

Početní část zkoušky 7. 2. 2012

Jméno:

Skupina:

1. (6b)

Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \right)^{\frac{1}{\sinh(\frac{\sin^2 x}{x})}}.$$

2. (8b) Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+1} + 2}{(\sqrt[3]{x+1} + 1)(\sqrt[3]{x+1} - 1)} dx.$$

3. (7b) Dokažte, že pro všechna x reálná kladná platí

$$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < e.$$

4. (9b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

včetně co nejpřesnějšího načrtnutí grafu funkce.

Teoretická část zkoušky 7. 2. 2012

Jméno:

Skupina:

1. (2b) Uveďte definice f je rostoucí na $[a, b]$, f je neklesající na $[a, b]$ a f je konkávní na $[a, b]$.
2. (6b) Nechť f je funkce, definovaná na $[a, b]$ a taková, že f' existuje na (a, b) . Zjistěte, zda platí (tj. buď výrok dokažte, nebo nalezněte protipříklad)
 - I) (2) f je rostoucí na $[a, b] \implies f' > 0$ na (a, b)
 - II) (3) $f' > 0$ na $(a, b) \implies f$ je rostoucí na $[a, b]$
 - III) (1) $f' > 0$ na (a, b) , f je spojitá na $[a, b] \implies f$ je rostoucí na $[a, b]$.
3. (7b) Formulujte a dokažte základní větu analýzy.
4. (5b) (3) Dokažte jakkoliv, ale správně, že $f \circ g$ je spojitá, pokud f a g jsou spojité. Napište znění všech vět, které při důkazu použijete.
(2) Dokažte nebo vyvráťte: Množina všech dvakrát diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ takových, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, je vektorový prostor (napište vůči jakým operacím).