quad - \nabla_Y ((Xf)Z + f\nabla_X Z) \\
&\quad - [([X, Y]f)Z + f\nabla_{[X,Y]} Z] \\
&= [(X(Yf))Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z] \\
&\quad - [(Y(Xf))Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z] \\
&\quad - [([X, Y]f)Z + f\nabla_{[X,Y]} Z] \\
&= fR(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

ad (c) : rovnost ukážeme několikanásobným použitím identity (1.2)

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)Z,W) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W) \\
&= [Xg(\nabla_Y Z, W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W)] \\
&\quad - [Yg(\nabla_X Z, W) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y W)] \\
&\quad - [[X,Y]g(Z,W) - g(Z, \nabla_{[X,Y]}W)] \\
&= X[Yg(Z,W) - g(Z, \nabla_Y U)] \\
&\quad - Y[Xg(Z,W) - g(Z,\nabla_X W)] - [X,Y]g(Z,W) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) \\
&= [-Xg(Z, \nabla_Y W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y U)] \\
&\quad + [Yg(Z, \nabla_X W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W)] \\
&\quad + g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) \\
&= -g(Z, \nabla_X\nabla_Y W) + g(\nabla_X\nabla_Y W, Z) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) \\
&= -g(Z, R(X,Y)W) \\
&= -g(R(X,Y)W, Z).
\end{aligned}$$

ad (d) : k důkazu využijeme několikrát nulovosti torze a nakonec Jakobiho identitu pro Lieovu závorku. Tedy počítejme

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ad (e) : k nalezení důkazu stačí vícekrát použít $(b), (c), (d)$

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)Z,W) &= -g(R(Y,Z)X,W) - g(R(Z,X)Y,W) \\
&= g(R(Y,Z)W,X) + g(R(Z,X)W,Y) \\
&= -g(R(Z,W)Y,X) - g(R(W,Y)Z,X) \\
&\quad - g(R(X,W)Z,Y) - g(R(W,Z)X,Y) \\
&= 2g(R(Z,W)X,Y) + g(R(W,Y)X + R(X,W)Y, Z) \\
&= 2g(R(Z,W)X,Y) - g(R(Y,X)W,Z) \\
&= 2g(R(Z,W)X,Y) - g(R(X,Y)Z,W).
\end{aligned}$$

ad (f) : ihned plyne z (a) a definice g.
Tím je důkaz hotov. □

Nyní zavedeme pro Riemannovu varietu M následující značení. Uvažujme na M obor lokálních souřadnic $\big(U, \varphi \equiv (x^1,\ldots,x^n)\big)$ a čtveřici souřadnicových vektorových polí $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}$ na U. Pak položme

$$R_{ijkl} := g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right).$$

Dále označením R^l_{ijk} budeme mít na myslí l–tou komponentu $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$. Tudíž platí

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^{n} R^m_{ijk} g_{ml}.$$

Pokusme se nyní vyjádřit R^l_{ijk} v souřadnicích. Jelikož $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$, tak můžeme rozepsat křivost jako

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^m} + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^m} \\
&\quad - \sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ik}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^m} - \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^m} \\
&= \sum_{m,o=1}^{n}\Gamma^m_{jk}\Gamma^o_{im}\frac{\partial}{\partial x^o} + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^m} \\
&\quad - \sum_{m,o=1}^{n}\Gamma^m_{ik}\Gamma^o_{jm}\frac{\partial}{\partial x^o} - \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^m}.
\end{aligned}$$

A tak

$$R^l_{ijk} = \sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}. \tag{2.1}$$

Definice 12 (Sekcionální křivost)**.** *Nechť m bod na Riemannově varietě (M, g) a σ 2–dimenzionální rovina v T_mM. Pak* sekcionální křivost K podle σ *definujeme jako*

$$K(\sigma) = \frac{g(R(X,Y)X,Y)}{g^2(X,Y) - g(X,X)g(Y,Y)},$$

kde $\langle X, Y\rangle$ je nějaká báze σ.

Jelikož platí $K(\langle X,Y\rangle) = K(\langle Y,X\rangle) = K(\langle \lambda X,Y\rangle) = K(\langle X+Y,Y\rangle)$ pro $\lambda \neq 0$, tak sekcionální křivost je nezávislá na volbě báze σ.

Řekneme, že Riemannova varieta (M, g) s dimenzí alespoň 2 má *konstantní sekcionální křivost* c, pokud pro každý bod $m \in M$ a každou 2–dimenzionální rovinu $\sigma \subset T_mM$ platí $K(\sigma) = k$. Zároveň snadno zjistíme, že dle Věty 9 na M platí

$$g(R(X,Y)X,Z) = k\Big(g(X,Y)g(X,Z) - g(X,X)g(Y,Z)\Big), \tag{2.2}$$

pro $\langle X, Y\rangle$ bázi σ a $Z \in T_mM$. Podrobněji lze nalézt v [do Carmo, 1993, str. 94].

Nakonec, sekcionální křivost roviny σ s bází $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}$ budeme značit zkráceně jako K_{ij}.

Hyperbolický prostor, sféra a Eukleidův prostor

Nyní uvedeme příklady tří n-dimenzionálních Rimannových variet s konstantními sekcionálními křivostmi $-1, 0, 1$ a to po řadě hyperbolický prostor $\mathbb{H}^n$, Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ a sféru $\mathbb{S}^n$.

Počítejme nejprve sekcionální křivost $\mathbb{H}^n$. Jde o poloprostor v $\mathbb{R}^n$, tedy o množinu

$$\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n > 0\},$$

s metrikou

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\delta_{ij}}{(x^n)^2},$$

Uvažujme pro přehlednost nejprve na $\mathbb{H}^n$ metriku $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}$, kde $F : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^+$ je libovolná kladná hladká funkce na $\mathbb{H}^n$.

Všimněme si, že $g^{ij} = \delta_{ij} F^2$, kde g^{ij} je inverzní matice k g_{ij}. Dále položme $f := \log F$ a označme $f_j := \frac{\partial f}{\partial x^j}$. Tedy platí, že $f_j = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x^j}$. Počítejme

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = -2\frac{\delta_{ik}}{F^3}\frac{\partial F}{\partial x^j} = -2\frac{\delta_{ik}}{F^2} f_j.$$

Díky tomu můžeme postupně vyjádřit Christoffelovy symboly jako

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{mk}\Big[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij}\Big] \\
&= \frac{1}{2}F^2\Big[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\Big] \\
&= -f_i \delta_{jk} - f_j \delta_{ik} + f_k \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Z toho vidíme, že pokud žádné dva z indexů i, j, k nejsou stejné, tak je $\Gamma^k_{ij} = 0$. Ve zbylých případech jsou Christoffelovy symboly tvaru

$$\Gamma^i_{jj} = f_i, \quad \Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = -f_j \text{ a } \Gamma^i_{ii} = -f_i.$$

Pomocí rovnosti (2.1) počítejme nyní koeficienty R_{ijij}

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= \sum_{m=1}^{n} R^m_{iji} g_{mj} = R^j_{iji}\frac{1}{F^2} \\
&= \frac{1}{F^2}\left(\sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ji}\Gamma^j_{im} - \sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ii}\Gamma^j_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^j_{ji} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^j_{ii}\right).
\end{aligned}$$

Položme $\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^j_{ii} = f_{jj}$ a $\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^j_{ji} = -f_{ii}$ a dále upravujme

$$\sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ji}\Gamma^j_{im} = -f_j^2 + f_i^2 \text{ a } \sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_{ii}\Gamma^j_{jm} = \left(-\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i, m\neq j}}^{n} f_m f_m\right) + f_i^2 - f_j^2.$$

Proto

$$F^2 R_{ijij} = \sum_{m=1}^{n} f_m f_m - f_i^2 - f_j^2 - f_{ii} - f_{jj}.$$

Konečně sekcionální křivost roviny s ortonormální bází $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}$ je tvaru

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= \frac{R_{ijij}}{-g_{ii}g_{jj}} = -F^4 R_{ijij} \\
&= -F^2\left(\sum_{m=1}^{n} f_m f_m - f_i^2 - f_j^2 - f_{ii} - f_{jj}\right).
\end{aligned}
$$

Nyní se zajímejme o případ kdy $F = x^n$. Je třeba rozlišit několik možností hodnot i a j.

- $i \neq n$ a $j \neq n$: pak platí, že $K_{ij} = -\frac{1}{(x^n)^2}(x^n)^2 = -1$.
- $i = n$ a $j \neq n$: nyní máme, že $K_{nj} = -(f_n^2 - f_n^2 - f_{nn}) = -\frac{1}{(x^n)^2}(x^n)^2 = -1$.
- $i \neq n$ a $j = n$: obdobně získáme, že $K_{in} = -1$.

Tím jsme ukázali, že $\mathbb{H}^n$ má konstantní sekcionální křivost rovnu -1.

Snadno zjistíme, že sekcionální křivost Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n[u^1, \ldots, u^n]$ je rovna nule, jelikož pro libovolná hladká vektorová X, Y, Z na $\mathbb{R}^n$ platí za využití záměnnosti parciálních derivací

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z \\
&= D_X \sum_{i=1}^{n} Y(Z^i)\frac{\partial}{\partial u^i} - D_Y \sum_{i=1}^{n} X(Z^i)\frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i=1}^{n} [X,Y](Z^i)\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(Y(Z^i))\frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i=1}^{n} Y(X(Z^i))\frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i=1}^{n} [X,Y](Z^i)\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

kde $Z = \sum_{i=1}^{n} Z^i \frac{\partial}{\partial u^i}$.

Nakonec spočítejme sekcionální křivost jednotkové sféry $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Oproti $\mathbb{H}^n$ si zjednodušíme situaci následujícím způsobem. V $\mathbb{S}^n$ zvolme libovolný bod m a z $T_m\mathbb{S}^n$ vyberme dva lineárně nezávislé vektory u a v. Budeme chtít spočítat $K(\langle u, v\rangle)$.

Všimněme si, že prostor všech 2-rovin procházející počátkem a bodem m tvoří třídimenzionální vektorový prostor, který označíme E. Jelikož každý třídimenzionální prostor je průnikem $n-2$ nadrovin, jejichž normálové vektory jsou lineárně nezávislé, tak i E je průnik takovýchto nadrovin procházejících počátkem. Označme je $H_1, \ldots, H_{n-2}$. Protože $\mathbb{S}^n \cap H_1 \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, tak indukcí lze snadno ukázat, že $E = \mathbb{S}^n \cap (H_1 \cap \cdots \cap H_{n-2}) \simeq \mathbb{S}^2$.

Uvažujme tedy izometrické vnoření $i : \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3[x^1, x^2, x^3] \to \mathbb{S}^n$ tak, že

$$
i(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}),
$$

kde E je koordinizováno pomocí $\mathbb{R}^3[x^1, x^2, x^3]$.

Pak existuje $p \in \mathbb{S}^2$, že $i_{*p}(T_p\mathbb{S}^2) = \langle u, v \rangle$. Označme $u_0 = i_{*p}^{-1}(u)$ a $v_0 = i_{*p}^{-1}(v)$. Jelikož g a křivost jsou tenzorová pole, tak

$$\begin{aligned}
K(\langle u, v \rangle) = K(\langle i_{*p}u_0, i_{*p}v_0 \rangle) &= \frac{g(R(i_{*p}u_0, i_{*p}v_0)i_{*p}u_0, i_{*p}v_0)}{g^2(i_{*p}u_0, i_{*p}v_0) - g(i_{*p}u_0, i_{*p}u_0)g(i_{*p}v_0, i_{*p}v_0)} \\
&= \frac{g(i_{*p}(R^{\mathbb{S}^2}(u_0, v_0)u_0), i_{*p}v_0)}{g^2_{\mathbb{S}^2}(u_0, v_0) - g_{\mathbb{S}^2}(u_0, u_0)g_{\mathbb{S}^2}(v_0, v_0)} \\
&= \frac{g_{\mathbb{S}^2}(R^{\mathbb{S}^2}(u_0, v_0)u_0, v_0)}{g^2_{\mathbb{S}^2}(u_0, v_0) - g_{\mathbb{S}^2}(u_0, u_0)g_{\mathbb{S}^2}(v_0, v_0)} = K_{\mathbb{S}^2}(\langle u_0, v_0 \rangle),
\end{aligned}$$

kde $g_{\mathbb{S}^2}, K_{\mathbb{S}^2}$ a $R^{\mathbb{S}^2}$ jsou odpovídající veličiny na $\mathbb{S}^2$. Proto stačí spočítat sekcionální křivost $\mathbb{S}^2$.

Až na jednu uzavřenou půlkružnici (nultý poledník P) parametrizujme jednotkovou sféru $\mathbb{S}^2$ jako

$$\begin{cases} x^1 = \sin\theta\cos\varphi, \\ x^2 = \sin\theta\sin\varphi, \\ x^3 = \cos\theta, \end{cases}$$

kde $\theta \in (0, \pi)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Snadno zjistíme, že na $\mathbb{S}^2 \setminus P$ je metrika indukovaná z g_{Euc}) rovna $g = d^2\theta + \sin^2\theta d^2\varphi$.

Počítejme nyní sekcionální křivost

$$K_{\varphi,\theta} = \frac{R_{\varphi\theta\varphi\theta}}{g^2_{\varphi\theta} - g_{\varphi\varphi}g_{\theta\theta}} = \frac{R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta}g_{\varphi\theta} + R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}g_{\theta\theta}}{g^2_{\varphi\theta} - g_{\varphi\varphi}g_{\theta\theta}} = \frac{R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}}{-\sin^2\theta}.$$

Dále zjistěme $R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}$ pomocí Christoffelových symbolů. Všimněme si, že jediné nenulové Christoffelovy symboly jsou ty obsahující dvakrát index φ a jedenkrát θ a zároveň

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ a } \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta.$$

Za pomoci vztahu (2.1) upravujme

$$\begin{aligned}
R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} &= \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} + \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} - \frac{\partial}{\partial\theta}\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-\sin\theta\cos\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin\theta\cos\theta) = -\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Tudíž $K_{\varphi,\theta} = 1$. Provedeme-li analogický postup na dalších mapách pokrývajících celou $\mathbb{S}^2$, tak dostaneme, že sekcionální křivost na $\mathbb{S}^2$ je rovna jedné. Proto i $\mathbb{S}^n$ má konstantní sekcionální křivost rovnou jedné.

2.2 Jakobiho pole

Pro varietu M zavedeme nejprve několik následujících pojmů. *Variací* hladké křivky $\gamma : [0, l] \to M$ budeme rozumět každé hladké zobrazení $H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \to M$, kde $\varepsilon > 0$ a zároveň $H(0, t) = \gamma(t)$ pro každé $t \in [0, l]$.

Dále definujme dvě třídy hladkých křivek. Nejprve $H^0_s : t \longmapsto H(s, t)$ pro každé pevné $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Potom $H^1_t(s)$ definujeme pro $t \in [0, l]$ analogicky, tj. $H^1_t : s \longmapsto H(s, t)$.

Řekneme, že H je *variací s pevnými konci,* pokud H je variace splňující

$$H(s,0)=\gamma(0) \text{ a } H(s,l)=\gamma(l)$$

pro každé $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Dále variaci H nazveme *variací přes geodetickou křivku* γ, pokud H_s je geodetickou křivkou pro každé $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Jako *vektorové pole podél variace* H budeme označovat hladké zobrazení $V:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,l]\to TM$ takové, že $V(s,t)\in T_{H(s,t)}M$ pro každé (s,t). Jelikož H je hladké, můžeme zavést následující vektorová pole podél H, a to

$$S(s,t):=(H_t^1)_{*s}\left(\frac{d}{ds}\right)_s \text{ a } T(s,t):=(H_s^0)_{*t}\left(\frac{d}{dt}\right)_t.$$

Konečně *variačním polem* V *asociovaným s variací* H budeme mít na mysli vektorové pole V podél γ splňující

$$V(t):=(H_t^1)_{*0}\left(\frac{d}{ds}\right)_0$$

pro každé $t\in[0,l]$.

Lemma 10. *Nechť* $\gamma:[0,l]\to M$ *je hladká křivka a zobrazení* H *její variací. Pak platí*

(*a*)

$$D_sT=D_tS,$$

(*b*) *pokud navíc* V *je vektorové pole podél* H, *tak*

$$D_tD_sV-D_sD_tV=R(T,S)V.$$

Důkaz. Uvažme nejprve lokální souřadnice $\big(U,\varphi\equiv(\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n)\big)$ na okolí bodu $H(s_0,t_0)$. Pak můžeme na U psát $(\varphi\circ H)(s,t)=(x^1(s,t),\dots,x^n(s,t))$, kde jsme označili $x^i=\widetilde{x}^i\circ H$.

ad (*a*) : Nyní v lokálních souřadnicích přímo z definice push-forwardu dostaneme

$$T=\sum_{k=1}^n\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial}{\partial x^k} \text{ a } S=\sum_{k=1}^n\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Aplikací vztahu (1.5) pro výpočet kovariantní derivace získáme

$$D_sT=\sum_{k=1}^n\left[\frac{d^2x^k}{ds\,dt}+\sum_{i,j=1}^n\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{ds}\Gamma_{ij}^k\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$
$$D_tS=\sum_{k=1}^n\left[\frac{d^2x^k}{dt\,ds}+\sum_{i,j=1}^n\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^k\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Zaměníme-li v druhé rovnici indexování přes i a j, pak ze symetrie Christoffelových symbolů a spojitosti parciálních derivací plyne kýžená rovnost.

ad (*b*) : Vyjádříme-li v lokálních souřadnicích $V=\sum_{i=1}^n V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, pak jeho kovariantní derivace jsou tvaru

$$D_tV=\sum_{i=1}^n\left[\frac{dV^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}+V^iD_t\frac{\partial}{\partial x^i}\right] \text{ a } D_sV=\sum_{i=1}^n\left[\frac{dV^i}{ds}\frac{\partial}{\partial x^i}+V^iD_s\frac{\partial}{\partial x^i}\right].$$

Dále pak máme

$$
\begin{aligned}
D_s D_t V &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d^2 V^i}{ds\, dt} + \frac{dV^i}{dt} D_s \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dV^i}{ds} D_t \frac{\partial}{\partial x^i} + V^i D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \\
D_t D_s V &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d^2 V^i}{dt\, ds} + \frac{dV^i}{ds} D_t \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dV^i}{dt} D_s \frac{\partial}{\partial x^i} + V^i D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} \right].
\end{aligned}
$$

Odečtením těchto příslušných rovnic získáme

$$
D_t D_s V - D_s D_t V = \sum_{i=1}^{n} V^i \left[D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} - D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} \right]. \tag{2.3}
$$

Upravujme nyní postupně pravou stranu rovnice (2.3). Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$ pevné. Můžeme psát

$$
D_t \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_T \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{dx^j}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}.
$$

Dále rozepíšeme

$$
\begin{aligned}
D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} &= \sum_{j=1}^{n} D_s \left(\frac{dx^j}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d^2 x^j}{ds\, dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dx^j}{dt} \nabla_S \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d^2 x^j}{ds\, dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{ds} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \\
D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d^2 x^j}{dt\, ds} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d^2 x^j}{dt\, ds} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^j}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right].
\end{aligned}
$$

V posledním kroku jsme přeuspořádali sčítání přes j a k. Odečtením dvou příslušných rovností díky spojitosti parciálních derivací postupně získáme

$$
\begin{aligned}
D_t D_s \frac{\partial}{\partial x^i} - D_s D_t \frac{\partial}{\partial x^i} &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{ds} \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{ds} \left[R \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \\
&= R\,(T, S)\, \frac{\partial}{\partial x^i},
\end{aligned}
$$

kde v poslední rovnosti jsem využili faktu, že křivost je $(1,3)$–tenzorové pole. Po dosazení výpočtu do (2.3) je důkaz hotov. □

Definice 13 (Jakobiho pole)**.** *Nechť $\gamma : [0, l] \to M$ je geodetická křivka, pak hladké vektorové pole J podél γ nazveme* Jakobiho polem, *pokud platí*

$$
-D_t D_t J + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0. \tag{2.4}
$$

Věta 11 (O Jakobiho poli)**.** *Mějme geodetickou křivku* $\gamma : [0, l] \to M$ *a* H *variaci přes ni. Pak variační pole asociované s* H *je zároveň Jakobiho polem.*

Důkaz. Všimněme si nejprve, že $D_tT = 0$. Potom i $D_sD_tT = 0$ pro každé $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l]$. Počítejme za pomoci předchozího lemmatu

$$\begin{aligned} 0 = -D_sD_tT &= -D_tD_sT + R(T, S)T \\ &= -D_tD_tS + R(T, S)T. \end{aligned}$$

Položme $s = 0$, pak $J(t) := S(0, t)$, a $T(0, t) = \dot\gamma(t)$. Tedy J splňuje rovnici (2.4) a je Jakobiho polem. □

Věta 12 (O existenci a jednoznačnosti Jakobiho pole)**.** *Mějme geodetickou křivku* $\gamma : [0, l] \to M$, $a \in [0, l]$ *a bod* $m = \gamma(a)$. *Pak pro libovolné dva vektory* $u, v \in T_mM$ *existuje právě jedno Jakobiho pole* J *podél* γ *takové, že* $J(a) = u$ *a* $D_tJ(a) = v$.

Důkaz. Nejprve uvažujme ortonormální bázi $\{E_1, \ldots, E_n\}$ v T_mM takovou, že $E_1 = \dot\gamma(a)$. Poté tuto bázi rozšíříme paralelně podél γ na ortonormální systém $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ vektorových polí podél γ. Rozepíšeme-li $J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)E_i(t)$, kde f_i jsou hladké funkce na $[0, l]$, platí

$$D_tD_tJ(t) = \sum_{i=1}^n \ddot f_i(t)E_i(t)$$

neboť $D_tE_i = 0$ a dále

$$R(\dot\gamma, J)\dot\gamma = \sum_{i=1}^n g(R(\dot\gamma, J)\dot\gamma, E_i)E_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_jg(R(\dot\gamma, E_j)\dot\gamma, E_i) \right) E_i.$$

Nyní po dosazení do vztahu (2.4) pro Jakobiho pole získáme

$$-\ddot f_i + \sum_{j=1}^n f_jg(R(\dot\gamma, E_j)\dot\gamma, E_i) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, n.$$

Tím jsme získali soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu pro funkce f_i. Za použití pouček o existenci a jednoznačnosti řešení takových rovnic, viz [Pontryagin, 1962], obdržíme větu. □

Nyní naopak ke geodetické křivce a Jakobiho poli hledejme variaci.

Věta 13. *Mějme geodetickou křivku* $\gamma : [0, l] \to M$ *a Jakobiho pole* J *podél* γ. *Pak existuje variace* H *podél* γ *taková, že* J *je variační pole asociované s* H.

Důkaz. Sestrojíme variaci H podél $\gamma(t)$ tak, aby variační Jakobiho pole J s ní bylo asociované. Pro $\varepsilon > 0$ vezměme libovolnou hladkou křivku $\eta(s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ takovou, že $\eta(0) = \gamma(0)$ a $\dot\eta(0) = J(0)$. Dále, nechť $X_0(s)$ a $X_1(s)$ jsou paralelní vektorová pole podél η taková, že $X_0(0) = \dot\gamma(0)$ a $X_1(0) = D_tJ(0)$. Položme $X(s) := X_0(s) + sX_1(s)$. Konečně definujme $H(s, t) := \exp_{\eta(t)}(tX(s))$. Z konstrukce je patrné, že H je variací přes geodetickou křivku γ. Tedy dle Věty 11 je $S(0, t)$ Jakobiho pole.

Počítejme

$$T(s, 0) = d(\exp_{\eta(s)})_{0_{\eta(s)}}(X(s)) = X(s).$$

Za použití Lemmatu 10(a) pak postupně dostaneme

$$D_t S(0,0) = D_s T(0,0) = D_s X(0) = D_t J(0).$$

Jelikož $H(s,0) = \eta(s)$, tak

$$S(0,0) = \dot{\eta}(0) = J(0).$$

Tudíž S a J jsou vektorovými poli podél γ se stejnými počátečními podmínkami, a tak dle Věty 12 jsou totožná. □

Důsledek 14. *Mějme bod $m \in M$ a dva vektory $u, v \in T_m M$. Dále uvažujme geodetickou křivku $\gamma : [0,l] \to M$ takovou, že $\gamma(t) = \exp_m(tv)$, a Jakobiho pole J podél γ s počátečními podmínkami $J(0) = 0$ a $D_t J(0) = u$. Pak pro všechna $t \in [0,l]$ platí*

$$J(t) = d(\exp_m)_{tv}(tu).$$

Důkaz. Důsledek získáme, zvolíme–li v důkazu předchozí věty speciálně η jakožto konstantní křivku procházející bodem m, dále pak konstantní vektorová pole X_0 a X_1 taková, že $X_0(0) = v$ a $X_1(0) = u$. Z toho máme, že $H(s,t) = \exp_m(t(v + su))$, a tak $J(t) = S(0,t) = d(\exp_m)_{tv}(tu)$. □

Lemma 15. *Mějme geodetickou křivku $\gamma : [0,l] \to M$ a Jakobiho pole X a Y podél γ. Pak funkce $g(D_t X, Y) - g(X, D_t Y)$ je konstantní na $[0,l]$. Speciálně $g(X, \dot{\gamma}(t)) = at + b$, kde a, b jsou nějaké konstanty.*

Důkaz. Abychom ukázali konstantnost dané funkce, tak derivujme podle t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(g(D_t X, Y) - g(X, D_t Y)) &= (g(D_t D_t X, Y) + g(D_t X, D_t Y)) \\ &\quad - (g(D_t X, D_t Y) + g(X, D_t D_t Y)) \\ &= g(R(\dot{\gamma}(t), X)\dot{\gamma}(t), Y) - g(X, R(\dot{\gamma}(t), Y)\dot{\gamma}(t)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

kde jsme nejprve využili rovnosti (1.2) z definice Riemannovy konexe, pak vztahu (2.4) pro Jakobiho pole a nakonec symetrie tenzoru křivosti z Věty 9(e).

Nyní budeme dokazovat druhou část věty. Snadno lze nahlédnout, že $\dot{\gamma}$ je Jakobiho polem podél γ, neboť dosadíme-li $\dot{\gamma}$ do rovnice (2.4) pro Jakobiho pole, tak získáme $D_t D_t \dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 + 0 = 0$. Za pomoci předchozí části počítejme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(g(X, \dot{\gamma}(t))\Big) &= g(D_t X, \dot{\gamma}(t)) + g(X, D_t \dot{\gamma}(t)) \\ &= g(D_t X, \dot{\gamma}(t)) - g(X, D_t \dot{\gamma}(t)) \\ &= C,\end{aligned}$$

kde C je nějaká konstanta. Z toho již plyne zbývající část věty. □

Poznámka. Pokud $g(J(0), \dot{\gamma}(0)) = g(D_t J(0), \dot{\gamma}(0)) = 0$, tak dle předchozího Lemmatu platí, že $g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$, kde jsme nyní Jakobiho pole X označili $J(t)$.

Věta 16 (Gauss)**.** *Mějme bod $m \in M$ a dva vektory $u, v \in T_m M$. Dále uvažujme geodetickou křivku $\gamma : [0,l] \to M$ takovou, že $\gamma(t) = \exp_m(tv)$. Pak platí*

$$g_{\gamma(t)}(d(\exp_m)_{tv}(u), d(\exp_m)_{tv}(v)) = g_m(u,v).$$

Důkaz. Nejprve si všimněme, že $d(\exp_m)_{tv}(v) = \dot\gamma(t)$, a tudíž i $\dot\gamma(0) = v$. Dle Důsledku 14 pak pro Jakobiho pole J podél γ s počátečními podmínkami $J(0) = 0$ a $DJ_t(0) = u$ platí, že $d(\exp_m)_{tv}(u) = \frac{1}{t}J(t)$ pro $t \neq 0$.

Zároveň jelikož γ je geodetická křivka, tak z Lemmatu 15 a faktu, že $J(0) = 0$, máme

$$g_{\gamma(t)}(J(t), \dot\gamma(t)) = Ct, \tag{2.5}$$

kde C je nějaká konstanta.

Tudíž

$$C = \frac{d}{dt}\Big(g_{\gamma(t)}(J(t), \dot\gamma(t))\Big) = g_{\gamma(t)}(D_tJ(t), \dot\gamma(t)).$$

Jelikož C je konstanta, tak i

$$C = g_{\gamma(0)}(D_tJ(0), \dot\gamma(0)) = g_m(u, v).$$

Konečně za použití (2.5), získáme

$$g_{\gamma(t)}(d(\exp_m)_{tv}(u), d(\exp_m)_{tv}(v)) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{1}{t}J(t), \dot\gamma(t)\right) = C = g_m(u, v).$$

Tím jsme hotovi. □

2.3 Killingova–Hopfova věta

Nyní se budeme zajímat o variety s konstantní sekcionální křivostí.

Definice 14 (Úplná Riemannova varieta)**.** *Riemannovu varietu (M, g) nazveme* úplnou *pokud pro každou geodetickou křivku $\gamma : I \to M$ existuje její rozšíření na celé $\mathbb{R}$, jež je geodetickou křivkou.*

Uvedeme definici základního předmětu naší práce.

Definice 15 (Prostorové formy)**.** Prostorovou formou *budeme rozumět úplnou Riemannovu varietu s konstantní sekcionální křivostí.*

Následující věta je někdy kvůli svému lokálnímu charakteru nazývána Riemannovou verzí Killingovy–Hopfovy věty .

Věta 17 (Killing–Hopf)**.** *Každé dvě prostorové formy (M, g) a $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ téže dimenze, které mají stejnou sekcionální křivost, jsou lokálně izometrické.*

Předtím než uvedeme důkaz předchozí věty, tak prozkoumejme jakého tvaru jsou Jakobiho pole na varietách s konstantní sekcionální křivostí a to kladnou, zápornou nebo nulovou.

Uvažujme Riemannovu varietu M s konstantní sekcionální křivostí k a geodetickou křivku $\gamma : [0, l] \to M$, která je parametrizovaná obloukem. Nakonec mějme Jakobiho pole J podél γ takové, že $g(\dot\gamma(t), J(t)) = 0$ pro $t \in [0, l]$ (viz Poznámku za Lemmatem 15). Tudíž pro každé vektorové pole T podél γ postupně díky vztahu (2.2) máme

$$g(R(\dot\gamma, J)\dot\gamma, T) = k\Big(g(\dot\gamma, J)g(\dot\gamma, T) - g(\dot\gamma, \dot\gamma)g(J, T)\Big) = -kg(J, T) = g(-kJ, T).$$

Za použití definice Jakobiho pole obdržíme

$$D_tD_tJ + kJ = 0. \tag{2.6}$$

Nechť nyní $E_1(t), E_2(t)$ jsou paralelní vektorová pole podél γ parametrizovaná obloukem a $g(\dot\gamma(t), E_i(t)) = 0$ pro $t \in [0, l], i \in \{1, 2\}$, a nechť $E_1(0)$ je násobkem $J(0)$ a $E_2(0)$ násobkem $D_tJ(0)$. Rovnice (2.6) v souřadnicích vede na

$$\ddot f_i + kf_i = 0 \quad \text{viz důkaz Věty 12,}$$

jejíž fundamentální systém je pro $k > 0$ tvaru $\{\sin(t\sqrt{k}), \cos(t\sqrt{k})\}$, pro $k = 0$ tvaru $\{1, t\}$ a pro $k < 0$ tvaru $\{\sinh(t\sqrt{-k}), \cosh(t\sqrt{-k})\}$. Celkem pak

$$J(t) = \begin{cases} C_1\cos(t\sqrt{k})E_1(t) + D_1\sin(t\sqrt{k})E_2(t), & \text{pokud } k > 0, \\ C_2E_1(t) + D_2tE_2(t), & \text{pokud } k = 0, \\ C_3\cosh(t\sqrt{-k})E_1(t) + D_3\sinh(t\sqrt{-k})E_2(t), & \text{pokud } k < 0 \end{cases}$$

jsou řešení obyčejné diferenciální rovnice (2.6) a kde $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ jsou nějaké konstanty.

Důkaz. (*Killingovy–Hopfovy věty*)
Zvolme dva body $m \in M$ a $\widetilde{m} \in M$. Budeme chtít zkonstruovat izometrii $F : V \to \widetilde{V}$, kde V a $\widetilde{V}$ jsou nějaké otevřené množiny.

Díky shodnosti dimenzí M a $\widetilde{M}$ existuje izometrie mezi vektorovými prostory $f : (T_mM, g) \to (T_{\widetilde{m}}\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Dále dle Lemmatu 8 existuje otevřená množina $U \subset T_mM$ v okolí 0_m taková, že $\exp_m$ je na U difeomorfizmus. Označme otevřené množiny $\widetilde{U} = f(U)$ (kde $V = \exp_m(U)$) a $\widetilde{V} = \exp_{\widetilde{m}}(\widetilde{U})$. Položme

$$F := \exp_{\widetilde{m}} \circ f \circ (\exp_m)^{-1} : V \to \widetilde{V}.$$

Zřejmě platí

$$F(m) = \exp_{\widetilde{m}}(f(\exp_m^{-1}(m))) = \exp_{\widetilde{m}}(f(0_m)) = \exp_{\widetilde{m}}(0_{\widetilde{m}}) = \widetilde{m}.$$

Dále dle vlastností totálního diferenciálu pro složené a inverzní funkce máme

$$\begin{aligned} (dF)_m &= (d\exp_{\widetilde{m}})_{0_{\widetilde{m}}} \circ (df)_{0_m} \circ d(\exp_m)_m^{-1} \\ &= (d\exp_{\widetilde{m}})_{0_{\widetilde{m}}} \circ (df)_{0_m} \circ (d\exp_m)^{-1}_{\exp_m^{-1}(m)} \\ &= (d\exp_{\widetilde{m}})_{0_{\widetilde{m}}} \circ (df)_{0_m} \circ (d\exp_m)^{-1}_{0_m} \\ &= id_{T_{\widetilde{m}}\widetilde{M}} \circ f \circ id^{-1}_{T_mM} \\ &= f. \end{aligned}$$

Nechť nyní n je libovolný bod z $V \setminus \{m\}$. Pak z definice V jako obrazu $\exp_m$ existuje geodetická křivka spojující m a n. Označme v její tečný vektor v $t = 0$, ji samotnou γ_v a nakonec t_0 bude značit hodnotu parametru, ve které nabývá n. Z definice F a exp plyne, že $F \circ \gamma_v$ je geodetická křivka, a označíme ji $\widetilde{\gamma}_{\widetilde{v}}$.

Uvažujme ortogonální rozklady

$$T_nM = \langle\dot\gamma_v(t_0)\rangle \oplus W \text{ a } T_{\widetilde{n}}\widetilde{M} = \langle\dot{\widetilde{\gamma}}_{\widetilde{v}}(t_0)\rangle \oplus \widetilde{W}.$$

Díky Gaussově lemmatu 16 je $d(\exp_m)_{t_0 v}$ izometrie $T_m M$ na $T_{\gamma_v(t_0)}M$. Tudíž $d(\exp_m)_{t_0 v}$ přenese ortogonální rozklad

$$T_m M = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp \text{ na } T_n M = \langle \dot{\gamma}_v(t_0) \rangle \oplus W.$$

Obdobně $(d \exp_{\widetilde{m}})_{t_0 \widetilde{v}}$ přenese ortogonální rozklad

$$T_{\widetilde{m}} \widetilde{M} = \langle \widetilde{v} \rangle \oplus \langle \widetilde{v} \rangle^\perp \text{ na } T_{\widetilde{n}} \widetilde{M} = \langle \dot{\widetilde{\gamma}}_{\widetilde{v}}(t_0) \rangle \oplus \widetilde{W}.$$

Nejprve ukážeme, že $(dF)_n$ je izometrie $\langle \dot{\gamma}_v(t_0) \rangle$ na $\langle \dot{\widetilde{\gamma}}_{\widetilde{v}}(t_0) \rangle$. Upravujme za pomoci faktů, že paralelní přenos zachovává délku a že f je izometrie $T_m M$ na $T_{\widetilde{m}} \widetilde{M}$,

$$g(\dot{\gamma}_v(t_0), \dot{\gamma}_v(t_0)) = g(v, v) = \widetilde{g}(\widetilde{v}, \widetilde{v}) = \widetilde{g}(\dot{\widetilde{\gamma}}_{\widetilde{v}}, \dot{\widetilde{\gamma}}_{\widetilde{v}}) = \widetilde{g}\Big((dF_n)(\dot{\gamma}_v(t_0), (dF_n)(\dot{\gamma}_v(t_0))\Big).$$

Nyní budeme chtít ukázat, že i $(dF)_{n|W}$ je izometrie W na $\widetilde{W}$. Zvolme libovolný vektor $u \in \langle v \rangle^\perp$ a položme $\widetilde{u} := f(u)$. Rozšiřme u a $\widetilde{u}$ na paralelní vektorová pole U a $\widetilde{U}$ podél γ_v respektive $\widetilde{\gamma}_{\widetilde{v}}$. Nyní označme J a $\widetilde{J}$ Jakobiho pole podél γ_v respektive $\widetilde{\gamma}_{\widetilde{v}}$ s počátečními podmínkami $J(0) = 0_m$ a $D_t J(0) = u$, respektive $\widetilde{J}(0) = 0_{\widetilde{m}}$ a $D_t \widetilde{J}(0) = \widetilde{u}$. Dle Důsledku 14 jsou Jakobiho pole tvaru $J(t) = d(\exp_m)_{tv}(tu)$ a $\widetilde{J}(t) = d(\exp_{\widetilde{m}})_{t\widetilde{v}}(t\widetilde{u})$.
Proto platí

$$(dF)_n(J(t_0)) = (dF)_n(d \exp_m)_{t_0 v}(t_0 u) = (d \exp_{\widetilde{m}})_{t_0 \widetilde{v}}(t_0 \widetilde{u}) = \widetilde{J}(t_0). \tag{2.7}$$

Zároveň jelikož M a $\widetilde{M}$ mají stejnou sekcionální křivost k, tak dle příkladu před důkazem Věty můžeme zjistit, jakého tvaru jsou J a $\widetilde{J}$. Díky počátečním podmínkám pak platí

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}} U(t), & \text{pokud } k > 0, \\ tU(t), & \text{pokud } k = 0, \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}} U(t), & \text{pokud } k < 0. \end{cases}$$

Podobu $\widetilde{J}(t)$ zjistíme analogicky. Díky tomu a výpočtu výše (2.7) máme, že

$$g(J(t_0), J(t_0)) = \widetilde{g}(\widetilde{J}(t_0), \widetilde{J}(t_0)).$$

Celkem jsme tedy ukázali, že $(dF)_n$ je izometrie $T_n M$ na $T_{\widetilde{n}} \widetilde{M}$. Protože n byl libovolný bod z $V \setminus \{m\}$, tak i F je izometrie V na $\widetilde{V}$. $\square$

Některé použité symboly

- Φ_* i $d\Phi$ — push-forward zobrazení Φ
- Φ^* — pull-back zobrazení Φ
- $\mathrm{Tr}(A)$ — stopa matice A
- $\mathrm{Sym}(2,2;\mathbb{R})$ — vektorový prostor reálných symetrických matic 2×2
- $\mathfrak{X}(M)$ — prostor všech hladkých vektorových polí na varietě M
- A^0 — vnitřek podmnožiny A metrického prostoru
- $\dot{f}$ i $\frac{df}{dt}$ — derivace reálné funkce f reálné proměnné
- $\frac{d^2 f}{ds\,dt}$, $\frac{d^2 f}{dt^2}$ a $\frac{d^2 f}{ds^2}$ — derivace reálné funkce f dvou reálných proměnných

Seznam použité literatury

BURNS, K. a GIDEA, M. (2005). *Differential geometry and topology with a view to dynamical systems.* První vydání. Chapman and Hall/CRC. ISBN 1-58488-253-0.

DO CARMO, P. (1993). *Riemannien geometry.* Druhé vydání. Birhäuser, Boston. ISBN 0-8176-3490-8.

KATO, T. (1982). *A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators.* První vydání. Springer–Verlag, Berlin. ISBN 978-1-4612-5702-8.

KOWALSKI, O. (2001). *Úvod do Riemannovy geometrie.* Druhé vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0377-2.

LEE, J. M. (1997). *Riemannian manifolds, an introduction to curvature.* Druhé vydání. Springer, New York. ISBN 0-387-98322-8.

LEE, J. M. (2002). *Introduction to smooth manifolds.* Druhé opravené vydání. Springer, New York. ISBN 0-387-95495-3.

PONTRYAGIN, L. S. (1962). *Ordinary differential systems.* První vydání. Elsevier Inc. ISBN 978-0-08-009699-5.