Matematika pro fyziky I

2. 10. 2013

Obsah

1. Variační počet
2. Posloupnosti a řady funkcí, stejnoměrná konvergence
3. Základy teorie míry a Lebesgueův integrál
4. Integrály na k-plochách. Diferenciální formy

1. VARIAČNÍ POČET

Pozn. 1. Víme, že fce spojitá na $\langle a,b \rangle \Rightarrow f$ má extrém na $\langle a,b \rangle$

2. nutná podm.: Nechť $f' \exists$ na (a,b). Pak f má lokální extrém v $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

3. Postačující podm.: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokální minimum v x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokální maximum v x_0

4. Víme, že spojitá f na $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (komp. mna) $\Rightarrow f$ má extrém v K

nutná podmínka: Nechť $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall x \in K$, pak f v x_0 má lokální extrém $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

dále (nechť $df \exists$ v K) $\Rightarrow ((df)_{x_0} = 0 \Leftarrow$ v x_0 je extrém f)

dále (nechť $(df)(x,v) \exists$) $\forall x \in K$ pro nějaké $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ((df)(x_0,v) = 0 \Leftarrow$ v x_0 je extrém)

postačující podmínky: $\mathrm{Hess}(f)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)(x)_{i,j=1,\dots,n}$ p.d. $\Rightarrow$ v x_0 má f minimum; n.d. $\Rightarrow$ v x_0 má f maximum

Úloha variačního počtu: cílem je vyšetřování extrémů/lokálních extrémů funkcí f:

$f: X \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$, kde X je normovaný prostor, např. prostor fcí

(je to tedy zobecnění předchozího)

$X = \mathbb{R}$ (1. semestr)

$X = \mathbb{R}^n$ (2. semestr)

Definice 1.0

X je normovaný prostor X je v.p. a $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ norma, tj. zobrazení splňující:

1. $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \forall a,b \in X$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| \quad \forall a \in X$
3. $\|a\| \geq 0 \quad \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \forall a \in X$

př. • $X = \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{(v,v)}$ $\quad (v,w) = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} w^i e_i$

• $C(\langle a,b \rangle) = \{ f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R} \mid f$ je spojitá na $\langle a,b \rangle \}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$
$(cf)(x) = c f(x)$, $c \in \mathbb{C}$
$0 = (x \mapsto 0, x \in \langle a,b \rangle)$
$(-f)(x) = -(f(x))$

$\|\cdot\| : \mathcal{C}(\langle a,b \rangle) \to \mathbb{R}$ $\quad \|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \langle a,b \rangle\}$
je dobře definovaná, neb dle pozn. výše bod 1 má f extrém v $\langle a,b \rangle \Rightarrow f$ je omezená $\Rightarrow$
$\sup\{|f(x)|, x \in \langle a,b \rangle\} < +\infty$

- $\mathcal{C}^{(1)}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}/\mathbb{C} \mid 1$ derivace f je spojitá v každém bodě $I\}$
$\mathcal{C}^{(k)}(I) := \{f : I \to \mathbb{R}/\mathbb{C} \mid k$-tá derivace f je spojitá v každém bodě $I\}$
$\|f\|_{\mathcal{C}(I)} = \sup\{|f(x)| + |f'(x)| \mid x \in \langle a,b \rangle\}$

Dk: $(\mathcal{C}^1(I), \|\ \|_{\mathcal{C}^1(I)})$ je normovaný prostor (domácí úloha)
$A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$
a má smysl o těchto množinách

Pozn: Funkcím definovaným na prostoru fcí se říká funkcionály
! NEMUSÍ BÝT LINEÁRNÍ

Př: • $0 : X \to \mathbb{R}$, $0(z) = 0 \in \mathbb{R}$
• $\int : \mathcal{C}^{(1)}(\langle a,b \rangle) \to \mathbb{R}$
$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\langle a,b \rangle)$ lineární

funkcionální analýza spíš zkoumá lineární funkcionály, variační počet nelineární
u lineárních funkcionálů nemá smysl zjišťovat extrémy

Definice 1.1
$(X, \|\ \|)$ je normovaný prostor, $\Phi : X \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ je funkcionál. Řekneme, že Φ má Fréchetův [frešetův] diferenciál v $a \in X$, právě tehdy když $\exists A_a : X \to X$ lineární, že
$$\Phi(a+v) - \Phi(a) - A_a(v) = \sigma(\|v\|),\ v \to 0 \quad \text{(ale už na obecném normovaném prostoru)}$$
Řekneme, že Φ má Gateâuxovu [gatóvu] derivaci v a ve směru v, právě tehdy když
$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(a+tv) - \Phi(a)}{t}$$

značení: Fréchetův diferenciál $(D\Phi)_a(v)$ $[= A_a v]$. Někdy $(D\Phi)(a)(v)$
Gateaux $(D\Phi)(a,v) := \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(a+tv) - \Phi(a)}{t}$

Pozn: 1, definice Fréchetova diferenciálu: z def. σ: $\lim \frac{\overbrace{|\Phi(a+v) - \Phi(a) - A_a(v)|}^{:= g(\|v\|)}}{\|v\|} = 0$
limita v normovaných prostorech
$\Longrightarrow g(\|v\|) = \|v\|\, h(v)$, kde $h(v) = \frac{g(\|v\|)}{\|v\|}$, $v \neq 0$
$h(v) = 0 \Leftarrow v = 0$ $\Big\}$ h je spojitá

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in P_\delta(v_0), \psi(x) \in U_\varepsilon(w_0)$

$\iff \lim_{x \to v_0} \psi = w_0$, $U_\varepsilon(w_0) = \{x \in X \mid \|x - w_0\|_Y < \varepsilon\}$, kde $v_0, w_0 \in X, Y$

limita v normovaném prostoru

$\psi : X \to Y$

Věta 1.1

① ∃ Fréchetův diferenciál v $a \Rightarrow \phi$ sp. v a. ② ∃ Fréchetův diferenciál v $a \Rightarrow (\forall v \in X)$ (∃ Gateauxova derivace v a ve směru v) ③ Existuje-li Fréchetův diferenciál $(D\phi)_a$ (funkcionálu $\phi : X \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$) v bodě $a \Rightarrow (D\phi)_a(v) = (D\phi)(a; v)\ \forall v \in X$

Dk: ① $\lim_{v \to 0} \phi(a+v) = \lim_{v \to 0} (\phi(a) + A_a(v) + \|v\| h(v)) = \phi(a) + A_a(0) + 0 = \phi(a)$

$\Rightarrow \phi$ je spojitá v a $[f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)]$

② Stačí ukázat, že $(D\phi)(a, v) = (D\phi)_a(v)$

Víme: $\phi(a+v) - \phi(a) = (D\phi)_a(v) + \|v\| h(v)$

$v = t\tilde{v}$ $\quad \phi(a + t\tilde{v}) - \phi(a) = (D\phi)_a(t\tilde{v}) + \|\tilde{v}\| |t| h(\tilde{v}t)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(a + t\tilde{v}) - \phi(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \left[(D\phi)_a(\tilde{v}) + \|\tilde{v}\| \operatorname{sgn}(t) h(\tilde{v}t) \right] = (D\phi)_a(\tilde{v}) + \|\tilde{v}\| \operatorname{sgn}(t) 0$$

Avšak levá strana je $(D\phi)(a, \tilde{v})$

$(D\phi)(a, \tilde{v}) = A_a(\tilde{v}) \Rightarrow (D\phi)(a, v) = \underbrace{A_a(v)}_{(D\phi)_a}$

③ doma

Věta 1.2

Nechť $\phi : X \to \mathbb{C}$ je funkcionál, $y_0 \in X$, $(D\phi)(y_0, v)$ existuje pro nějaké $v \in X$, y_0 je lokální extrém ϕ. Pak $(D\phi)(y_0, v) = 0$.

„Začíná tu být méně zima, už asi budeme topit." ©

Matematika pro fyziky

3. 10. 2013

Dk. $\varphi_v(t) := \Phi(a+tv),\ t\in\mathbb{R}$

Z toho, že Φ má extrém v a $\Rightarrow$ φ_v má extrém v 0 $\left(\underbrace{\Phi(a+tv)}_{\varphi_v(t)} \geq \Phi(a) = \varphi_v(0)\right)$

$\overset{1.\,sem}{\Rightarrow}$ $\varphi_v'(0) = 0$, pokud $\exists\ \varphi_v'(0)$

$\varphi_v'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(a+hv) - \Phi(a) = \varphi_v(0)}{h} = (D\Phi)(a,v)$, jež pp že existuje, tj. $(D\Phi)(a,v) = 0$ □

pozn. $a = y_a$ z věty

Pokud vím, že $\exists$ derivace (Gateauxova) ve všech směrech v v bodě a, pak dle V1.2 je i $(D\Phi)(a,v) = 0\quad \forall v\in X$

z V1.1: [Existuje-li $(D\Phi)_a : X \to \mathbb{C}$, pak $\exists$ i Gateauxova derivace

a $(D\Phi)_a(v) = (D\Phi)(a,v) = 0$ dle první části pozn. resp. V1.2

Označení: $(D^2\Phi)(a,v,w) = ?$

symetrická bilineární forma, kvadratická odchylka

Nechť $\exists$ $(D\Phi)(a,v)$

$(D\Phi)(a,\cdot) : X \to \mathbb{C}$

$v \mapsto (D\Phi)(a,v)$, $v \in X$

$(D\Phi)(a,-)$ je tedy fciál, je tedy definovaná jeho Gateauxova derivace ve směru w, a tuto derivaci menujeme 2. Gateauxovou derivací Φ ve směru v, w.

$(D^2\Phi)(a,v,w)$

Gateauxova derivace se ve fyzice značí $(\delta\Phi)_a v$ nebo $(\delta_v\Phi)a$ a říkáme jí variace ve směru

Věta 1.3

$\Phi : X \to \mathbb{C}/\mathbb{R}$, $a\in X$, $v\in X$. Pp. že $(D\Phi)(a,v)$ $\overset{\text{a je rovna nule}}{\exists}$ a $\exists$ i $(D^2\Phi)(a,v,v)$. Pak

a) $(D^2\Phi)(a,v,v) > 0$ $\Rightarrow$ v a je lokální extrém, lokální minimum

b) $(D^2\Phi)(a,v,v) < 0$ $\Rightarrow$ v a je lokální maximum

Dk: b) $\varphi_v(t) := \Phi(a+tv)$

$\varphi_v'(0) = (D\Phi)(a,v)$ $\quad \varphi_v''(0) =$ [crossed out]

pomocný výpočet:

$\frac{d}{dt}\varphi_v'(t)\Big|_{t=0} =$

$\varphi_v'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_v(t+h) - \varphi_v(t)}{h} =$

$= \frac{d}{dt}(D\Phi)(a+tv,v)\Big|_{t=0} = (D^2\Phi)(a,v,v)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(a+(t+h)v) - \Phi(a+tv)}{h} = (D\Phi)(a+tv,v)$

$\Rightarrow$ Pramora věta o Taylorově polynomu

$$\varphi_v(t) = \varphi_v(0) + \frac{1}{1!}\varphi_v'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi_v''(0)t^2 + o(t^2)$$
$$\varphi_v(t) = \varphi_v(0) + (D\Phi)(a,v)t + \frac{1}{2!}\varphi_v''(0)t^2 + o(t^2)$$
$$\varphi_v(t) = \varphi_v(0) + 0 + \frac{1}{2}\varphi_v''(0)t^2 + o(t^2)$$

dle pp.

$$\Phi(a+tv) = \Phi(a) + \frac{t^2}{2}\varphi_v''(0) + o(t^2) \qquad \Phi(a+w) = \Phi(a) + \frac{1}{2}\underbrace{\left|\frac{w}{v}\right|^2}_{t^2}\varphi_v''(0) + o(t^2)$$

↓ čísla $w = tv$

$$\Phi(a+w) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2\varphi_v''(0) + o(t^2)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(a+w) - \Phi(a) - \frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2\varphi_v''(0)}{t^2} = 0 \qquad \left|\frac{\Phi(a+w) - \Phi(a) - \frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2\varphi_v''(0)}{t^2}\right| < \varepsilon \quad t\in(-\delta,\delta)$$

$$\varepsilon\delta^2 < -\varepsilon t^2 < \Phi(a+w) - \Phi(a) - \frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2\varphi_v''(0) < \varepsilon t^2 < \varepsilon\delta^2$$

$\Phi(a+w) - \Phi(a) +$ kladné číslo $\to 0$ libovolně malé číslo

„$\Phi(a+w) - \Phi(a) = -$kladné číslo"

$$\Phi(a+w) < \varepsilon\delta^2 + \Phi(a) + \frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2\varphi_v''(0) = \varepsilon\delta^2 + \Phi(a) + \frac{1}{2}t^2\varphi_v''(0)$$

$\Phi(a+w) \leq (\varepsilon + \frac{1}{2}\underline{\varphi_v''(0)})\delta^2 + \Phi(a)$ ε zvolím aby $\varepsilon + \frac{1}{2}\varphi_v''(0)$ bylo stále záporné

if $> 0 \Rightarrow \Phi(a+w) > \Phi(a)$ $\Rightarrow$ ve $\Phi(a)$ je ~~minimum~~ maximum

$$\Phi(a+w) > -\varepsilon\delta^2 + \Phi(a) + \frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2\varphi_v''(0) = \delta^2(-\varepsilon + \frac{1}{2}\varphi_v''(0)) - \Phi(a)$$

$\Rightarrow$ ve $\Phi(a)$ je minimum

∎

1.1 Funkcionál akce

$\Phi_f : \mathcal{C}^{(k)}(\langle a,b\rangle) \to R/C$, $f\in\mathcal{C}^{(km)}(\langle a,b\rangle\times R^2)$

$\Phi_f(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$ klasický funkcionál, neboli funkcionál akce

Fyzikální interpretace: f .. Lagrangeova hustota ($\mathcal{L}$)

x .. čas (t)

y .. souřadnice v kontinuálním prostoru

$$S_{\mathcal{L}}(x) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, x^1(t), \dots, x^m(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^m(t))\,dt \quad \text{eventuelně, pro vícedimenzionální čas}$$

„Je to tedy pro ty, kdo tady teď botanizují, kdo tu matematizují"

Úkolem variačního počtu je nyní tedy hledání lokálních extrémů Φ_f

→ hledání stacionárních bodů $\Phi_f \equiv \{y_0 \mid (D\Phi_f)(y_0, v) = 0\}$

→ eventuelní testování $(D^2\Phi_f)(a, v) < 0$

P_1

$$\underset{\text{směr}}{(D\Phi)(y_0, h)} = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_f(y_0 + th) - \Phi_f(y_0)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_f(y_0 + th) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_a^b f(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x))\, dx =$$

> 0

$\mathcal{C}^{(1)}(\langle a,b\rangle)$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x))\, dx = \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underset{\frac{dx}{dt}}{0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x))\, h(x) +$$

derivace složené fce + užus $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x))\, h'(x) \Big) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x))\, h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x))\, h'(x)\, dx$$

Pp. $\exists\ \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f$ tedy dostatečně hladkou fci

$\exists\ y_0',\ k \geq 1,\ m \geq 1$

Nepřesné:

$$\underbrace{\int_a^b (\partial_y f)(x, y_0(x), y_0'(x))\, h(x)\, dx}_{(*)} + \int_a^b (\partial_z f)(x, y_0(x), y_0'(x))\, h'(x)\, dx = (*) + \Big[(\partial_z f)(x, y_0(x), y_0'(x))\, h(x) \Big]$$

$$- \int_a^b \frac{d}{dx} \underbrace{f(x, y_0(x), y_0'(x))}_{(\partial_z f)}\, h(x)\, dx$$

nepřesnost: začneme pp. že tato fce má derivaci podle x

pp. - li $\exists$ Gateauxova derivace ve všech směrech $\Longrightarrow \exists$ -||- ve všech směrech z prostoru

$\mathcal{C}^{(1)}(I) = \{h \in \mathcal{C}^1(I) \mid h(a) = h(b) = 0\}$ kde $I = \langle a,b\rangle$

Proto tedy $h\,(D\Phi_f)(y_0, h) = \int_a^b (\partial_y f)(x, y_0(x), y_0'(x))(h(x)) + \Big[(\partial_z f)(x, y_0(x), y_0'(x)) \big(\overset{0}{h(b)} - \overset{0}{h(a)} \big) \Big] -$

$$- \int_a^b (\partial_z f)(x, y_0(x), y_0'(x))\, h(x)\, dx = \int_a^b \underbrace{\Big[(\partial_y f)(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} (\partial_z f)(x, y_0(x), y_0'(x))\Big]}_{EL(f)} h(x)\, dx \overset{N.P.}{=} 0$$

$\frac{d}{dx}$

pokud bychom viděli $\int fg = (f, g) \quad EL(f) = 0$

Matematika pro fyziky I

9.10.2013

Minule: $EL(f)(y_0, h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x))\right)\right) h(x)\,dx = 0$

$h \in \mathcal{C}_0^1(\langle a,b\rangle)$ (N.P. $D\mathcal{L}_f(y_0, h) = 0$)

$\int$ je skalární součin (to zatím neumíme dk.) $\Rightarrow \int f(x) h(x)\,dx = 0 \ \forall h \in X \Rightarrow f(x) = 0$

Lemma 1.4 Zákl. lemma var. počtu I ($\langle a,b\rangle$)

Nechť $\beta \in \mathcal{C}^0(\langle a,b\rangle)$. Pokud $(\forall h \in \mathcal{C}_0^1)\left(\int_a^b \beta(x) h'(x)\,dx = 0\right) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \beta(x) = c \ \forall x \in \langle a,b\rangle$

Dk: $H(x) = \int_a^x \beta(\xi)\,d\xi - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(\bar x)\,d\bar x\right)(x-a)$, $\exists$ neb β je spojité (viz Riemannův int.)

$H(a) = 0,\ H(b) = 0 \ \Big|\ H'(x) = \beta(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,dx$ pozn. neurč. int. je definován jako antiderivace a urč. int. je obsah

$\Rightarrow H \in \mathcal{C}_0^1(\langle a,b\rangle)$ což je fce spojitá

$$\int_a^b \beta(x) H'(x) = 0 = \int_a^b \beta(x)\Big(\beta(x) - \underbrace{\frac{1}{-a+b}\int_a^b \beta(x)\,dx}_{=\gamma}\Big)dx \quad (*)$$

tak $$\underset{(**)}{\int_a^b \gamma(\beta-\gamma)\,dx} = \int_a^b \left[\frac{1}{-a+b}\int_a^b\beta(x)\,dx\right]\left(\beta(\bar x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,dx\right)d\bar x = \int_a^b \left[\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \beta(x)\,dx\right)^2 -\right.$$ ZBYTEČNÉ

$$\left\{ - \left[\left(\int_a^b \beta(x)\,dx\right)\frac{1}{b-a}(b-a)\right] = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\beta(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{\beta(x)}{b-a}\,dx - (b-a)\right) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,dx\right)\right\}$$

$$\int_a^b\left[\beta(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b\beta(x)\,dx\right]dx = \gamma\left(\int_a^b \beta(x)\,dx - \frac{b-a}{b-a}\int_a^b\beta(x)\,dx\right)dx = 0$$

$$(*) - (**) = 0 - 0 = 0 = \int_a^b \big(\beta(\beta-\gamma) - \gamma(\beta-\gamma)\big)dx = \int_a^b (\beta-\gamma)^2\,dx = 0$$

Nyní pp. pro $\xi, \bar x$: $(\beta-\gamma)(x_0) \neq 0$, $\exists x_0 \in \langle a,b\rangle$ BÚNO $\underbrace{(\beta-\gamma)(x_0)}_{\zeta} > 0$

$(\beta-\gamma)$ je všude spojité, $\exists \delta > 0,\ (\beta-\gamma)(x) \in U_\varepsilon(\zeta) \ \forall x \in U_\delta(x_0)$

$$\int_a^b (\beta-\gamma)^2\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(\beta-\gamma)^2\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (\zeta-\varepsilon)^2\,dx = 2\delta(\zeta-\varepsilon)^2 \neq 0 \quad \left(\varepsilon = \frac{\zeta}{2}\right)$$

↯ s pp. ∎

Lemma 1.5 Základní lemma var. p. II.

$\alpha,\beta \in \mathcal{C}^0(\langle a,b\rangle)\ \forall h \in \mathcal{C}^1_0(\langle a,b\rangle)\left(\int_a^b (\alpha(x)h(x)+\beta(x)h'(x))\,dx = 0\right)$ Pak

1, $\beta\in\mathcal{C}^1(\langle a,b\rangle)$

2, $\alpha=\beta'$ na $\langle a,b\rangle$

Základní věta mat. analýzy $\int_a^b f(\xi)\,d\xi = F(b)-F(a)$

Dk: $A(x)=\int_a^b \alpha(\xi)\,d\xi$ $\quad 0=\int_a^b(\alpha h+\beta' h)\,dx \overset{!}{=} \int_a^b (A'h+\beta h') = [Ah]_a^b - \int_a^b Ah' + \int_a^b \beta h' =$

$(Ah)(b)-(Ah)(a) = A(b)h(b)-A(a)h(a) = A(b)0 - A(a)0 = 0$

$=\int_a^b (\beta - A)h\ (=0)$ Ověřili jsme pp L1.4 $\Rightarrow \beta - A = \gamma$ konst.

$\beta\in\mathcal{C}^1(\langle a,b\rangle)$ neb $\beta=\gamma + A$ $\in\mathcal{C}^1$

cbd 1,

$\beta'(x)=A'(x)=\alpha(x)$ cbd 2, ∎

Věta 1.6 Euler-Lagrangeova rovnice

$f: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\langle a,b\rangle\times\mathbb{R}^2)$. Pokud $y_0\in\mathcal{C}^1(\langle a,b\rangle\times\mathbb{R}^2)\ (\forall h\in\mathcal{C}^1_0(\langle a,b\rangle))(D\mathcal{L}_f(y_0,h)=0)$,

pak 1, $\exists \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))$

2, $f_y - \frac{d}{dx}f_z = 0$ =: $EL(f)$

Dk: $\beta(x)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))$, $\alpha(x)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0(x),y_0'(x))$

víme $D\mathcal{L}_f=0 \iff \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\,dx = 0$ Dle L1.5 $\Rightarrow \beta\in\mathcal{C}^1(\langle a,b\rangle)$ $(\Rightarrow \exists \frac{d}{dx}\beta =$

$= \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z})$ $\Rightarrow \alpha=\beta'$ ($\iff$ EL rce) ∎

Pozn. • stacionarita $\Rightarrow$ y_0 řeší ODR 2. řádu, nutně má 2 derivaci

• $f(t,x(t),\dot x(t))$

$\frac{\partial f}{\partial y} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}=0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot x}=0 \iff \frac{\partial f}{\partial \dot x}=$ konst.

mat. $\quad$ fyz.

$f(t,x,\dot x)=g(x)\dot x$

• $f(y,z)$ $\quad f(x,\dot x)$

nedisipativní systémy $\quad$ dochází v nich k zachování energie

$EL = f - y' f_z = \text{konst.}$ Beltramiho rce

Dk: $\frac{d}{dx}(f - y' f_z) = \frac{\partial f}{\partial y} y_0' + \cancel{\frac{\partial f}{\partial z} y_0''} - \cancel{y_0'' f_z} - y_0' \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} y_0' + \frac{\partial f_z}{\partial z} y_0'' \right) =$

$= y_0' \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} f_z \right) \underset{EL}{=} 0$ když to nezávisí na x tak derivace tohoto výrazu je 0

Př) $\mathcal{L}(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

$f(x, y, z) = \frac{1}{2} m z^2 - \frac{1}{2} k y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \;/\; \frac{d}{dt}(m \dot{x}) = m \ddot{x}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -kx \quad m\ddot{x} + kx = 0$ Newtonova rce pružiny

↳ extremalizaci funkcionálu akce

kopl... DÚ

$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \dot{x}(m \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = E$

- Typicky se zabývají $f(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$, $f \in C^1(\langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$\mathcal{L}_f y = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y^1(t), \dots, y^n(t), \dot{y}^1(t), \dots, \dot{y}^n(t))\, dt$

$(D\mathcal{L}_f)(y_0, h) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}(t, x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots \dot{x}^n(t)) \, \dot{h}^i(t) \right) dt$

$\iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = 0} \quad \forall i = 1, \dots, n$

Matematika pro fyziky

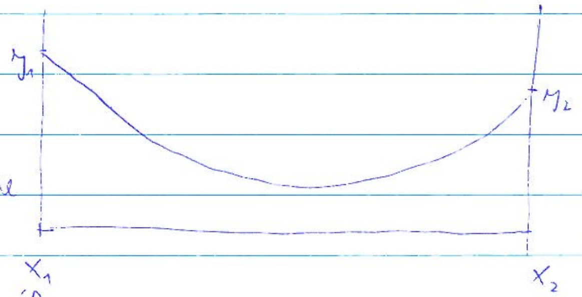
10. 10. 2013

Brachystochrona

- řetězovka

ne, katenoida

to je ne brachystochrona



$$l = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

$$\Phi(y) = \int_{P_1}^{P_2} y\,ds$$

- minimalizujeme potenciál

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx =: \Psi(y) \quad \text{konst} \qquad (D(\Phi-\lambda\Psi))(y,\lambda) = (D\Phi)(y,\lambda) \qquad (D(\lambda\Psi)=0)$$

$$\forall y \in C^1(\langle a,b\rangle) \cap \{f : \langle a,b\rangle \to C \mid \Psi(y) = l\}$$

stacionarita Φ je totéž co stac. $\Phi - \lambda\Psi$ (nulové body G. derivace)

$$\Theta(y) = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx - \lambda\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,dx$$

E-L rce: nedisipativní systém, nezávisí to na x $\overset{\text{Pozn.}}{\Longrightarrow}$ Beltramiho rovnice pro y.

y, z závisí

$$L - \dot q\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \text{konst.} \quad \text{tj.} \quad f - z\frac{\partial f}{\partial z} = \text{konst} \quad \text{(to je vlastně zákon energie)}$$

$$y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\left[y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = -\text{konst} = a$$

$\vdots$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{(y-\lambda)^2 - a^2}} = \frac{dx}{a}$$

JAK SE TO PŘESNĚ UDĚLÁ?

$$\text{int. typu } \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow{\text{subs}} y = \cosh \tilde a = \frac{e^{\tilde a} + e^{-\tilde a}}{2} = \cosh(\tilde a)$$

$$\int R(e^{bx})$$

$$y - \lambda = a\cosh\frac{x-b}{a} \qquad b \in R$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\left(\lambda' + \left(a\cosh\frac{x-b}{a}\right)'\right)^2 + 1}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\sinh^2\frac{x-b}{a} + 1}\,dx = l$$

! měl tam minus

minimalizace času, nejnižší těžiště

pro další nevyskytující se veličiny – další B. rce

Pozn. u Keplerova problému se zachovává délka, můžeme tedy izometricky měnit souřadnice ale tím L_f se nemění

$$\frac{1}{2}m\left((\dot{x}^1)^2+(\dot{x}^2)^2+(\dot{x}^3)^2\right)-\frac{1}{2}\frac{m\mathcal{H}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$$

$$O(3)=\{A: \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3 \mid (Av, Aw)=(v,w)\}$$

$$(v,w)=\sum_{i=1}^{3} v^i w^i$$

$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \Rightarrow M(f)$ - konst. (Noetherová) Analog $\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ = konst. (Beltramiho

$\frac{\partial L}{\partial A^i} \rightsquigarrow \vec{L}$ = konst

$\in O(3)$

2. POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ, STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Jedná se o zobecnění mocninných řad (řad polynomů).

$f_n(x)$

Definice 2.2

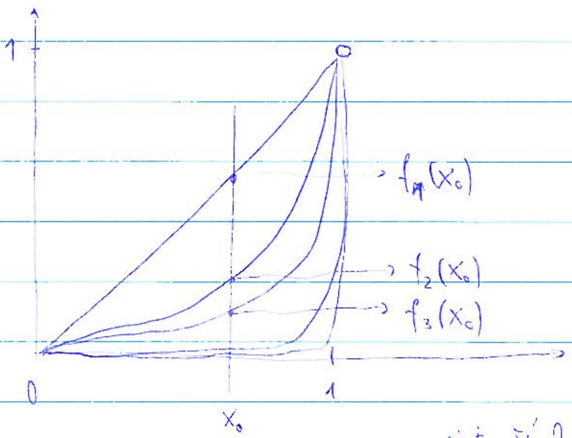
Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ je $f_n: M \longrightarrow \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f_n konvergují stejnoměrně k f (f je nějaká fce) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \geq 0, \forall x \in M \wedge \forall n \geq n_0 \; |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Značíme: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

Př.

$f_n(x)=x^n$, $M=\langle 0,1\rangle$

x^n "konverguje" → 0 na $\langle 0,1)$, 1 v bodě 1



- je to spojité fce ale konverguje k něčemu nespojitému

rozlišujeme — bodová konvergence $\forall x_0 \in M \; f_n(x_0) \longrightarrow f(x)$ ≡ značím ⟺ (je to číselná posloupnost)

$\forall x_0 \in M \; \forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \; \forall n \geq n_0 \; |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$

— stejnoměrná konvergence chceme najít to n_0 nezávislé na volbě x

$x^n \not\rightrightarrows f$

Dk: $x^n \rightrightarrows f = \begin{cases} 0, & x\in\langle 0,1) \\ 1, & x = 1\end{cases}$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0, \forall n \geq n_0\ \forall x\in\langle 0,1\rangle, |x^n - f| < \varepsilon$

$|x^n - 0| < \varepsilon,\ x\in\langle 0,1)$ $\qquad |x^n| < \varepsilon \iff |x|^n < \varepsilon$

$|x^n - 1| < \varepsilon$

$x = 1$ $\qquad |x| < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$

$0 = |1-1| < \varepsilon$ platí vždy

malé ε mám odmocněním neslučně limitní do 1

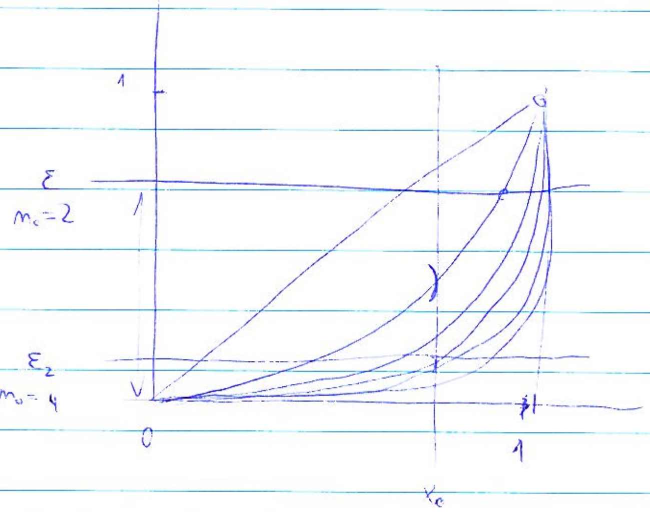
negace $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\ \exists n \geq n_0\ \exists x \in \langle 0,1\rangle$

$|x|^n = |x^n| > \varepsilon$

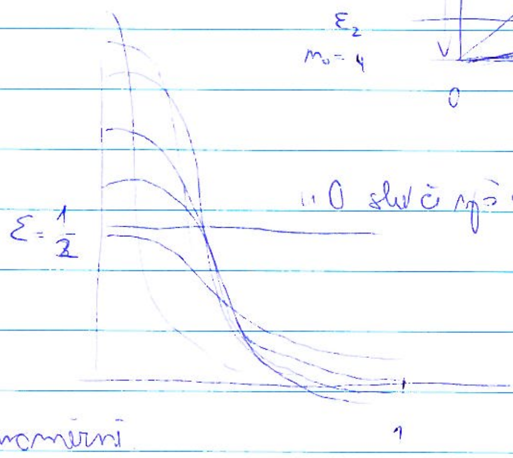
$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\qquad |x^n| > \left(\frac{1}{2}\right)$

$|x| > \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1 + \sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{2} \longrightarrow 1$



TAKŽE V ČEM TEN DK SPOČÍVÁ??



u 0 slučí nějak a jó

př) $(0,1) = M$

nemá $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

$\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$

nemá tuto implikaci

$f(x) = 0$

"cítím", že nekonvergují stejnoměrně

(4)

ale tedy, že $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\ \exists n \geq n_0\ \exists x_0 \in (0,1)\ |f_n(x)| > \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

Pro $n_0 = 1$ najdu $n = 2$

$n_0 = 2$ $\qquad n = 2$ $\qquad$ dokud to mělo přestat

Matematika pro fyziky

16. 10. 2013

Variační počet: 1) formál. Gateauxova derivace, Fréchetův dif.

2) stac. body $(D\Phi)(y_0, h) = 0 \ \forall h$.

3) NP a PP na extrém < 0

↳ stacionarita $(D^2\Phi)(y_0, h) > 0$

4) Funkcionál. alce

$$\Phi : y \longmapsto \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

EL = Gateauxova derivace $= 0 \ \forall h$

$EL(y_0) = 0 \iff (D\Phi)(y_0, h) = 0 \ \forall h$

Řetězovka – katenoida

Stejnoměrná konvergence

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in M \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x)$

Pozn: $\forall \tilde{x} \in M \ \lim_{n \to +\infty} f_n(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ se nazývá bodová

př. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(\tilde{x}) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\tilde{x}}{1 + n\tilde{x}^2} = 0$

Věta 2.7

Nechť $f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f$. Pak existuje bodová limita $(f_n(x))_{n=1}^{+\infty}$. Navíc je rovna f.

Dk. Víme: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in M \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $(*)$

chceme: $\forall \tilde{x} \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

Zvýraznil: zafixuji $\tilde{x}$. Dej mi ε. Musím najít n_0 $\forall n \geq n_0$. Vezmu ε. Zvolím $\varepsilon = \varepsilon$ ve $(*)$. Položím $n_0 = n_0$ jelikož $\tilde{x}$ bylo lib. z M. Dostal-li tvrzení věty tj. $\forall \tilde{x}$. $|f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$ což je dle def. bod. limity $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ na M. $\boxtimes$

Pozn: Odtud $\exists!\ f(x)$ (stejnoměrné limity)

pojem $f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x)$ je jednoznačný

Stejn. konvergence $\implies$ bodová a k bodové limitě

Pozn: 1) $N \subset M$ $f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x) \implies f_n(x) \overset{N}{\rightrightarrows} f(x)$ $\quad (\forall x \in M \ldots \implies \forall x \in N \ldots)$

2) M je konečná a $f_n(x) \overset{M}{\to} f(x)$ $\quad [\equiv \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)] \ \forall x \in M$

$\implies f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f$

Neboť $M = \{m_1, \ldots, m_m\}$ víme $\lim_{n \to +\infty} f_n(m_j) = f(m_j) \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}$, tj.

$\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ víme, že $\forall \varepsilon_j \ \exists n_j \ \forall n_j \geq n_j$ je $|f_n(m_j) - f(m_j)| < \varepsilon_j$ $(*^j)$ (def. lim. posl. $f_n(m_j)$)

chceme: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in M \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \equiv$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall j = \{1, \ldots, m\} \ |f_n(m_j) - f(m_j)| < \varepsilon$

Dej ε. Jdu do $(*^1)$. $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Vypadne pro $n_0 = n_1^0$ označím n_0^1

pro $m_1 (j=1)$

$\varepsilon \dots$ do $*^2 \dots \varepsilon_2 = \varepsilon \dots$ pro $m_2 (j=2)$ $m_0 \dots$ ozn. m_0^2

$\vdots$ $\qquad\qquad \| \; m_0^2$

$\varepsilon \dots$ do $*^2 \dots \varepsilon_m = \varepsilon \dots$ pro $m_m (j=m) \dots m_0 \dots$ ozn. m_0^m

Polož: $m_0 := \max\{m_0^1 \dots m_0^m\}$. $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ Snadno m_0 splňuje co "chceme".

Věta 28 Bolzano-Cauchyho ~~...~~ podmínka pro stejnoměrnou konvergenci

$$f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall m \geq n_0 \; \forall x \in M \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dk. $\Rightarrow$ víme $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in M \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, tj. $\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in M$
$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (Δ)

Odtud $\forall \varepsilon \; \exists n_0$ s ε jde výše uvedené, dostaneš n_0, již vezmi za $\tilde{n}_0$, které uvedeš a použiješ (Δ)

$$\forall n, m \geq \tilde{n}_0 \; |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{z(\Delta)} + \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{z(\Delta)} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Z $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 \; \forall x \in M \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ plyne, dle B-C podmínky pro posloupnosti, že $\forall \tilde{x} \in M \; \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ neboť implikuje

$\forall x \in M \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, odkud dle Bolzano-Cauchyovy podm. pro řady $\exists \; \forall x \in M \; \lim\limits_{n \to +\infty} [f_n(x)]$ Označme ji $f(x)$ ($a_n = f_n(x)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = f$)
$\uparrow$ B.C.

Zkusme, ~~...~~ zda $f(x)$ není "ona" stejnoměrná limita

$$\lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aritmetika limit}}}{=} |f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta \text{ nerovnost}}}{\leq} |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Dle BC pro $\forall x \in M \; \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$
(pro posl. čísel)

Chceme: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in M \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Víme: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 \; \forall x \in M \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in M \; \forall \varepsilon \; \exists n_0^x \; \forall n \geq n_0^x \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \equiv \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \lim_{m \to +\infty} |f_m(x) - f(x)|$$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 0$, neb $\lim\limits_{m \to +\infty} f_m(x) = f(x) \quad \forall x \in M \Rightarrow$

$\lim\limits_{m \to +\infty} |f_m(x) - f(x)| = 0$

$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M$ pp. pro $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \lim\limits_{m \to +\infty} |f_m(x) - f(x)| = 0$

$\blacksquare$

Věta 2.9 BC reformulace

$f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in M\ |f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$

Dk: $\implies$ $f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x) \xRightarrow{BC\ V2.2} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

vezmi $n = n_0$

$m = n_0 + p \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0+p}(x)| < \varepsilon$

$\impliedby$ vím $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in M\ |f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$.

$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f_{n_0}(x) - f_n(x) + f_{n_0}(x)| \leq \underset{m = n_0+p_1}{|f_m(x) - f_{n_0}(x)|} + \underset{n = n_0+p_2}{|f_n(x) - f_{n_0}(x)|} \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

■

Definice 2.3

Řekneme, že $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} s(x) \iff s_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} s(x)$, kde $s_n(x) = \sum_{n=0}^{n} u_n(x)$

Věta 2.10 Stejnoměrný B-C pro řady

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overset{M}{\rightrightarrows} s(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in M\ \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} u_n(x)\right| < \varepsilon$

Dk: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows s(x) \iff s_n(x) \rightrightarrows s(x)$, avšak $s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$

$\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} u_n(x)\right| = |s_{n_0+p}(x) - s_{n_0-1}(x)| < \varepsilon$ což vím že platí dle BC pro posl.

DÚ - reformulace pro $\forall m, n \geq n_0$ — neb $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ ■

Věta 2.11 Weierstrassova věta pro řady fcí

Nechť $u_n, w_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou posloupnosti funkcí a nechť $|w_n(x)| \leq u_n(x)$. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} s(x)$, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \tilde{s}(x)$

Dk: stejn. B-C pro řady. Pro konv. $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$ stačí aby $\overset{(*)}{}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}_0$ $\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} w_n(x)\right| < \varepsilon$.

Avšak $\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} w_n(x)\right| \leq \sum_{n=n_0}^{n_0+p} |w_n(x)| \underset{pp.}{\leq} \sum_{n=n_0}^{n_0+p} u_n(x)$. $\overset{(\Delta)}{}$ Ale $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} S(x)$, což dle st. B-C pro řady znamená, že $\forall \varepsilon\ \exists \bar{n}_0\ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \sum_{n=\bar{n}_0}^{\bar{n}_0+p} u_n < \varepsilon$. Stačí me (*) zvolit $n_0 = \bar{n}_0$ a použít (Δ) $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right| < \varepsilon$

■

Matematika pro fyziky I. 17. 10. 2023

Pozn. $\left|\sum u_n - S(x)\right| \leq \left|\left|\sum u_n\right| - |S(x)|\right|$

opak $\Rightarrow \left|\left|\sum u_n\right| - |S(x)|\right| \geq \left|\left|\sum v_n\right| - |\tilde{S}(x)|\right|$

B-C je tedy výhodný, Δ-nerovnost nemá místo :)

Věta 2.12 Důsledek Weierstraßovy věty (někdy také Weierstraßova věta)

$u_n: M \longrightarrow \mathbb{R}$ posloupnost fcí a (a_n) posloupnost čísel. Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a $|u_n(x)| < a_n \ \forall x \in M$, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ konverguje stejnoměrně.

Dk: Z V 2.11: polož $v_n(x) = a_n \ \forall x \in M$. Pp. splněny, neb a_n konvergují stejnoměrně. ∎

Věta 2.13

Nechť $(f_n(x))$ je posloupnost fcí na M, $\forall x \in M$. Definujme $\sigma_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in M\}$, kde $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in M$, jejíž $\exists$ pp. Pak $f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f(x) \iff \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$

Dk: $\Leftarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$ je $|\sigma_n| < \varepsilon \equiv \sigma_n < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall x \in M \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, což je definice stejnoměrné konvergence

$\Rightarrow$ víme: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in M \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in M\} \leq \varepsilon$, tj. $\sigma_n \leq \varepsilon$ — což je def. limity ∎

Pozn: Vyšetřování stejnoměrné konvergence $\longrightarrow$ 1) vypočít σ_n s maximy na int.

stacionární body $\rightsquigarrow g, g'$

krajními body

2) vypočít $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$

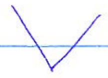
Př: $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$ bodová limita $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|, x \in \mathbb{R}\right\}$

z lichosti $\frac{x}{1+nx^2} \rightarrow \left|\frac{x}{1+nx^2}\right|$ sudá. Stačí $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \frac{x}{1+nx^2}$

$$\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)' = \frac{1+nx^2 - 2x^2n}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ stac. bod}$$

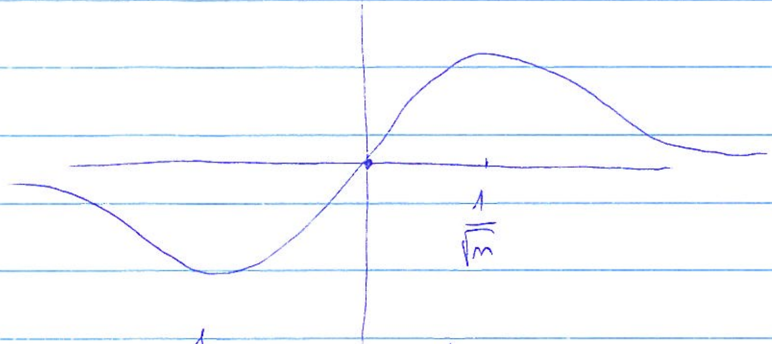
$(1+\sqrt{n}x)(1-\sqrt{n}x)$ pro $0 < x < \frac{1}{\sqrt{n}}$ .. záp.

$x > \frac{1}{\sqrt{n}}$ ..... kladné $\Rightarrow$  $f_n(0) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$(1+\sqrt{n}x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^0$ $\quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0 > -x > -\frac{1}{\sqrt{n}}$ $/\sqrt{n}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 > -x\sqrt{n} > -1 \\ 1 > 1 - x\sqrt{n} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - nx^2 \geq 0$$



$x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ není stac. bod ale i bod nabití extrému lok. maximum v x_0

$$\sigma_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Dle V2.11 je $f_n(x) \rightrightarrows 0$, neboť $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$

toto nejsou "stejné" meze

Př. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ liché, stačí na $\mathbb{R}_0^+$ (ve zbytku dosadíme mínusem)

Bodová konvergence $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} = 0$

zafixujeme x

$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| ; x \in \mathbb{R}_0^+\right\}$ $\quad f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx\,2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0$

$$n(1 - n^2x^2) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right) = 0$ $\quad f_n(0) = \frac{0}{1+n^2 0} = 0$

Maximum je v $\tilde{x}_0 = \frac{1}{n}$ $\quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq \not\rightrightarrows 0$

Dle V2.11 nekonvergují stejnoměrně

- Zkuste si v Maplu tyto fce zobrazit $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ...

Pozn.: "Kdy co komutuje?" k zaměnitelnosti $\lim\limits_{x\to}$, $\frac{d}{dx}$, $\int dx$ s $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

Kdy je $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ a $\lim_{n\to+\infty} \left(f_n'(x)\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'$

Věta 2.14 Záměny limit

$f_n(x)$ posloupnost fcí na intervalu $(c, c+\delta)$, $\delta > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Nechť $f_n(x) \overset{(c,c+\delta)}{\rightrightarrows} f(x)$

Nechť navíc $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, y_n := \lim_{x\to c^+} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{n\to+\infty} y_n\ \exists$ a $\exists$ i $\lim_{x\to c^+} f(x)$ a rovnají se

Pozn: $\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to c^+} f_n(x)\right) = \lim_{x\to c^+}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = f(x)$ (bodově)

Dk: I, existence: $\exists \lim_{n\to+\infty} y_n$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists q_1\ \forall n \geq q_1\ \exists \tilde{\delta} > 0\ \forall x \in \overset{(c,c+\delta)}{M},\ |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$

stejnoměrná konvergence $f_n(x)$ na $(c, c+\delta)$

vím $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1\ \forall x \in (c, c+\delta)\ |f_n(x) - y_n| < \frac{\varepsilon}{4}$ $\quad \forall n$ } def. $\lim_{x\to c^+} f_n(x)$

vím $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2\ \forall m\ \forall x \in (c, c+\delta)\ |f_m(x) - y_m| < \frac{\varepsilon}{4}$ } již $\exists$ dle pp.

Chceme y_n konv., $n \to +\infty$

B.C. pro posloupnosti (čísel) $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists q_2\ \forall m, n \geq q_2$

$|y_m - y_n| < \varepsilon$

Rozepsání: $|y_m - y_n| = |y_m - f_m(x) + f_m(x) - f_n(x) + y_n \cancel{+} f_n(x)| \underset{\Delta\text{ner.}}{\leq}$

$|y_m - f_m(x)| + \underbrace{|f_m(x) - f_n(x)|}_{\text{je to ale bodově, tak to musíme obejít}} + |y_n - f_n(x)| \leq$

$\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$, pokud $q_2 = q_1$, $x \in (c, c+\bar{\delta})$, kde $\bar{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2, \tilde{\delta}\}$

tj. $|y_m - y_n| < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \xrightarrow[\text{dle B.C.}]{} y_m$ konverguje

II, označme $y := \lim_{n\to+\infty} y_n$. Máme dokázat $\lim_{x\to c^+} f(x)\ (= y)\ \exists$, tj.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta\ \forall x \in (c, c+\delta)\ |f(x) - y| < \varepsilon$

máme hledat

algebraicky: $|f(x) - y| \leq \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{\text{bodová lim}} + \underbrace{|f_m(x) - y_m|}_{\lim_{x\to c^+}} + \underbrace{|y_m - y|}_{\lim_{n\to+\infty} y_n}$ (*)

Matematika pro fyziky
24.10.2013

Dokončení důkazu záměnnosti:

$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \quad \exists m_1 \; |y_m - y| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \geq m_1$

(st. k.) $\exists m_2 \; |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \geq m_2 \quad \forall x \in (c, c+\delta_4)$ δ_4 ... aby f byla stále definovaná

$\exists \delta_3 \; |f_m(x) - y_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in (c, c+\delta_3)$

$(*) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\forall m \geq \max\{m_1, m_2\} \quad \forall x \in (c, c+\Delta) \qquad \Delta = \min\{\delta_3, \delta_4\}$

Pozn.: $\lim\limits_{m\to+\infty} \lim\limits_{x\to c^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to c^+}(\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x))$ $\quad f_m(x)$ st. k.

Věta 2.15 Dědění spojitosti

Nechť $f_m(x)$ je stejnoměrně konvergentní na M $(x \in M)$. Nechť $f_m(x)$ je spojité $\forall m \in \mathbb{N}$.
Pak $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x)$ je spojité na M

Dk. $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+}(\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x)) \overset{V2.14}{=} \lim\limits_{m\to+\infty}(\lim\limits_{x\to c^+}(f_m(x)) = \lim\limits_{m\to+\infty} f_m(c) = f(c)$

$f_m(x)$ je sp.

bodová limita

(stejn. ⇒ bodová, N.P.) ☒

Věta 2.16

Nechť $(f'_m(x))_{m=1}^{+\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (nechť $f'_m(x)\, \exists \; \forall x \in M, \forall m \in \mathbb{N}$).
Nechť $\exists c \in M$, že $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(c)\; \exists$. Pak $\lim\limits_{m\to+\infty} f'_m(x) = \left(\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x)\right)' \; \forall x \in M$

Dk.: Víme: $|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \underbrace{\forall m, n \geq m_0}$ (BC pro $f_m(c)$, $m \to +\infty$, $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(c)\; \exists$ z příp.)

stejnoměrná konvergence $f'_m(x)$ $\quad \exists\, \varepsilon > 0 \; \exists \bar{m}_0$

víme: $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $M = \langle a, b\rangle \quad \forall \xi \in \langle a, b \rangle, \forall m, n \geq \bar{m}_0$

$m_1 = \max\{m_0, \bar{m}_0\}, \forall p \in \mathbb{N}$

$|f_{m_1+p}(x) - f_{m_1}(x)| - |f_{m_1+p}(c) - f_{m_1}(c)| = |x-c|\,|f'_{m_1+p}(\xi) - f'_{m_1}(\xi)| \leq |x-c| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (**)$

Lagrangeova věta o střední hodnotě

$\overset{(**)}{\Rightarrow}$ $\quad |f_{m_1+p}(x) - f_{m_1}(x)| \leq |f_{m_1+p}(c) - f_{m_1}(c)| + |x-c|\,|f'_{m_1+p}(\xi) - f'_{m_1}(\xi)| \leq$

Δ nerr.

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{b-a}(b-a) = \varepsilon \qquad |x-c| \leq |b-a|$$

stejnoměrná konvergence f_n

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h}, \quad x_0 \in (a,b), \; h \in (-\delta, \delta)$$

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad |\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| = \frac{1}{h}\left| f_m(x_0+h) - f_n(x_0+h) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))\right| =$$

V.C.S.H

$$= \frac{1}{h}|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|(x_0+h-x_0) = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \varepsilon \; (\text{z pp. st. k. } f_n'(x))$$

Dle st. B-C konvergují $\varphi_n(h)$ stejnoměrně. Můžu tedy použít V 2.15 na $\varphi_n(h)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = \lim_{h\to 0} \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0+h) - \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)}{x_0} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = P \qquad (\text{pravá strana})$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) \quad \text{kde } f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) \quad \text{z def.}$$

levá

Věta 2.17

Nechť $(f_n(x))_{n=1}^{+\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na (a,b). Nechť $\exists$ primitivní fce $F_n(x)$ po řadě k $f_n(x)$ na (a,b). $\lim\limits_{h\to+\infty} F_n(x)$ je rovna primitivní funkci $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Dk: $F_n'(x) = f(x)$ (z def. prim. fce)

$\lim F_n'(x) = (\lim F_n(x))'$ V. 2.16

př) $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} = \frac{1}{1+x^2}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{c^2 x}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$c^2 x + s^2 x = 1 \; / : c^2 x$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{c^2 x}$

$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = c^2 x$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots)\, dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

V2.17

Matematika pro fyziky

30. 10. 2013

Věta 2.18

Nechť $f_n(x)$ jsou spojité na množině M, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} s(x)$. Pak $s(x)$ spojité na M.

Dk: $s_n(x) := f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ spojité $\forall n$, neb je součtem spojitých.

dle V 2.15 je $s(x) := \lim_{n\to+\infty} s_n(x)$ $\exists$ a je spojitá, neb je stejnoměrnou limitou spojitých

($s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ pp.) $\boxed{}$

Věta 2.19

$I \subseteq \mathbb{R}$ omezený ($I = (a,b), (a,b\rangle, \langle a,b), \langle a,b\rangle$), $u_1(x), u_2(x), \ldots$ fce na I. Nechť $\exists$ $u_1'(x), u_2'(x), \ldots$ Nechť $\sum_{i=1}^{+\infty} u_i'(x) \overset{I}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ a $\exists\, c \in I$, že $\sum_{i=1}^{+\infty} u_i(c)$ konverguje.

Pak $\sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x)$ konverguje a má derivaci $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x)\right)' =$

$$= \varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i'(x)\right)$$

Dk: Z definice $\sum_{i=1}^{+\infty} \rightrightarrows$ pomocí $s_n(x) \rightrightarrows$ + V 2.16 (o záměně limity a derivace) $\boxed{}$

Věta 2.20

$I \subseteq \mathbb{R}$ omezený, $u_1(x), u_2(x), \ldots$ fce na I. Nechť $\exists$ $U_1(x), U_2(x), \ldots$ primitivní fce, $U_i' = u_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Nechť původní fce $\sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x) \overset{I}{\rightrightarrows} s(x)$.

Pak $\sum_{i=1}^{+\infty} U_i(x)$ konverguje a je primitivní fcí k limitě $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$.

$$\parallel \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x)$$

Dk: ditto def. $\sum_{i=1}^{+\infty}$ pomocí s_n a V 2.17. $\boxed{}$

Pozn. $\int \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \int u_i(x)\,dx$

Ilustrace toho, že podmínky V 2.15 - 20 nejsou nutné podmínky pro záměnnost:

př) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ a V 2.~~..~~17 $I = \langle 0, 1\rangle$

- $\lim_{n\to+\infty} (nx(1-x)^n) = 0$ bodová konv. je zřejmá!
- $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0$

$$\cdot \lim \int_0^1 \underbrace{nx}_{f}\underbrace{(1-x)^n}_{g}\,dx \overset{PP}{=} \lim_{n\to+\infty}\left\{\left[\frac{nx(1-x)^{n+1}}{n+1}(-1)\right]_0^1 - \int_0^1 n\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}(-1)\,dx\right\} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{0 + \frac{n}{n+1}\left[\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}(-1)\right]_0^1\right\} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0$$

jak snadno zjistíte $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ stejnoměrnost není nutná podmínka záměnnosti

Návod: a, $\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - 0|, x \in \langle 0,1\rangle\}$

b, $x_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$

$$\ln 2 \longleftarrow |f_n(x_n)| \leq \sup_{x\in\langle 0,1\rangle}|f_n(x)|$$

$$\ln 2 \leq \lim_{n\to+\infty}\sigma_n \quad ⚡ \quad \text{N.P. } \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = 0$$

Weierstraß: $|u_n(x)| \leq w_n \quad \sum w_n$ konv

$\Rightarrow \sum u_n(x) \rightrightarrows$

~~Věta 2.21 Abel-Dirichletova věta pro stejnoměrnou konvergenci~~

Věta 2.21 Abelova parciální sumace

Nechť $\varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_p \geq 0$ a nechť

I, $\forall j = 1,\dots,p \quad a_1 + \dots + a_j \leq A \implies \varepsilon_1 a_1 + \dots \varepsilon_p a_p \leq A\varepsilon_1$

II, $\forall j = 1,\dots,p \quad a_1 + \dots + a_j \geq B \implies \varepsilon_1 a_1 + \dots \varepsilon_p a_p \geq B\varepsilon_1$

Dk: I, $\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n = \varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2(S_2 - S_1) + \dots + \varepsilon_{n-1}(S_{n-1} - S_{n-2}) + \varepsilon_n(S_n - S_{n-1})$, kde

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \forall n = 1,\dots,p$

Dále upravíme:

$= S_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + S_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + S_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + S_n\varepsilon_n \leq A(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots A(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + A\varepsilon_n =$

$= A(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n + \varepsilon_n) = A\varepsilon_1$

speciálně $n = p$. II. DOMA (stejné) ▨

Věta 2.22 Abel-Dirichletova věta pro stejnoměrnou konvergenci

$u_n(x), \varepsilon_n(x)$ buďte posloupnosti fcí na $I \subseteq \mathbb{R}$ (libovolný). Označme $s_n(x) := \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$.

Nechť $\varepsilon_1(x) \geq \varepsilon_n(x) \geq \dots \geq \varepsilon_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ (bodová konvergence).

Nechť: I) $\exists K \; |s_n(x)| \leq K$ (stejnoměrně omezené) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ (Dirichlet)

a $\varepsilon_m(x) \overset{I}{\rightrightarrows} 0$

II) $|\varepsilon_1(x)| \leq A$ $\exists$, že $\forall x \in I$, $\sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \overset{I}{\rightrightarrows}$ (Abel)

Potom $\sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \varepsilon_m(x) \rightrightarrows$.

Dk: I) $S_p(x) = u_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)$.

$|S_p(x)| = |s_{n_0+p}(x) - s_{n_0}(x)| \leq |s_{n_0+p}(x)| + |s_{n_0}(x)| \leq K + K = 2K$

$|u_{n_0+1}(x)\varepsilon_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)\varepsilon_{n_0+p}(x)| \leq 2K\,\varepsilon_{n_0+1}(x)$ (Abel. parciální sumace) (*)

Bolzano-Cauchy stačí (a zároveň nutné), aby

$|u_{n_0+1}(x)\varepsilon_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)\varepsilon_{n_0+p}(x)| \leq \varepsilon$

Víme: $\forall \tilde{\varepsilon} \; \exists n_0 \; \forall m \geq n_0, \forall x \in I, |\varepsilon_m(x)| < \tilde{\varepsilon}$

stačí položit $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2K}$

$(*) \leq 2K\varepsilon_{n_0+1}(x) \leq 2K\tilde{\varepsilon} = 2K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$

II) Analogicky stejnoměrný B-C pro $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. $|u_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{A}$

$|u_{n_0+1}(x)\varepsilon_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)\varepsilon_{n_0+p}(x)| \leq \varepsilon_{n_0+1}(x)\frac{\varepsilon}{A} \leq \varepsilon_1(x)\frac{\varepsilon}{A} \leq A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$

Abelova parciální sumace

z Bolzana

pp

pp monotónní (viz dk V2.2 "Dirichlet upravený") $\boxtimes$

Zastavme ©

$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, x \in \mathbb{R}$ $\quad \zeta(1) = +\infty$

Riemannova zeta fce $\quad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. integrálním kritériem nebo Raabem

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}, z \in \mathbb{C}$

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}}$, $z = \sigma + it$, kde $n^z = n^{\sigma+it} = e^{\ln n(\sigma+it)} = e^{\ln n\,\sigma} e^{\ln n\, it} =$

$\ln n\; n^\sigma (ct + izt)$

$\zeta(\sigma, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\underset{\ln n}{n^\sigma}} \frac{1}{ct + izt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ct \ln n}{n^\sigma} - i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{zt \ln n}{n^\sigma}$

$\Rightarrow \zeta^1(\sigma, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma}$

$\zeta^2(\sigma, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(t \ln n)}{n^\sigma}$ konv. pro $\forall \sigma \geq 2$

konvergují současně $\forall \sigma, t$, že $\sigma \geq 2$, stejnoměrně

Matematika pro fyziky

31. 10. 2013

Riemannova zeta funkce:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma}\left[\cos(t\ln n) - i\sin(t\ln n)\right]$$

C hodnotová suma konverguje = obě složky konvergují

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ konv. pro $\sigma > 1$, neb $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\sigma}\,dx = \left[\frac{x^{-\sigma+1}}{-\sigma+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{-\sigma+1} \in \mathbb{R}$ ($\sigma > 1$)

(Pro $\sigma \leq 1$ $\int$ nek. $\int$ jde $+\infty$)

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(t\ln n)}{n^\sigma}$, $\left|\frac{\cos(t\ln n)}{n^\sigma}\right| \leq \frac{1}{n^\sigma}$ (konv. $\sigma > 1$) $\xrightarrow{\text{Weierstraß}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(t\ln n)}{n^\sigma}$ KONVERGUJE

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(t\ln n)}{n^\sigma}$ stejně, dtto.

Závěr: $\forall(\sigma, t) \in \{(x,y) \mid x > 1, y \in \mathbb{R}\}$ $\zeta(\sigma, t) = (-\zeta(\sigma + it))$ konv

navíc $\forall \sigma_0 > 1$ konv $\zeta(\sigma_0, -)$ na $\{(\sigma, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ stejnoměrně (opět Weierstraß)

$\tilde{t} \longmapsto \zeta(\sigma, \tilde{t}),\ \tilde{t} \in \{\ldots\} = \{(\sigma_0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$Z^+ = \{(x,y) \mid x > 1, y \in \mathbb{R}\}$ Lze dokázat, že ζ konverguje stejnoměrně na Z^+

$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ Lze dokázat, že $\zeta(s) = \infty$, pro $\forall s \in \mathbb{C}/Z^+$

Teorie čísel $\operatorname{Re} s > 1 \ldots Z^+$

$\operatorname{Re} s < 1 \ldots \mathbb{C}/Z^+$

Eulerova součinová formule (toto se NEBUDE ZKOUŠET)

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s),$$ kde P je množina $\forall$ prvočísel v $\mathbb{N}$

Dk. $\prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-s}},\ s \in \mathbb{C}$ $= \left(\frac{1}{1-\underbrace{p_1^{-s}}_{q_1}}\right)\left(\frac{1}{1-\underbrace{p_2^{-s}}_{q_2}}\right)\ldots =$ je to součet mocninné řady!

$P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ uspořádám tu množinu

$= (1 + p_1^{-s} + p_1^{-2s} + \ldots)(1 + p_2^{-s} + p_2^{-2s} + \ldots) = \ldots = 1 + p_1^{-s} + p_2^{-s} + \ldots p_1^{-s}p_2^{-s} + p_1^{-s}p_3^{-s} + \ldots$

$+ p_2^{-s}p_3^{-s} + p_2^{-s}p_4^{-s} + \ldots +$ trojsoučiny + čtyřsoučiny + ... + členy obsahující alespoň 1 prvočíslo

p_j v alespoň druhé mocnině $= 1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_2^s} + \ldots + \frac{1}{p_1^s p_2^s} + \ldots + \ldots =$

$= 1 + \left(\frac{1}{p_1}\right)^s + \left(\frac{1}{p_2}\right)^s + \ldots + \left(\frac{1}{p_1 p_2}\right)^s + \ldots = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$

každé číslo se dá napsat jednoznačně jako součin prvočísel .. Euklidova věta neb $n = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$ je jednoznačné ∎

Důsledek: počet p je nekonečný

Dk: sporem:

Nechť je jich konečný počet, pak ovšem $\prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right) < +\infty$ $\quad$ p je konečně

položme: $s = 1 \Rightarrow \zeta(1) = +\infty$ [illegible] ↯ cbd.

jiný Dk: $p_1 + \ldots + p_n$ nechť jich je konečně mnoho

ale $1 + p_1 + \ldots + p_n$ není dělitelné ani $p_1, \ldots, p_n$ protože zbytek je 1 a zároveň je to větší než 1. číslo

Věta 2.23 Leibnitzova věta pro stejnoměrnou konvergenci (kritérium)

Nechť stejnoměrně monotónní $a_1(x) \geq a_2(x) \ldots \geq 0 \quad \forall x \in I$

a $a_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} 0$. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows}$.

Dk: Abel-Dirichlet I)

$\varepsilon_n(x) := a_n(x)$, $u_n(x) := (-1)^n$ $\qquad s_n(x) = \begin{cases} -1, & n \in L \\ 0, & n \in S \end{cases}$ ∎

Pozn: Dirichletovy řady zobecňují ζ-fci a jsou definovány $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(1)}{n^s}$, resp. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$

(spec. Dirichletova L-fce)

Shrnutí: BC posl, $\sum$

W $\sum$

$\sum$ ← Zaměnitelnost $\Leftarrow \lim_{x \to c'} \lim_{n \to +\infty} = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to c^+}$

posl ← A-D

$\int$, lim $\quad$ L

3. ZÁKLADY TEORIE MÍRY & LEBEGŮV INTEGRÁL

3.1. GRASSMANNOVA (VNĚJŠÍ) ALGEBRA

Definice 3.1

V je vektorový prostor, $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda^k V^* := \{ T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to \mathbb{R} \mid \forall i = 1, \ldots, k,$

$\forall v_1, \ldots, v_k \in V$ je $T(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) =$

$= -T(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k)$ $\qquad \Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$

Řešení příkladu na cvičení:

$$f_n(x) = \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}, \quad x \in \langle 0,1 \rangle$$

bodově: $x = 0 \to 1$

$x \in (0,1) \to 1$

$x = 1 \to 1$

$$\sigma_n = \sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} \left\{ \left| \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} - 1 \right| \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x^n} \right| \right\}$$

$$g(x) := \frac{x^n - x^{n+1}}{1+x^n}$$

g_n nabývá maxima na $\langle 0,1 \rangle$ (spojitá na kompaktu)

$g_n(0) = g_n(1) = 0 \implies g_n$ jej nabývá na $(0,1)$ (neboť je nezáporná)

Vyšetření fce $g_n(x)$

$$g_n'(x) = \frac{\left[-x^{n+1} - (n+1)x + n\right]}{(1+x^n)^2} x^n$$

$$\frac{(x^n - x^{n+1})'(1+x^n) - (x^n - x^{n+1})\, n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{(n x^{n-1} - (n+1)x^n)(1+x^n) - (x^n - x^{n+1})\, n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} =$$

$$= \frac{n x^{n-1} + n x^{2n-1} - (n+1)x^n - (n+1)x^{2n} - n x^{2n-1} + n x^{2n}}{(1+x^n)^2} = \frac{-x^{2n} - (n+1)x^n + n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} =$$

$$= x^{n-1} \frac{\left(-x^{n+1} - (n+1)x + n\right)}{(1+x^n)^2} = 0$$

pozn. k přednášce

teorie strun .. Luboš Motl spoluobjevitelem M-teorie

Jaroslav Trnka

$\Lambda^k V^*$ se nazývá k-tá vnější mocnina, nebo k-tá antisymetrická mocnina či grassmannian.

elementy ~~...~~ $\Lambda^k V^*$ se nazývají vnější k-formy

Pozn.

- $\Lambda^1 V^* := \{T: V \to \mathbb{R} \mid T(v_i, v_{i+1})$ nelze popsat, podmínka je prázdná, T nemá 2 vstupy$\}$
  $= V^*$ duální prostor
- $\Lambda^0 V^* = (V^0)^* = \mathbb{1} = \mathbb{R}$
- $T \in \Lambda^k V^*$. Pak $\forall v, w \in V, \forall v_1, \dots, v_{k-2} \in V$ je $T(v_1, \dots, v, \dots, w, \dots, v_{k-2}) =$
  $= (-1)^{\tilde{k}} T(v_1, \dots, w, \dots, v, \dots, v_{k-2})$ pro vhodné $\tilde{k}$

Dk: $T(v_1, \dots, \overset{r}{v}, \dots, \overset{s}{w}, \dots, v_{k-2}) = -T(v_1, \dots, v, \dots, w, \dots, v_{k-2}) =$ ... (o jedno - sb. posunul se o 1 - další)

$= \pm T(v_1, \dots, v, w, \dots, v_{k-2}) = \dots = \pm T(v_1, \dots, w, \dots, v, \dots, v_{k-2}) =$

$= (-1)^{\tilde{k}} T(v_1, \dots, w, \dots, v, \dots, v_{k-2})$ pro vhodné $\tilde{k}$ ☒

vhodné $\tilde{k} = 2(s-r) - 1$ vždy liché

$\Rightarrow$ tj. vnější forma je antisymetrická

- $T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \, T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ (= permutační grupa na k prvcích)

  Dk: z def. + $\operatorname{sgn}(\sigma)$ je počet transpozic
- ~~...~~ $\mathfrak{S}_k = \{f: \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\} \mid f$ je injektivní a surjektivní$\}$
  = grupa operací skládání zobrazení

Matematika pro fyziky I

6.11.2013

Vnější násobení 1-forem

Definice 3.5

$(\alpha\wedge\beta)(v,w) := \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) \quad \forall v,w\in V,\ \alpha,\beta\in V^* (= \Lambda^1 V^*)$

Věta 3.24

1. $(a\alpha + b\beta)\wedge\gamma = a\alpha\wedge\gamma + b\beta\wedge\gamma$ (distributivita), $\alpha,\beta,\gamma\in V^*$
2. $\alpha\wedge\beta = -\beta\wedge\alpha,\quad \alpha,\beta\in V^*$
3. $\alpha\wedge\alpha = 0$

Dk: $v,w\in V$: $((a\alpha+b\beta)\wedge\gamma)(v,w) = (a\alpha+b\beta)(v)\,\gamma(w) - \gamma(v)(a\alpha+b\beta)(w) =$

$= (a\alpha(v) + b\beta(v))\gamma(w) - \gamma(v)a\alpha(w) - \gamma(v)b\beta(w) =$

$= a\alpha(v)\gamma(w) + b\beta(v)\gamma(w) - \gamma(v)a\alpha(w) - b\gamma(v)\beta(w)$

$(a\alpha\wedge\gamma + b\beta\wedge\gamma)(v,w) = (a\alpha\wedge\gamma)(v,w) + b(\beta\wedge\gamma)(v,w) = a\alpha(v)\gamma(w) - a\alpha(w)\gamma(v) +$
$b\beta(v)\gamma(w) - b\gamma(v)\beta(w)$

2) $(\alpha\wedge\beta)(v,w) = \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w)$

$(\beta\wedge\alpha)(v,w) = \beta(v)\alpha(w) - \alpha(v)\beta(w) \quad\Rightarrow\quad \alpha\wedge\beta = -\beta\wedge\alpha$ antikomutativita

3) $\alpha\wedge\alpha \overset{2}{=} -\alpha\wedge\alpha \quad / +\alpha\wedge\alpha$

$\alpha\wedge\alpha = 0$

$\boxtimes$

Př) $(\varepsilon^1,\varepsilon^2)$ buď báze $(\mathbb{R}^2)^*$.

$(a\varepsilon^1 + b\varepsilon^2)\wedge(c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2) = a\varepsilon^1\wedge(c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2) + b\varepsilon^2\wedge(c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2) = ac\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^1 +$

$+ ad\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 + bc\,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^1 + bd\,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^2 = ad\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 - bc\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 =$

$= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d\end{vmatrix}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 \quad \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$

Př) $(x_1\varepsilon^1 + y_1\varepsilon^2 + z_1\varepsilon^3)\wedge(x_2\varepsilon^1 + y_2\varepsilon^2 + z_2\varepsilon^3) =$ $\qquad (\varepsilon^i)_{i=1}^3$ báze $(\mathbb{R}^3)^*$

$= x_1y_2\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 + x_1z_2\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^3 - y_1x_2\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 +$ $\qquad x_1,\dots,z_2\in\mathbb{R}$

$+ y_1z_2\,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3 - z_1x_2\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^3 - z_1y_2\,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3 =$

$= (x_1y_2 - y_1x_2)\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^3 + (y_1z_2 - z_1y_2)\,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3 \qquad \in\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$

Označme-li: $f_1 = \varepsilon^2\wedge\varepsilon^3$

$-f_2 = \varepsilon^1\wedge\varepsilon^3$

$f_3 = \varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$

vnější prmo... antisymetrické

$a \times b = a \wedge b \qquad a = x_1 \epsilon^1 + y_1 \epsilon^2 + z_1 \epsilon^3, \; b = x_2 \epsilon^1 + y_2 \epsilon^2 + z_2 \epsilon^3$

$(y_1 z_2 - z_1 y_2, \; z_1 x_2 - x_1 z_2, \; x_1 y_2 - y_1 z_2)$ odpovídá vekt. součinu

Vnější násobení k-forem s l-formami $\quad k, l \geq 1$

multiindex $\quad I = (i_1, \dots, i_k), \; i = 1, \dots, \dim V, \; j = 1, \dots, k, \; \dim V < +\infty,$

$\in \{1, \dots, \dim V\}^{k} \subseteq \mathbb{N}^k$

délka I, čem $|I| = k$

Nechť $(\epsilon^i)_{i=1}^{\dim V}$ je báze V^*, I je multiindex délky k, pak označme $\epsilon^I \in \Lambda^k V^*$ definovaný

vztahem $\epsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ \sigma(1), \dots, \sigma(k) \end{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)})$

$I = (i_1, \dots, i_k)$

Nyní antisymetrie ϵ^I

$\epsilon^I \in \Lambda^k V^k$

Dk: $\epsilon^I(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \dots, \overbrace{}^{i_l, i_{l+1}} \dots, i_k \\ \underbrace{\sigma(1), \dots, \sigma(k)}_{\sigma(l), \sigma(l+1)} \end{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots \epsilon^{i_l}(v_{\sigma(l)}) \epsilon^{i_{l+1}}(v_{\sigma(l+1)}) \dots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma \dots}$

$\epsilon^I(v_1, \dots, v_{l+1}, v_l, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_k \\ \sigma(1), \dots, \sigma(l+1), \sigma(l), \dots, \sigma(k) \end{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots$

$\dots \epsilon^{i_l}(v_{\sigma(l+1)}), \epsilon^{i_{l+1}}(v_{\sigma(l)}) \dots \epsilon^{k}(v_{\sigma(k)})$

$\sum_{\substack{\sigma = \tilde\sigma \circ \underbrace{(l+1, l)} \\ \tilde\sigma \in S_k}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_k \\ \tilde\sigma(1), \dots, \tilde\sigma(l+1), \tilde\sigma(l), \dots, \tilde\sigma(k) \end{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_{\tilde\sigma \circ (l+1, l)}) \dots \epsilon^{i_l}(v_{\tilde\sigma \circ t(l+1)}), \epsilon^{i_{l+1}}(v_{\tilde\sigma \circ t(l)}) \dots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)}) =$

transpozice zaměňující l a l+1 $:= t$

$\sum_{\tilde\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\underbrace{(\dots)} \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots \epsilon^{i_l}(v_{\sigma(l)}), \epsilon^{i_{l+1}}(v_{\sigma(l+1)}) \dots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)}) =$

$i_1, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_k$

$\sigma(1), \dots, \tilde\sigma(l), \tilde\sigma(l+1), \dots, \sigma(k)$

$\quad \; \| \qquad\qquad \|$

$\sigma(l+1) \qquad \sigma(l)$

$= - \sum_{\tilde\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_k \\ \sigma(1), \dots, \sigma(l), \sigma(l+1), \dots, \sigma(k) \end{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots \epsilon^{i_l}(v_{\sigma(l)}) \epsilon^{i_{l+1}}(v_{\sigma(l+1)}) \dots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)}) =$

(integrály na plochách – budeme integrovat místo funkce ale FORMY)

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_l, i_{l+1}, \dots, i_k \\ \sigma(1), \dots, \sigma(l), \sigma(l+1), \dots, \sigma(k) \end{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots \epsilon^{i_l}(v_{\sigma(l)}) \epsilon^{i_{l+1}}(v_{\sigma(l+1)}) \dots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)})$$

což je pravá strana naproti $\epsilon^I(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_k)$ výše (až na znaménko) $\boxed{}$

<u>Pozn:</u> Zřejmě $\epsilon^I : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ je multilineární zobrazení

$$\epsilon^I(\dots, av + bw, \dots) = a\,\epsilon^I(\dots, v, \dots) + b\,\epsilon^I(\dots, w, \dots)$$

<u>Definice 3.6</u>

I, J multiindexy. Pak $(I, J) = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ konkatenace

a $[I \cup J] = (r_1, \dots, r_{k+l})$, $\forall i \in \{1, \dots, k+l\}$; $r_i \le r_{i+1}$ a $r_j \in I \cup J$

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \begin{cases} 0 & I \cap J \neq \emptyset \\ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ [I \cup J] \end{pmatrix} \varepsilon^{I \cup J} & \end{cases}$$

<u>Pozn</u> $\varepsilon^I \in \Lambda^k V^*$, $\varepsilon^J \in \Lambda^l V^*$ $\Rightarrow \epsilon^I \wedge \epsilon^J \in \Lambda^{k+l} V^*$ antisymetrii neověřuji protože ε je vždy antisymetrické

<u>Lemma 3.25</u>

I, J, K jsou multiindexy. Pak $(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \epsilon^K)$ asociativita

<u>Dk:</u> $$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \begin{cases} \varepsilon^{I \cup J} \wedge \varepsilon^K \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}, & I \cap J = \emptyset \\ 0 & I \cap J \neq \emptyset \end{cases}$$

$$= \epsilon^{I \cup J \cup K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} = \epsilon^{I \cup J \cup K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}$$ zneuspořádám to

$$\varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K) = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{J \cup K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix} = \epsilon^{I \cup J \cup K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \cup K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix} = \epsilon^{I \cup J \cup K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \cup K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{sgn}\left[\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\right] = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}$$ jose to uspořádám

a to samé platí pro druhý případ $\boxed{}$

Matematika pro fyziky I

7.11.2013

Věta 3.26 antikomutativita

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J = (-1)^{|I||J|} \epsilon^J \wedge \epsilon^I$$

Dk: $\epsilon^I \wedge \epsilon^J = \begin{cases} 0 & I \cap J \neq \emptyset \\ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \epsilon^{\overrightarrow{I \cup J}}, & I \cap J = \emptyset \end{cases}$

$$\epsilon^J \wedge \epsilon^I = \begin{cases} 0 & J \cap I = I \cap J \neq \emptyset \\ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, I \\ I \cap J \end{pmatrix} \epsilon^{J \cup I} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} j_1, \dots, j_k, i_1, \dots, i_l \\ I \cup J \end{pmatrix} \epsilon^{J \cup I} = \end{cases}$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, j_1, \dots, j_k, i_2, \dots, i_l \\ I \cup J \end{pmatrix} (-1)^k \epsilon^{J \cup I} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, i_2, j_1, \dots, j_k, i_3, \dots, i_l \\ I \cup J \end{pmatrix} (-1)^k (-1)^k \epsilon^{J \cup I} = \dots =$$

$$= (-1)^k \dots (-1)^k \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_l, j_1, \dots, j_k \\ I \cup J \end{pmatrix} \epsilon^{J \cup I} = (-1)^{kl} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \epsilon^{J \cup I} =$$

$$= (-1)^{kl} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \epsilon^{I \cup J} = (-1)^{|I||J|} \epsilon^{I \cup J} \qquad \blacksquare$$

Máme vnější násobení na 1-formách a máme vnější násobení na speciálních k-formách ϵ^I. $(\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$, $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^* = V^*$. $\epsilon^I \wedge \epsilon^J$ (tato def.)

Vnější násobení $\epsilon^I \rightsquigarrow \sum_I a_I \epsilon^I \wedge \sum_J \beta_J \epsilon^J = \sum_{I,J} a_I \beta_J \epsilon^I \wedge \epsilon^J$

Věta 3.27

Definice vnějšího násobení k-forem extenduje dřívější definici vnějšího násobení 1-forem.

Dk: $\alpha, \beta \in V^*$, $v_1, v_2 \in V$. $(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \epsilon^i \wedge \sum_{j=1}^{m} \beta_j \epsilon^j\right)(v_1, v_2) =$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \epsilon^i \wedge \epsilon^j\right)(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \epsilon^{ij}(v_1, v_2) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \left(\sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{pmatrix} \cdot \epsilon^i(v_{\sigma(1)}) \epsilon^j(v_{\sigma(2)})\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \left[\epsilon^i(v_1)\epsilon^j(v_2) - \epsilon^j(v_1)\epsilon^i(v_2)\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (v_1^i v_2^j - v_1^j v_2^i) =$$

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \varepsilon^i(v_1)\beta_j \varepsilon^j(v_2) - \alpha_i \varepsilon^i(v_2)\beta_j \varepsilon^j(v_1) = \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_i v_1^i \beta_j v_2^j - \alpha_i v_2^i \beta_j v_1^j)$$

Ještě dokážeme: $\varepsilon^{12} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$

$$\varepsilon^{12}(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \varepsilon^1(v_{\sigma(1)})\varepsilon^2(v_{\sigma(2)})$$

$$(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2)(v_1, v_2) = \varepsilon^1(v_1)\varepsilon^2(v_2) - \varepsilon^1(v_2)\varepsilon^2(v_1) = v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2$$

'sume': $\varepsilon^1(v_1)\varepsilon^2(v_2) - \varepsilon^1(v_2)\varepsilon^2(v_1) = v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2$ ckd. vyšlo to podle obou def. ∎

Věta 3.28

$\{\varepsilon^I \mid |I| = k,\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m\}$ je báze $\Lambda^k V^*$, $m := \dim V$.

Dk: $k=1$ $\sum_i \alpha_i \varepsilon^i = 0$ dokazuji LN $\Rightarrow \alpha_i = 0$ protože ε^i je báze V^*

$k=2$ $\sum_{i<j} \alpha_{ij}\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j = 0 \ / (e_{i_0}, e_{j_0})$

$$\sum_{i<j} \alpha_{ij}(\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j)(e_{i_0}, e_{j_0}) = 0$$

$$\sum_{i<j} \alpha_{ij}\left(\varepsilon^i(e_{i_0})\varepsilon^j(e_{j_0}) - \varepsilon^i(e_{j_0})\varepsilon^j(e_{i_0})\right) = \sum_{i<j} \alpha_{ij}\left(\delta^i_{i_0}\delta^j_{j_0} - \delta^i_{j_0}\delta^j_{i_0}\right) = 0 = \alpha_{i_0 j_0}$$

$$\forall i_0, j_0,\ i_0 < j_0 \ldots \alpha_{i_0 j_0} = 0$$

Nezávislé na k pp. $\sum_{|I|=k} \alpha_I \varepsilon^I(e_{i_1^0}, \ldots, e_{i_k^0}) = 0$ $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon^{(i_1, \ldots, i_k)}(e_{i_1^0}, \ldots, e_{i_k^0}) = \sum_{i_k=1}^{m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\delta^{i_1}_{\sigma(i_1^0)} \cdots \delta^{i_k}_{\sigma(i_k^0)}\right) =$$

$\delta^{i_1}_{\sigma(i_1^0)}$ // $\varepsilon^{i_1}(e_{i_1})$

$$= \alpha_{i_1^0 \ldots i_k^0} = 0 \quad \forall i_1^0, \ldots, i_k^0$$

(pp. nulovost celku, dokazuji nulovost koeficientů)

generovanost

formu na multivektor

$\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I \varepsilon^I$, ε^I je první def. ale α^I ne., kde $\alpha_I = \alpha(e_I)$, $e_I := e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$

(multiindexy délky k, jež mají uspořádané vstupy)

$$\alpha(e_I) = \sum_I \alpha_I \varepsilon^I(e_{i_1^0}, \ldots, e_{i_k^0}) = \sum_I \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \alpha_I \left(\varepsilon^{i_1}(e_{\sigma(i_1^0)}) \cdots (e_{\sigma(i_k^0)})\right) =$$

$$= \sum_I \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \delta^{i_1}_{\sigma(i_1^0)} \cdots \delta^{i_k}_{\sigma(i_k^0)}\, \alpha_{i_1 \ldots i_k} = \alpha_I$$ jen $\sigma = 1$, jakobyli jiné to přehází ∎

pozn. $\epsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \epsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots \epsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)})$, $I = (i_1, \dots, i_k)$

<u>Důsledek</u>: $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$

<u>Dk</u>: $\{\epsilon^I \mid |I| = k,\ I = (i_1, \dots, i_k),\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$ je báze

$\xleftrightarrow{1-1} \{(i_1, \dots, i_k) \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\},\ j = 1, \dots, n$ pak to ~~kombinace~~ variace bez opakování

$i_1 \ne \dots \ne i_k \Rightarrow i_1 \ne i_k$ $\boxed{}$

Př.)

$\mathbb{R}^4$ $\Lambda^0 \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\ (= e_\alpha = 1)$

$\Lambda^1 \mathbb{R}^4 = L(\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^4\})$ L.. lin. obal

$\Lambda^2 \mathbb{R}^4 = L(\{\varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{34}\})$

$\Lambda^3 \mathbb{R}^4 = L(\{\varepsilon^{123}, \varepsilon^{124}, \varepsilon^{234}, \varepsilon^{134}\})$

$\Lambda^4 \mathbb{R}^4 = L(\{\varepsilon^{1234}\})$ v podstatě determinant

Matematika pro fyziky

L. Krizka — 13. 11. 2013

Připomenutí:

$\Lambda^0(\mathbb{R}^4)^* = \mathbb{R}$

$\Lambda^1(\mathbb{R}^4)^* = \mathbb{R}^4$

$\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* = \mathcal{L}(\{\varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{34}\}) \simeq \mathbb{R}^6$

$\Lambda^3(\mathbb{R}^4)^* = \mathcal{L}(\{\varepsilon^{123}, \varepsilon^{124}, \varepsilon^{234}, \varepsilon^{134}\}) \simeq \mathbb{R}^4$

$\Lambda^4(\mathbb{R}^4)^* = \mathcal{L}(\{\varepsilon^{1234}\}) \simeq \mathbb{R}$

$\varepsilon^{12} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$

$\varepsilon^{123} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$

A) Klasický elektromagnetismus — APLIKACE

$\mathbb{R}^4$ … prostoročas. souřadnice $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$

$\mathbb{R}^3$ … kanonická báze (e_1, e_2, e_3)

E elektrické pole $E: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad E = E_1e_1 + E_2e_2 + E_3e_3$

B magnetické pole $B: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad B = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$

lepší zápis: $E: \mathbb{R}^4 \to \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$ báze $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ $\quad dx^1, dx^2, dx^3$ jiné označení

$B: \mathbb{R}^4 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ $\quad \varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{23}$ $\quad dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3$

$E = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$

$B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2$

ještě lepší zápis:

F … tenzor elektromagnetického pole

$F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ $\qquad F := B - d\epsilon \wedge E = B - \frac{1}{c} dx^0 \wedge E$

Maxwellovy rovnice

$f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ $\quad df = \frac{\partial f}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3$ de Rhamův diferenciál

$dF = 0$ $\qquad F = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 - \frac{1}{c} dx^0 \wedge (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)$

$d{*}F = 0$ $\qquad dF = dB_1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dB_2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + dB_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{1}{c}(dE_1 \wedge dx^0 \wedge dx^1 +$

$\overset{!}{0} \qquad + dE_2 \wedge dx^0 \wedge dx^2 + dE_3 dx^0 \wedge dx^3)$

$dB_1 = \frac{\partial B_1}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial B_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial B_1}{\partial x^3} dx^3$

$dF = \frac{\partial B_1}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$

$\frac{\partial B_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{1}{c}\Big[\Big(\frac{\partial E_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dx^3\Big) \wedge dx^0 \wedge dx^1\Big] +$

$$+\left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial E_2}{\partial x^3}dx^3\right)\wedge dx^0\wedge dx^2\right]+\left[\left(\frac{\partial E_3}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial E_3}{\partial x^2}dx^2\right)\wedge dx^0\wedge dx^3\right]\Bigg\}$$

$$dF=\left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1}+\frac{\partial B_2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_3}{\partial x^3}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x^0}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x^2}\right)dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3$$

$$dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2$$

$$dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial B_1}{\partial x^1}+\frac{\partial B_2}{\partial x^2}+\frac{\partial B_3}{\partial x^3}=0 \Longrightarrow \boxed{\operatorname{div} B=0}$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x^3}-\frac{\partial E_3}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial B_1}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} \Rightarrow (\operatorname{rot}E)_1=-\frac{\partial B_1}{\partial t}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}E=-\frac{\partial B}{\partial t}}$$

když to udělámе na $d*F=0$ tak dostaneme

ty druhé 2 Maxwellovy rce

1, asociativita $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$

2, komutativita (anti) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha \quad \alpha\in\Lambda^k(V^*)$

$\beta\in\Lambda^l(V^*)$

3, $\alpha\wedge\alpha=0$, pokud $\alpha\in\Lambda^{\text{l.k.}}(V^*)$

$\alpha\in\Lambda^1(V^*),\Lambda^3(V^*),\ldots$

Př, $(\varepsilon^{12}+\varepsilon^{34})\wedge(\varepsilon^{12}+\varepsilon^{34})=(\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2+\varepsilon^3\wedge\varepsilon^4)\wedge(\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2+\varepsilon^3\wedge\varepsilon^4)=$

$=\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3\wedge\varepsilon^4+\underbrace{\varepsilon^3\wedge\varepsilon^4\wedge\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2}_{=\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3\wedge\varepsilon^4}=2\varepsilon^{1234}\neq 0$ u sudých to tedy být nemusí

$$\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J=\begin{cases}0 & I\cap J\neq\emptyset\\ \operatorname{sgn}\binom{I,J}{I\cup J}\varepsilon^{I\cup J}, & I\cap J=\emptyset\end{cases}$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_k}(e_1,\ldots,e_k)=\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma\,\varepsilon^{i_1}(e_{\sigma(1)})\ldots\varepsilon^{i_k}(e_{\sigma(k)})$$

není to kanonická báze

B, Souvislost s pojmy lineární algebry

$V\ldots$ vektorový prostor, $\dim V=n \qquad \alpha^1,\ldots,\alpha^k\in V^*$ 1-formy

Věta 3.29

$\alpha^1,\ldots,\alpha^k$ jsou LN právě tehdy když $\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\ldots\wedge\alpha^k\neq 0\in\Lambda^k(V^*)$

Dk:

1, $\alpha^1,\ldots,\alpha^k$ jsou LZ $\Longrightarrow \alpha^1\wedge\ldots\wedge\alpha^k=0$

$\Longrightarrow$

$\{\alpha^1,\dots,\alpha^k\}$ je LZ $\Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha^i = 0$ a navíc $\exists i_0,\ \lambda_{i_0} \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha^{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k} \lambda_i \alpha^i$$

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{i_0} \wedge \dots \wedge \alpha^k = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i_0 \neq i}}^{k} \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{i_0-1} \wedge \alpha^i \wedge \alpha^{i_0+1} \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0$$

$\alpha^i \wedge \alpha^i = 0$ protože to je lichá

pokud $i_0 > i$

$$= -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i_0 \neq i}}^{k} \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{i-1} \wedge \underline{\underline{\alpha^i}} \wedge \alpha^{i+1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_0-1} \wedge \underline{\underline{\alpha^i}} \wedge \alpha^{i_0+1} \wedge \dots \wedge \alpha^k$$

to dám k sobě (se změnou znaménka)

a sama se sebou 1-forma je nula

2) $\Leftarrow$

$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0 \Rightarrow \{\alpha^1,\dots,\alpha^k\}$ je LZ

Sporem

$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0 \quad \{\alpha^1,\dots,\alpha^k\}$ je LN

$\{\alpha^1,\dots,\alpha^k\}$ lze doplnit na bázi $V^* \quad \{\alpha^1,\dots,\alpha^k,\alpha^{k+1},\dots,\alpha^n\}$ báze $V^* \Rightarrow$

existuje duální báze $V \quad \{e_1,\dots,e_k, e_{k+1},\dots,e_n\}$ báze V

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)(e_1,\dots,e_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha^1(e_{\sigma(1)}) \dots \alpha^k(e_{\sigma(k)}) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \delta^1_{\sigma(1)} \dots \delta^k_{\sigma(k)} = \det(E_k)$$

$$= 1 \neq 0 \quad \lightning$$

$\boxtimes$

5) Kleinova kvadrika

$$K = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*;\ \alpha \wedge \alpha = 0\} \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$$

$$\dim \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* = 6 = \binom{4}{2}$$

$$\alpha = a_{12}\varepsilon^{12} + a_{13}\varepsilon^{13} + a_{14}\varepsilon^{14} + a_{23}\varepsilon^{23} + a_{24}\varepsilon^{24} + a_{34}\varepsilon^{34}$$

$$\alpha \wedge \alpha = a_{12}a_{34}\,\varepsilon^{12} \wedge \varepsilon^{34} + a_{13}a_{24}\,\varepsilon^{13} \wedge \varepsilon^{24} + a_{14}a_{23}\,\varepsilon^{14} \wedge \varepsilon^{23} + a_{14}a_{23}\,\varepsilon^{23} \wedge \varepsilon^{14} + a_{13}a_{24}\,\varepsilon^{24} \wedge \varepsilon^{13} +$$

$$+ a_{12}a_{34}\,\varepsilon^{34} \wedge \varepsilon^{12} = (2a_{12}a_{34} - 2a_{13}a_{24} + 2a_{14}a_{23})\,\varepsilon^{1234} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_{12}a_{34} - 2a_{13}a_{24} + 2a_{14}a_{23} = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{34} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

S-Ř úprava (symetrická) nebo pomocí vl. čísel

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & 1 \\ & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & 0 \\ & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & -1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & -1 & & & & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & 1 & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$ signatura $(3,3)$

Pozn: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ A^T A = \mathbb{1}\}$ $\quad O(3,3) = \{A \in M_6(\mathbb{R}),\ A^T K A = K\}$

Grupa OG matic

$O(1,3) = \{A \in M_4(\mathbb{R}),\ A^T \eta A = \eta\}$ Lorentzova grupa

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}),\ A^T A = \mathbb{1}\}$

grupa rotací v $\mathbb{R}^3$

Označme: $\dim V = n$

$$\Lambda^\bullet(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*) \quad \text{úplná algebra forem}$$

$$\dim \Lambda^\bullet(V^*) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Pozn: Vše lze udělat pro V místo V^*, jen se tomu neříká k-formy ale k-vektory

$\Lambda^k(V)$

Matematika pro fyziky 14. 11. 2013

3.2 Lebesgueova míra a integrál

Definice 3.7

Buď X libovolná množina, P systém podmnožin v X, $P \subset 2^X$. P se nazývá σ-algebra, právě když 1, $X \in P$

2, $\forall A \in P$ platí, že $(X - A) \in P$

3, $\underbrace{A_1, A_2, \dots}_{\text{spočetné}} \in P \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in P$

Př) $P = \{\emptyset, X\}$, $\underset{\uparrow}{P = 2^X}$ jsou σ-algebry

úplná σ-algebra na X

~~pozor~~ 1, 3, $\Longrightarrow \emptyset \in P$

3, i pro konečné posloupnosti $A_1, A_2, \dots, A_m$

Definice 3.8

Buď X libovolná množina, P σ-algebra na X, $\mu: P \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$ se nazývá míra

$\Longleftrightarrow$ 1, $\mu(\emptyset) = 0$

3, $\underbrace{X_1, X_2, \dots}_{\text{spočetné}} \in P$ $\quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(X_i)$ σ-aditivita

$X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$

(X, P, μ) se nazývá měřitelný prostor.

Př) míry na minimální σ-algebře $P = \{X, \emptyset\}$

$\mu(\emptyset) = 0$

$\mu(X) = n \in \mathbb{R}^+_0 \cup \{+\infty\}$ se ověří, že je míra.

Chceme míru na $\mathbb{R}$, aby měla přirozené vlastnosti: $\mu(a,b) = b - a$

$\mu(x + M) = \mu(M)$, $x \in \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$

$\underset{\{x + m \mid m \in M\}}{\parallel}$ translační invariance

Definice 3.9 Lebesgueova míra

Pro $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} \|I_i\| \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i\right\}$, kde I_i jsou otevřené intervaly (ne nutně omezené),

$\|I_i\| :=$ délka intervalu I_i,

$I_i = (a,b)$ $\quad \|I_i\| = b - a$

$I = (-\infty, b)$ $\quad \|I\| = +\infty$

$I = (a, +\infty)$ $\quad \|I\| = +\infty$

$I = (-\infty, +\infty)$ $\quad \|I\| = +\infty$

$\lambda^*(\emptyset) = 0$, $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$. λ^* nazveme Legesgueovu míru.

Lemma 3.30

1, $A \subset B \subset \mathbb{R}$ $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ monotonie

3, $\lambda^*(I) = \|I\|$ (jeho délka)

Dk: 1, $\forall$ pokrytí B je i pokrytí A

3, $\lambda^*(a,b) = b-a$

$\leq b-a$: $(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \supset (a,b)$

$\geq b-a$: $\bigcup_{i=1}^{+\infty}(a_i,b_i) \supset \langle a,b \rangle \xRightarrow{komp} \exists_m \ldots \bigcup_{i=1}^{m}(a_i,b_i) \supset \langle a,b \rangle$

$\sum_{i=1}^{m}\|(a_i,b_i)\| \geq b-a$, $\sum_{i=1}^{+\infty}\|(a_i,b_i)\| \geq \sum_{i=1}^{m}\|(a_i,b_i)\| \geq b-a$ $\blacksquare$

Lemma 3.31

$\forall A_1, \ldots \subset \mathbb{R}$, $\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^*(A_i)$ σ-subaditivita

Dk: vezmi $\varepsilon > 0$

$\sum_{i=1}^{+\infty}\|I_j^i\| = \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ $\bigcup_{i=1}^{+\infty} I_j^i \supset A_j$ $\sum_{i,j}\|I_j^i\| = \sum_j \lambda^*(A_j) + \varepsilon$

$\bigcup_{i,j=1}^{+\infty} I_j^i \supset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ $\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^*(A_i)$

$\wedge\!|$

$\sum_{i,j}\|I_j^i\|$ $\blacksquare$

Lemma 3.32

λ^* není na $P = 2^{\mathbb{R}}$ σ-aditivní.

Dk: Sporem: nechť λ^* je σ-aditivní. $x,y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \equiv x-y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ se rozpadá na třídy ekvivalence $[x]$, $[x] = x + \mathbb{Q}$

Z každé třídy ekvivalence $[x]$ lze vybrat reprezentanta $x \in (0,1)$

E je množina těchto reprezentantů všech tříd

$E \subset (0,1)$; $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$ uspořádej do posloupnosti $g_1, g_2, \ldots \in \mathbb{Q}$

$E_n := g_n + E$

$E_i \cap E_j \overset{?}{=} \emptyset$, $i \neq j$ $e_i \in E$ $e_i + g_i = e_j + g_j$

$e_i - e_j \in \mathbb{Q} \Rightarrow [e_i] = [e_j] \Rightarrow e_i = e_j \Rightarrow g_i = g_j$

σ-aditivita $\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^*(E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^*(g_i + E) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{translační invariance } \lambda^*}}{\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^*(E_i)}$

$(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \overset{\text{z def } E_i}{\subset} (-1,2)$

$\rightarrow x \in (0,1)$ $\underset{\text{třída ekvivalence}}{[x] = [y]}$, $y \in E$ $\underbrace{x-y}_{g_i} \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ $x = y + g_i \in E_i$ ($y \in E$)

$1 = \lambda^*(0,1) \leq \lambda^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) \leq \lambda^*(-1,2) = 3$

$\lambda^*(E)=0 \Rightarrow \lambda^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i)=0$ ↯ s dolním odhadem

>0 ↯ s horním odhadem ∎

Definice 3.10

$A\subset\mathbb{R}$ se nazývá Lebesgueovsky měřitelná $\iff \forall T\in\mathbb{R}$ platí $\lambda^*(T)=\lambda^*(T\cap A)+\lambda^*(T-A)$.

Množinu všech měřitelných množin se značí $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$.

Věta 3.33

$\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$ je σ-algebra.

Dk: 1, $\emptyset, \mathbb{R}\in\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$

2, $A\in\mathcal{P}^{\mathcal{L}} \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbb{R}-A\in\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$, $\forall T\ \lambda^*(T)=\lambda^*(T\cap A)+\lambda^*(T-A)$

$\lambda^*(T)\overset{?}{=}\lambda^*(\underbrace{T\cap(\mathbb{R}-A)}_{T-A})+\lambda^*(\underbrace{T-(\mathbb{R}-A)}_{T\cap A})$

3, a, $A,B\in\mathcal{P}^{\mathcal{L}}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$

A měřitelná testuj pomocí T, $\lambda^*(T)=\lambda^*(T\cap A)+\lambda^*(T-A)$

B — " — $T\cap A$, $\lambda^*(T\cap A)=\lambda^*(T\cap B\cap A)+\lambda^*((T\cap A)-B)$

B — " — $T-A$, $\lambda^*(T-A)=\lambda^*((T-A)\cap B)+\lambda^*((T-A)-B)$

dosaď do první rce: $\lambda^*(T)=\lambda^*(T\cap A\cap B)+\lambda^*((T\cap A)-B)+\lambda^*((T-A)\cap B)+\lambda^*(\underbrace{(T-A)-B}_{T-(A\cup B)})$

sjednocení podtržených

$=T\cap A\cup(T-A)\cap B$

$=T\cap(A\cup B)$

σ-subaditivita $\Rightarrow \lambda^*(\_)+\lambda^*(\_)+\lambda^*(\_)\geq\lambda^*(\bigcup\_)=\lambda^*(T\cap(A\cup B))$

$\lambda^*(T)\geq\lambda^*(T\cap(A\cup B))+\lambda^*(T-(A\cup B))$

$\leq$ (zřejmé)

b, indukcí: $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$ je uzavřená konečná sjednocení

$A\cap B=\mathbb{R}-((\mathbb{R}-A)\cup(\mathbb{R}-B))$ $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$ je uz. kon. průnik

$A-B=A\cap(\mathbb{R}-B)$

c, $\lambda^*(T)\overset{?}{=}\sum_{i=1}^{m}\lambda^*(T\cap E_i)+\lambda^*(T-\bigcup_{i=1}^{m}E_i)$ $\forall T\subset\mathbb{R}, \forall E_1,E_2,\dots,E_m\in\mathcal{P}^{\mathcal{L}}, E_i\cap E_j=\emptyset$, $j\neq i$

nechť platí pro m, ukáži pro $m+1$

pomocí $T-\bigcup_{i=1}^{m}E_i$ testuj měřitelnost E_{m+1}

$\lambda^*(T-\bigcup_{i=1}^{m}E_i)=\lambda^*(\underbrace{T-\bigcup_{i=1}^{m}E_i-E_{m+1}}_{T-\bigcup_{i=1}^{m+1}E_i})+\lambda^*(\underbrace{(T-\bigcup_{i=1}^{m}E_i)\cap E_{m+1}}_{T\cap E_{m+1}})$

$$\lambda^*(T) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^*(T \cap E_i) + \lambda^*(T - \bigcup_{i=1}^{m+1} E_i) + \lambda^*(T \cap E_{m+1})$$

d) $\Leftarrow$ c) $\quad \lambda^*(T) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda^*(T \cap E_i) + \lambda^*(T - \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) \quad \forall m$, lim $m \to +\infty$

$$\lambda^*(T) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^*(T \cap E_i) + \lambda^*(T - \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) \geq \lambda^*(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{+\infty}(T \cap E_i)}_{T \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i}) + \lambda^*(T - \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i)$$

čili $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \in P^{\mathcal{Z}}$

e) budiž:

$A_1, A_2, \ldots \in P^{\mathcal{Z}}$. Vytvoříme z A_i disjunktní E_i, $E_1 = A_1$, $E_2 := A_2 - A_1$, $E_3 := A_3 - (A_1 \cup A_2)$.

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

$\lambda^*(T) \geq \lambda^*(T \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i}_{\bigcup A_i}) + \lambda^*(T - \underbrace{\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i}_{\bigcup A_i})$ čili $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in P^{\mathcal{Z}} \Rightarrow P^{\mathcal{Z}}$ je σ-algebra $\blacksquare$.

Věta 3.34

λ^* je míra na σ-algebře $P^{\mathcal{Z}}$ a λ^* je úplná, tj. $\forall A \subset B \in P^{\mathcal{Z}}$ $\lambda^*(B) = 0$
$\Downarrow$
$A \in P^{\mathcal{Z}}$ $\lambda^*(A) = 0$.

Dk: σ-~~algebra~~ aditivita λ^*:

3d, (*) dosadí $T = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$

úplnost $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = 0 \quad A \in P^{\mathcal{Z}}$?

$\lambda^*(\underbrace{T \cap A}_{\subset A}) + \lambda^*(T - A) \leq \lambda^*(T)$ čili $A \in P^{\mathcal{Z}}$

$\blacksquare$

Matematika pro fyziky

20.11.2013
přepis

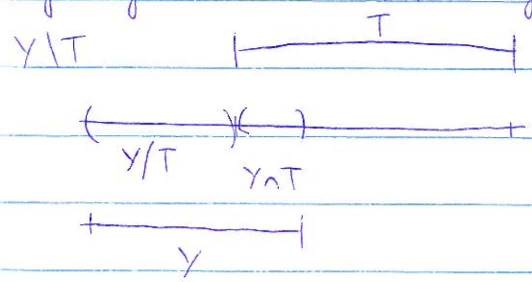
Definice 3.11

$(X, \mathcal{P})$ buď σ-algebra, $\mu: \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ buď míra (na X). Pak (X, E, μ) nazveme měřitelný prostor.

Elementy E, tj. množiny $Y \subseteq X$, nazveme měřitelné.

Pozn.

- $X = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda^*$ vnější Lebesgueova míra, $\mathcal{P}^L = \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \text{ je lebesgueovsky měřitelná}\}$
  Pak $(\mathbb{R}, \mathcal{P}^L, \mu|_{\mathcal{P}^L})$ je měřitelným prostorem.
- Y je lebesgueovsky měřitelná $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall T \subseteq \mathbb{R}$ je $\lambda^*(Y) = \lambda^*(Y \setminus T) + \lambda(Y \cap T)$



Cíl: Pro měřitelný prostor (X, E, μ) definovat prostor fcí f $(D_f \subseteq X)$ a pro jeho elementy „příslušný" integrál

Definice 3.12

(X, E, μ) měřitelný prostor, $f: Y \to \mathbb{R}$, $Y \in E$ (tj. Y je měřitelná množina). Pak f nazveme měřitelnou fcí, pokud $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((a, +\infty))$ je měřitelná (tj. prvek E). Jejich množinu označme $\mathfrak{M}(E)$

švabachové M

Pozn: 1) Zpravidla se povolí i $f: Y \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

3) Proč testuji měřitelnost vzorů intervalů? Protože to stačí. Obecně $F: Y_1 \to Y_2$, $Y_i \in E_i$, $i = 1, 2$, (X_i, E_i, μ_i) měřitelné

F měřitelné zobrazení $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $F^{-1}(Z_2) \in E_1 \quad \forall Z_2 \in E_2$

Př. Existují funkce, které nejsou měřitelné? ANO

$(\mathbb{R}, \mathcal{P}^L, \lambda^*|_{\mathcal{P}^L})$, $\langle 0, 1 \rangle = Y$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in P \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle \setminus P \end{cases}$$

kde P je množina, která nemá míru $P \notin \mathcal{P}^L$

Proč f není měřitelná?

$f^{-1}((0, +\infty)) = \{x, x \in P\} = P \notin \mathcal{P}^L (= E)$

Definice 3.13 {

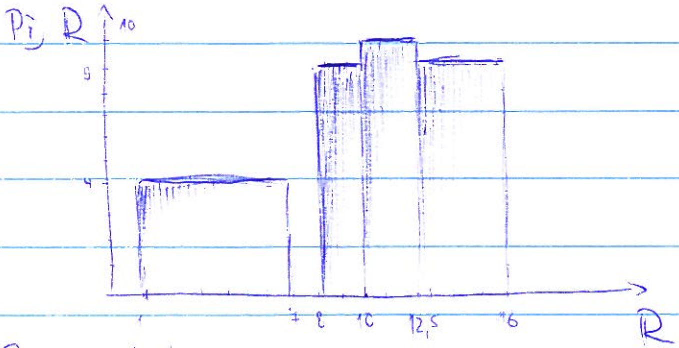
$(X, \mathcal{E}, \mu)$ měřitelný, $Y \subseteq X$ (Y libovolné, ne nutně měřitelné). Fci $s: Y \to \mathbb{R}$ nazveme jednoduchou, pokud $\exists k \in \mathbb{N}, \exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}, \exists M_1, \dots, M_k \subset X$, že

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{M_i}(x), \text{ kde } \chi_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \notin Z \\ 1, & x \in Z \end{cases}$$

je tzv. indikátorová funkce charakteristická.

Pozn: každá charakteristická fce je jednoduchá, ne obráceně

Př: $\mathbb{R}$



$$s = 4\chi_{\langle 1,7\rangle} + 9\chi_{\langle 8,10\rangle} + 10\chi_{\langle 10,12{,}5\rangle} + 9\chi_{\langle 12{,}5,16\rangle}$$

Spc. χ_M je jednoduchá $\forall M \subseteq X$ ($c_1 = 1$, $k = 1$)

Pozorování:

- $M \in \mathcal{E}$, $(X, \mathcal{E}, \mu) \Rightarrow \chi_M$ je měřitelná funkce

  Dk: Stačí, aby je nutné, aby $\chi_M^{-1}((a, +\infty))$ měřitelná množina

$$\chi_M^{-1}((a,+\infty)) = \begin{cases} \emptyset & a \geq 1 \\ M & a \in \langle 0,1) \\ X & a < 0 \end{cases}$$

$a \geq 1$ $\qquad\qquad$ $R_{ng}\, \chi_M \subseteq \langle 0,1\rangle$

$\chi^{-1}((1+\varepsilon, +\infty))$

$\chi^{-1}((-1, +\infty)) = X$

- definiční obor χ je X

- $\emptyset \in \mathcal{E}$ (protože $\mathcal{E}$ je σ-algebra - každá σ-alg obsahuje $\emptyset$)

$X = X \setminus \emptyset$ (def. σ-algebry)

$M \in \mathcal{E}$ z pp., χ je tedy měřitelná

- $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{E}$ $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Pak $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{M_i}$ je měřitelná funkce.

  Platí i naopak: Jednoduchá fce je měřitelná, pokud je konečnou lineární kombinací charakteristických funkcí χ_{M_i}, kde M_i je měřitelná.

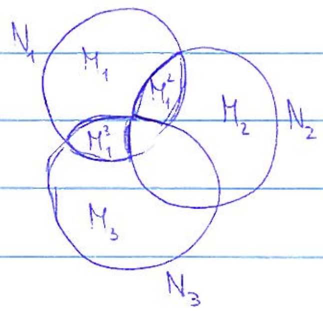
  Dk: $\Rightarrow$ přímočaré (doma) - pro jednoduchost $i \neq j$, uvažujte $M_i \cap M_j = \emptyset$

$\Leftarrow$ sporem – stačí χ_P, kde P je měřitelná z minula, není měřitelná (bylo) + lineární kombinace

<u>Pozn:</u> když s je jednoduchá $\Longrightarrow s = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{M_k}$, kde

$M_{k_1} \cap M_{k_2} = \emptyset \quad k_1 \neq k_2, \; c_k \neq 0, \; \forall k = 1, \dots, l$

Dk: $s = \sum_{k=1}^{m} d_k \chi_{N_k} \qquad \# C = \{d_i, i = 1, \dots, m \mid d_i \neq 0\}$



$M_1 = N_1 \setminus (N_2 \cup \dots \cup N_l)$

$\vdots$

$M_l = N_l \setminus (N_1 \cup \dots \cup N_{l-1})$

$M_1^2 = N_1 \cap N_2 \setminus N_3$ ale musím testovat, zda $c_1 = c_2$

$M_1^3 = N_1 \cap N_3 \setminus N_2$

$\vdots$

atd... exkluse, inkluse

$M_{i_1, \dots, i_r} = \bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} N_i \setminus \left(\bigcup_{j \notin \{i_1, \dots, i_r\}} N_j \right)$

$M_{i_1, \dots, i_r} \cap M_{j_1, \dots, j_r} = \emptyset$ kdykoli $(i_1, \dots, i_r) \neq (j_1, \dots, j_r)$

$s = \sum_{c_i \in C} c_i \chi_{M_{(i_1, \dots, i_r)} \cap N_j} \qquad \exists j \; c_i = d_j$

Značení: $f : X \to \mathbb{R}$

$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \; x \in X$

$f^-(x) = \min\{0, -f(x)\}, \; x \in X$

$\Rightarrow f(x) = f^+(x) - f^-(x), \; |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

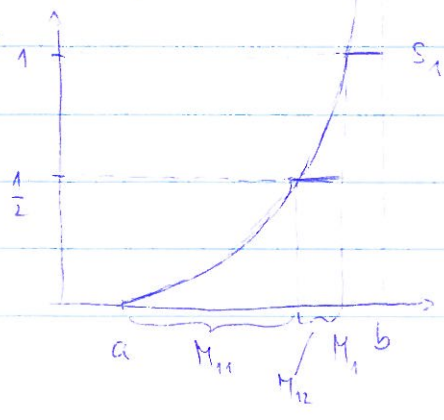
<u>Věta 3.35</u>

$f : X \to \mathbb{R}$, pak existují s_m jednoduché že

1) $f(x) = 0 \Longrightarrow s_m(x) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

2) $s_m \nearrow f$ (tj. $s_m(x) \le s_{m+1}(x) \; \forall x, \forall m$ a $\forall \varepsilon \, \exists m_0 \; \forall m \ge m_0 \; |s_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

<u>Dk:</u> Idea:



$m = 1, \; i = 1$

$M_{m,i} = \left\{ x \mid \frac{i-1}{2^m} \le f(x) \le \frac{i}{2^m} \right\}, \; i = 1, \dots, m2^m$

$M_m = \{ x \mid f(x) \ge m \}$

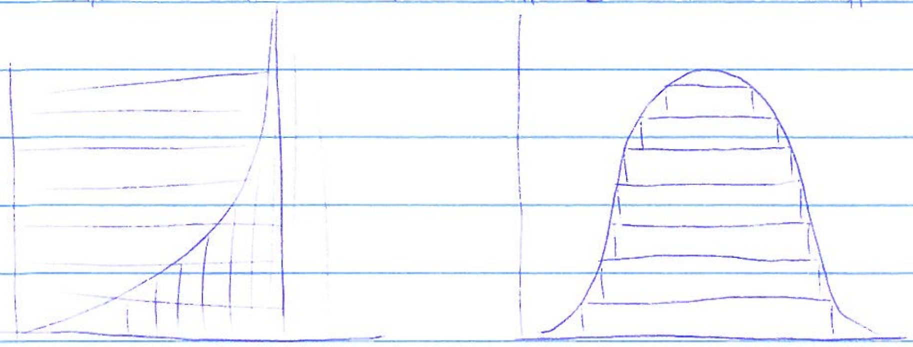
$M_{11} = \{ x \mid 0 \le f(x) \le \frac{1}{2} \}$ } průnik je 1 bod, který

$M_{12} = \{ x \mid \frac{1}{2} \le f(x) \le 1 \}$ } má míru 0

$s_m = \sum_{i=1}^{m2^m} \frac{i-1}{2^m} \chi_{M_{m_i}} + m \chi_{H_m}$ $\qquad s_1 = 1\,\chi_{M_1} + \frac{1}{2}\chi_{M_{12}} \; (+0\,\chi_{M_{11}})$

= Lebesgue

||| Riemann



Lebesgue → vepisuji jednoduché fce

Matematika pro fyziky

21\. 11. 2013

Dokončení dk z minula:

a) $x_0 \in M_{m_i} \Rightarrow s_m(x_0) = \frac{i-1}{2^m} \le f(x_0) \le \frac{i}{2^m}$

$|f(x_0) - s_m(x_0)| \le \frac{i}{2^m} - \frac{i-1}{2^m} = \frac{1}{2^m}$,

$\to 0,\ m \to +\infty$ $\qquad$ pp. že $f(x) \ge 0$

b) $x_0 \in H_m$, $s_m(x_0) = m$

$f(x_0) < +\infty \Rightarrow f(x_0) \ge m \ \forall m \Rightarrow f(x_0) \to +\infty$

$f(x_0) = +\infty$ $\quad s_m(x_0) \to f(x_0)$ (tj. $+\infty$) $\qquad s_m(x_0) \to +\infty$

Shrnutí a, a b: $s_m(x) \to f(x)$

Co když $f < 0$ nebo obecně $f \not\geq 0$. Vezmi $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $f^+(x) \ge 0$, $f^-(x) \ge 0$

Pro tyto nezáporné fce zkonstruuj s_m, ozn. s_m', s_m''. Z aritmetiky limit: $s_m' - s_m'' \to f$ (bodově)

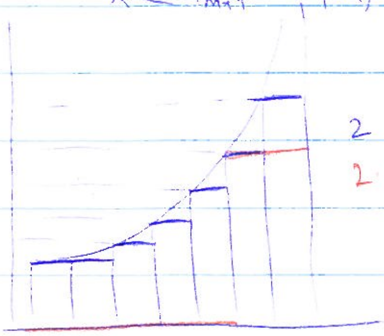
Monotonie (bodová) s_m:

$s_m(x) \le s_{m+1}(x)$?

$$\sum_{i=1}^{m2^m} \frac{i-1}{2^m} \chi_{M_{m_i}} + m\chi_{H_m} \le \sum_{i=1}^{(m+1)2^{m+1}} \frac{i-1}{2^{m+1}} \chi_{M_{m_i}} + (m+1)\chi_{H_{m+1}}$$

1) $\chi_{H_m} \ge \chi_{H_{m+1}}$ $\qquad H_m \supseteq H_{m+1}$

$x \in H_{m+1} \Rightarrow f(x) \ge m+1 \to f(x) \ge m \Rightarrow x \in H_m$



2 $\qquad$ analog. jak a, a b. $\qquad \boxtimes$

$2 \cdot 2^2$ $\qquad$ Každou fci lze aproximovat schodovitými fcemi.

Př. Dirichletova fce $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$$D(x) = \chi_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \chi_{\mathbb{Q}}$$

Dirichletova fce je jednoduchá

- aproximuji ji $\bar{s}_m = \chi_{\mathbb{Q}}$ $\forall m$ $\bar{s}_m \nearrow D(x)$

Definice 3.14

(X, E, μ) měřitelný prostor. Mějme funkci $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{M_i}$, $M_i \in E$, $\forall i = 1, \dots, k$

- $\int s \, d\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mu(M_i)$

- Dále nechť $f \geq 0$, $f: X \to \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$

$$\int_Y f \, d\mu := \sup \left\{ \int s \, d\mu \mid s \leq f, \ s \text{ je jednoduchá a } s(X \setminus Y) = 0 \right\}$$

- $f = f^+ - f^-$ | $\int_Y f \, d\mu := \int_Y f^+ d\mu - \int_Y f^- d\mu$, pokud má pravá strana smysl (ve smyslu limit)

Pak $\int_Y f \, d\mu$ nazveme Lebesgueovým integrálem funkce f pro množinu Y asociovaným s měřitelným prostorem (X, E, μ).

Věta 3.36

Nechť Y je měřitelná, pak $\int_Y f^+ d\mu$ a $\int_Y f^- d\mu$ existují a existuje i $\int_Y f \, d\mu$, pokud má smysl $\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

Dk: jednoduché, protože $\sup Z$ existuje vždy (vlastní či nevlastní) $\forall Z \subseteq \mathbb{R}$ $\boxtimes$

Technická lemmata:

(spějeme k větám o záměně derivace a integrálu, limity a integrálu)

Lemma 3.37

f měřitelná $\Rightarrow \exists s_m$ jednoduché a měřitelné, že

1) $s_m(x) = 0 \Leftarrow f(x) = 0$ $\forall x \in X$ $\forall m \in \mathbb{N}$

2) $s_m \nearrow f$

Dk: f splňuje pp. tvrzení o aproximaci funkcí jednoduchými funkcemi. Speciálně máme

máme jako s_m k dispozici, pak je jednoduchá, pak to konečné součty reálných násobků χ_N, kde $N = M_{m_i}$ nebo H_m

Dokažme nejprve měřitelnost M_{m_i}, H_m

$$H_m = f^{-1}((m,+\infty))$$

$$M_{m_i} = f^{-1}\left(\left(\frac{i}{2^m},+\infty\right)\right) \cap f^{-1}\left(\left(\frac{i-1}{2^m},+\infty\right)\right)$$

H_m je měřitelná, neboť f je měřitelná

$f^{-1}\left(\frac{i}{2^m},+\infty\right)$ a $f^{-1}\left(\frac{i-1}{2^m},+\infty\right)$ jsou také měřitelné, neboť f je měřitelná (i def měřitelnosti fce)

TRIK: A je měřitelná ... $X\setminus A$ měř.

B je měřitelná ... $X\setminus B$ měř.

$$X\setminus(A\cap B) = (X\setminus A)\cup(X\setminus B)$$

M_{m_i} je takového typu a je tedy měřitelná ($A\cap B$ je měřitelná) ∎

Pozn: lineární kombinace χ_M, kde M je měřitelná, je měřitelná

Věta 3.37

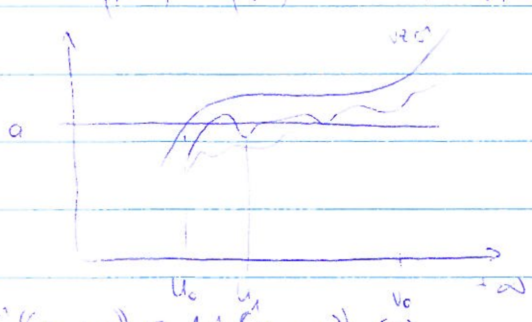
(X,E,μ) měřitelný prostor, $f_m: Y\to\mathbb{R}^*$, Y je měřitelná (tj. $Y\in E$), f_m měřitelné. Pak jsou měřitelné i následující fce:

1) $\sup\{f_m(x), m\in\mathbb{N}\}$
2) $\inf\{f_m(x), m\in\mathbb{N}\}$
3) $\limsup\limits_{m\to+\infty} f_m(x)$
4) $\liminf\limits_{m\to+\infty} f_m(x)$

Dk: $f(x) := \sup\{f_m(x) | m\}$ existuje (mohou existovat x, kde $f(x)=+\infty$)

$f^{-1}((a,+\infty))$, $a\in\mathbb{R}$

Víme $f_m(x)\le f(x)$ $\forall x\in Y$ $\forall m\in\mathbb{N}$



$f_m^{-1}((a,+\infty)) \subseteq f^{-1}((a,+\infty))$ (*)

měřitelné, neb f_m je měřitelná, ale o f^{-1} nic nevíme $\to$ 2. bod suprema

Víme $\forall x\in Y$ $\forall \varepsilon>0$ $f_{m_0}(x) > f(x)-\varepsilon$ $\quad f(x) < f_{m_0}(x)+\varepsilon$

(**) $f^{-1}((a,+\infty)) \subseteq f^{-1}_{m_0}((a,+\infty))$ ... obecně není pravda

$\subseteq (f_{m_0} + \varepsilon)^{-1}((a, +\infty)) \quad \forall \varepsilon > 0$ a proto — limitním přechodem

$\Rightarrow f^{-1}((a, +\infty)) \subseteq$ měřitelná množina $f_m((a, +\infty))$ — měřitelná z předpokladu a definice

(Definice suprema

$a_m \leq a = \sup(a_m) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0 > 0 . \ a_{m_0} > a - \varepsilon$)

Celkem $(*) + (**)$ postupně $f^{-1}((a, +\infty)) = f_{m_0}^{-1}((a, +\infty))$

tedy f je měřitelná — měřitelná, tj. $f^{-1}((a, +\infty))$ měřitelná

3. inf. $\longleftrightarrow$ $\inf f_m = -\sup(-f_m)$

3. $\lim\limits_{k \to +\infty} \sup f_m(x) = \lim\limits_{k \to +\infty} \sup\limits_{m \geq k} f_m(x) = \inf\limits_{k} (\sup\limits_{m \geq k} f_m)$

obdobně

monotónní sem. (dle Věty o polospojitých funkcích.)

4. analogicky (přehodí se $\sup \longleftrightarrow \inf$)

Matematika pro fyziky

27. 11. 2013

minule: Byly měřitelné funkce $\mathcal{M}(X)$

$\int f\,d\mu$ Lebesgueův integrál vlastní / nevlastní

Věta o aproximaci měřitelných funkcí funkcemi jednoduchými

Algebraické vlastnosti měřitelných jednoduchých funkcí

Věta 3.38:

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ nechť je měřitelný prostor. Mějme $s_1, s_2, s \in \mathcal{M}(X)$ nezáporné a jednoduché a $c \in \mathbb{R}$. Pak

1) $\int_X (s_1+s_2)\,d\mu = \int_X s_1\,d\mu + \int_X s_2\,d\mu$ aditivní

2) $\int_X (cs)\,d\mu = c\int_X s\,d\mu$

Dk: ① $s_1 = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{M_i}$, $s_2 = \sum_{j=1}^{l} \tilde{c}_j \chi_{\tilde{M}_j}$ kanonické rozklady ($M_i \cap M_j = \emptyset$, $c_i \neq 0$, $\tilde{c}_j \neq 0$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, $M_i \cap \tilde{M}_j \neq 0$)

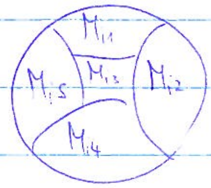
$M_{ij} = M_i \cap \tilde{M}_j$

$x \in M_{ij}$ $\quad \underbrace{s_1(x) + s_2(x)}_{=(s_1+s_2)(x)} = c_i + \tilde{c}_j$

$$\int (s_1+s_2)\,d\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} (s_1+s_2)\chi_{M_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{k,l} (c_i + \tilde{c}_j)\mu(M_{ij}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} (c_i \, \tilde{c}_j)\mu(M_{ij}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mu(M_i) + \sum_{j=1}^{l} \tilde{c}_j \mu(\tilde{M}_j), \text{ neboť } M_i = \bigcup_{j=1}^{l} (M_i \cap M_j)$$

$$\tilde{M}_j = \bigcup_{i=1}^{k} (\tilde{M}_j \cap M_i)$$



M_i

$$\text{a } \mu(M_i) = \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\mu(M_i \cap M_{ij})}_{\text{jsou disjunktní}} = \sum_{j=1}^{l} \mu(M_{ij})$$

Pokračování rovnosti výše je:

$$= \int_X s_1\,d\mu + \int_X s_2\,d\mu$$

② $$\int_X (cs)\,d\mu = \int_X c\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{M_i}\right)d\mu \underset{\text{bod 1}}{=} \int_X \left[\sum_{i=1}^{k} (cc_i)\chi_{M_i}\right]d\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_X (cc_i)\chi_{M_i}\,d\mu =$$

$= \sum_{i=1}^{k} c c_i \mu(M_i) = c \int_X s \, d\mu$

„To je něco jako.. pro všechny zelené pixely z pf.. z lesa.. platí.."

$\blacksquare$

Definice 3.15

(X, E, μ) je měřitelný prostor a $V(x)$ buď výroková forma pro proměnnou $x \in X$. Řekneme, že $V(x)$ platí skoro všude $\iff \exists N \in E$ jež $\mu(N) = 0$ a $\forall x \in X \setminus N$ je $V(x)$ platné.

Př.: • $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Q} \end{cases}$

dirichletova fce $\quad D(x) = 0$ s.v. (skoro všude)

• $V(x) = (x \in X)$ (není to výrok protože to nekvantifikuji výrokové formy)

$V(x)$ platí s.v. $\iff \exists N, \mu(N) = 0, \exists N \subseteq X, N \in E, \forall x \in X \setminus N$ je $x \in X$

$\rightarrow N = \emptyset$

Věta 3.39

(X, E, μ) buď měřitelný prostor, $s \in M(X)$, $s \geq 0$ s.v. a s jednoduchá.

Pak 1) $\int_X s \, d\mu \geq 0$

2) $\int_X s \, d\mu = 0 \iff s(x) = 0$ s.v. na X.

3) $s = s'$ s.v. na $X \implies \int_X s \, d\mu = \int_X s' \, d\mu$

4) $s_1 \leq s_2$ s.v. $\implies \int_X s_1 \, d\mu \leq \int_X s_2 \, d\mu$

Dk: 1) $s \geq 0$ s.v. Buď $s = \sum_{i=1}^{\bar{k}} c_i \chi_{M_i}$ kanonický zápis s

$s = \sum_{i=1}^{l} d_i \chi_{M_i} + \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i \chi_{N_i}$, N_i míry nula na $N = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$ se s a s' mohou lišit

$s' = \sum_{i=1}^{l} d_i \chi_{M_i} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \tilde{\tilde{d}}_i \chi_{N_i}$

$\int s \, d\mu = \sum_{i=1}^{l} d_i \mu(M_i) + \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i \mu(N_i) = \sum_{i=1}^{l} d_i \mu(M_i) + \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i \cdot 0 = \int s' \, d\mu$

1) analogicky $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{M_i} + \sum_{i=1}^{l} d_i \chi_{N_i}$

$$\int s \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(M_i) + \sum_{i=1}^{l} d_i \mu(N_i) - \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(M_i)$$

3) zřejmé

4) $s_1 \leq s_2$ s.v. $\Rightarrow s_2 - s_1 \geq 0$ s.v.

$$0 \underset{①}{\leq} \int_X (s_2 - s_1) \, d\mu \underset{\uparrow}{=} \int_X s_2 \, d\mu - \int_X s_1 \, d\mu \Rightarrow \int_X s_1 \, d\mu \leq \int_X s_2 \, d\mu$$

z linearity V 3.

Definice 3.16

Nechť $(X, \mathcal{E}, \mu)$ je měřitelný prostor. Pak definujeme $\mathcal{L}^*(\mu, X) = \{ f \in \mathcal{M}(X) \mid \int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$ má smysl $\}$

$\mathcal{L}(\mu, X) = \{ f \in \mathcal{L}^*(\mu, X) \mid \int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$ je konečný (Lebesgueovsky) μ - integrovatelný $\}$.

Př. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ je měřitelná, neboť $\forall x \in R_{ng} f$

$= \begin{cases} R^+ \\ \{0\} \\ R^- \end{cases}$

$\forall x \in R \setminus R_{ng} f$ je $\operatorname{sgn}^{-1}(x) = \emptyset$ a všechny 4 množiny jsou měřitelné $(\emptyset, R^-, \{0\}, R^+)$

- $f \in \mathcal{L}^*(\mu, X)$

$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 1) N.P. $\operatorname{sgn}(x) \subset \mathcal{M}(X)$

2) $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$ má mít smysl

$$\int_{R=X} f^- \, d\mu = \int_{R=X} 1 \chi_{R^+} \, d\mu = 1 \mu(R^+) = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\int_X f^- \, d\mu = \int_X \max\{-f(x), 0\} \, d\mu = \int_{R^-} 1 \chi_R = +\infty$$

$\mathcal{L}^* \Longleftrightarrow \int f^+ - \int f^- = +\infty - (+\infty)$ nemá smysl $\quad sgn \notin \mathcal{L}^*(X = \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}(X,\mu) \subseteq \mathcal{L}^*(X,\mu)$ víme

nevíme: $\mathcal{L}(X,\mu) \subset \mathcal{L}^*(X,\mu)$

x^2 má smysl $(x^2)^+ = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\max\{-x^2, 0\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x^2)^- = 0$

$\int (x^2)^+ d\mu =$ NEUMÍM ale bude to $+\infty$

$- \int 0 = 0 \qquad\qquad M(X) \supset \mathcal{L}^*(X,\mu) \supseteq \mathcal{L}(X,\mu)$

Pořádně: $\mathcal{L}^*(X,\mu) \supset \mathcal{L}(X,\mu)$

$f(x) = 1 \quad \int 1 d\mu = \int 1^+ d\mu - \int 1^- d\mu = \int 1 d\mu - \int 0 d\mu = 1\mu(\mathbb{R}) = +\infty$

Matematika pro fyziky

28. 11. 2013

Věta 3.40

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ měřitelný prostor a $f \in \mathcal{M}(X)$. Pak

1) $f = 0$ s.v. $\Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$

2) $0 \leq f \leq g$ s.v. $\Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

Dk: 1) Snadno z 2) $g = 0$ (s.v.) ($\int f d\mu \geq 0$, $f \geq 0$ s.v., z definice)

2) $\tilde{s}_m \nearrow f$ jednoduché nezáporné a měřitelné; libovolné posloupnost!

$\exists$ dle věty o aproximaci měřitelné funkce funkcemi jednoduchými

$\exists \, \tilde{\tilde{s}}_m \nearrow g$ (jednoduché, měřitelné, nezáporné) a VoA, a navíc zjevně takové, že je otázka

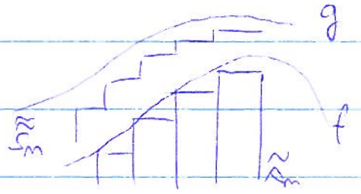
$\tilde{s}_m \leq \tilde{\tilde{s}}_m \; (\leq g)$

$\Rightarrow \int_X \tilde{s}_m \, d\mu \leq \int_X \tilde{\tilde{s}}_m \, d\mu$ (z V3.39) $\forall m \in \mathbb{N}$

monotonie $\int d\mu$ pro jednoduché

Nyní aplikací $\sup\limits_{m \to +\infty}$ na předchozí nerovnost dostaneme: $\sup\limits_{m \to +\infty} \int_X \tilde{s}_m \, d\mu \leq \sup\limits_{m \to +\infty} \int_X \tilde{\tilde{s}}_m d\mu \leq$

$\leq \int_X g \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \,\middle|\, s \leq g \right\}$



Shrnutí: $\forall \tilde{s}_m \nearrow f$ vím, že $\sup\limits_{m \to +\infty} \int_X \tilde{s}_m \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

Stačí dokázat, že $\exists \, \mathring{\tilde{s}}_m$, že $\mathring{\tilde{s}}_m \nearrow f$ a

$\sup\limits_{m \to +\infty} \int_X \mathring{\tilde{s}}_m d\mu = \sup\limits_{m \to +\infty} \left\{ \int_X s \, d\mu \,\middle|\, s \leq f \right\}$ Sporem: ($\exists \, \mathring{\tilde{s}}_m$) Předpokládejme, že $\sup\limits_{m \to +\infty} \int_X \mathring{\tilde{s}}_m d\mu < \sup\limits_{m \to +\infty}$

$\left\{ \int_X s \, d\mu \,\middle|\, s \leq f \right\}$ (> nemá otázka, protože $\sup\limits_{s < f} \geq \sup\limits_{m}$)

$\forall \mathring{\tilde{s}}_m \nearrow f$ Def:

$\sup\limits_{s < f} \int_X s \, d\mu$

$\sup\limits_{s < f} \int_X s \, d\mu - \varepsilon$

$\sup\limits_{m} \int_X \mathring{\tilde{s}}_m \, d\mu$

Z definice sup plyne $\exists \, s_1$, že $\int_X s_1 \, d\mu > \sup \int_X s \, d\mu - \varepsilon$

Zvol $\tilde{s}_1 := s_1, \tilde{s}_2 \le \tilde{s}_3 \le \tilde{s}_4 \le \dots \nearrow f$

libovolné nezáporné jednoduché měřitelné

$$\sup_{m\to+\infty} \int_X \tilde{s}_m \, d\mu \ge \sup_{\tilde{s}\le f} \int_X \tilde{s} \, d\mu \underset{\text{a priori}}{>} \sup_{s\le f} \int_X s \, d\mu - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$\blacksquare$

$$\Rightarrow \sup_{m\to+\infty} \int_X \tilde{s}_m \, d\mu > \int_X s \, d\mu$$ ↯ s definicí suprema !.

Pozn a důsledek

f, g měřitelné, nezáporné a nechť se rovnají s.v. $\Rightarrow 0 \le f \le g$ na $X \setminus N_1$

$0 \le g \le f$ na $X \setminus N_2$

$\rightarrow f = g$ na $X \setminus (N_1 \cup N_2) = X \setminus N$, kde $N = N_1 \cup N_2$, což je množina míry nula.

Užijeme-li $\int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$ a $\int_X g \, d\mu \le \int_X f \, d\mu \Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$

Jinak řečeno: ~~...~~ rovnost s.v. $\Rightarrow$ rovnost Lebesgueových integrálů

Shrnutí:

Integrály funkcí jež se shodují s.v.
- pro jednoduché, nezáporné, měřitelné
- pro měřitelné (V 3.40 + Pozn)
- tím spíš pro nezáporné z $\mathcal{L}^*(X,\mu), \mathcal{L}(X,\mu)$
- pro $\mathcal{L}(X,\mu), \mathcal{L}^*(X,\mu)$

Integrál je monotónním operátorem $f \le g$ s.v. $\Rightarrow \int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$:
- pro jednoduché, nez., měřitelné
- pro měřitelné (V 3.40)
- tím spíš pro nezáporné z $\mathcal{L}^*(X,\mu)$ a $\mathcal{L}(X,\mu)$
- pro $\mathcal{L}(X,\mu), \mathcal{L}^*(X,\mu)$

snadným trikem $\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$, $f^+, f^- \ge 0$

Linearita $\int_X d\mu$:
- jednoduché, měř., nezáporné (vím)
- měřitelné (nevím)
- $\mathcal{L}(X,\mu), \mathcal{L}^*(X,\mu)$ nezáporné

• $\mathcal{L}(X,\mu)$, $\mathcal{L}^*(X,\mu)$

Věta 3.41

(X,E,μ) měřitelný prostor. Nechť $f,g \in \mathcal{L}(X,\mu)$, $a,b \in \mathbb{R}$. Pak $a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu =$

$= \int_X (af+bg)\,d\mu.$

Dk: 1) pp., že $b=0$

a) $a=0$ $\quad af=0 \quad \int_X af\,d\mu = 0,\ 0\cdot\int_X f = 0$ triv.

b) $a\neq 0$ BÚNO $a>0$ ($a<0$ analogicky, Kopdáč) Z definice int.:

$$\int_X af\,d\mu = \sup_{0\le s\le af}\int_X s\,d\mu = \left|\tilde{s} = \frac{s}{a}\right| = \sup_{0\le\tilde{s}\le f}\int_X s\,d\mu = \sup_{0\le\tilde{s}\le f}\int_X a\tilde{s}\,d\mu =$$

V3.39 (38.?) linearita pro jednoduché

$$= \sup_{0\le\tilde{s}\le f} a\int_X \tilde{s}\,d\mu = a\sup_{0\le\tilde{s}\le f}\int_X \tilde{s}\,d\mu = a\int_X f\,d\mu.$$

2) Zjevně stačí $a=b=1$ $\quad \int_X (s_1+s_2)\,d\mu = \int_X s_1\,d\mu + \int_X s_2\,d\mu$

• Kopdáč – pokud se to chceš učit z toho, tak tu STAROU VERZI, ne tu novou

a) $f\ge 0$, $g\ge 0$ pp $\tilde{s}_m \nearrow f$, $\tilde{\tilde{s}}_m \nearrow g$ $\exists$ (aproximační věta), jednoduché, měřitelné, nezáporné

$s_m = (\tilde{s}_m + \tilde{\tilde{s}}_m) \nearrow (f+g)$ (aritmetika limit)

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{m\to+\infty}\int_X s_m\,d\mu = \lim_{m\to+\infty}\int_X (\tilde{s}_m+\tilde{\tilde{s}}_m)\,d\mu = \lim_{m\to+\infty}\left[\int_X \tilde{s}_m\,d\mu + \int_X \tilde{\tilde{s}}_m\,d\mu\right] =$$

stejně jako v dk. V3.40 $\quad$ lin. int. pro jednoduché, nez. měř. $\quad$ aritmetika limit

$$= \lim_{m\to+\infty}\int_X \tilde{s}_m\,d\mu + \lim_{m\to+\infty}\int_X \tilde{\tilde{s}}_m\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

b) Nyní obecné f,g. Založíme na identitách $\int_X (f^{\pm}+g^{\mp})\,d\mu = \int_X (v + (f+g)^{\mp})\,d\mu$, kde

$v := f^+ + g^+ - (f+g)^+$ a je nezáporná, jak snadno nahlédneme dáme

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu = \int_X v + (f+g)^+ d\mu \quad (*)$$

$$\int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X (v + (f+g)^-) d\mu \quad (**)$$

Cvičení $\int_X (v + (f+g)^-) d\mu$ nám $\to$ linearita

$\int_X (v + (f+g)^+) d\mu$ nám také. Můžu psát dle 1,b)

$\int_X v\, d\mu + \int_X (f+g)^- d\mu$, resp. $\int_X v\, d\mu + \int_X (f+g)^+ d\mu$

Odečtu (*) a (**).

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X f^- d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu$$

$$\int_X f d\mu + \int_X g\, d\mu = \int_X (f+g)\, d\mu$$

DÚ - zkuste ony dvě identity $\boxed{f \leq g \leq 0}$

Úloha: $v := f^+ + g^- - (f+g)^+ \geq 0$ dk.

Dk: $f(x) \geq 0 \iff f(x)(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$

$$f^+(x) + g^-(x) - (f+g)^+(x) \geq 0$$

$$\max\{0, f(x)\} + \max\{0, g(x)\} - \max\{0, (f+g)(x)\} \geq 0$$

$$\max\{0, f(x)\} + \max\{0, g(x)\} - \max\{0, f(x)+g(x)\} \geq 0$$

1, $0 \leq f(x) < -g(x)$

$$f(x) + 0 - 0 = f(x) \geq 0 \ \checkmark$$

2, $f(x) \geq -g(x)$

0	0	$-(f(x)+g(x)) = -(f(x)+g(x))$	≥ 0	$\checkmark$
$f(x)$	0	$-(f(x)+g(x)) = -g(x)$	≥ 0	$\checkmark$
0	$g(x)$	$-(f(x)+g(x)) = -f(x)$	≥ 0	$\checkmark$
$f(x)$	$g(x)$	$-(f(x)+g(x)) = 0$	≥ 0	$\checkmark$

Lemma 3.42

(X, E, μ) měřitelný prostor, $\forall i \in \mathbb{N}$, $X_i \in E$, $X_i \subseteq X_{i+1}$, $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Pak $\lim\limits_{i \to +\infty} \int_{X_i} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$, pokud $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} X_i = X$.

Dk: 1, pro $f = 1$ $\lim\limits_{i\to+\infty} \int_{X_i} 1 \, d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i = X} 1 \, d\mu$ (dk σ-aditivita μ)

2, jednoduchý nezáporný, měřitelný $f = \Delta$

3, měř. f

4, diskuze $\mathcal{L}(X, \mu)$ ... f^+, f^- ▨

Pozn: Lze nalézt Kopáček III

3.3. Limitní přechody

Věta 3.43 (Levi-Beppo Levi lemma)

(X, E, μ) měřitelný prostor, $f_n \geq 0$ s.v., $f_n \in \mathcal{L}^*(X, \mu)$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ s.v. na X

$f_n(x) \to f(x)$, $n \to +\infty$, s.v. na X. Pak:

1, $f \in \mathcal{L}^*(X, \mu)$

2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \left(\overset{\text{def } f(x)\ (pp.)}{=} \int_X \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \right)$

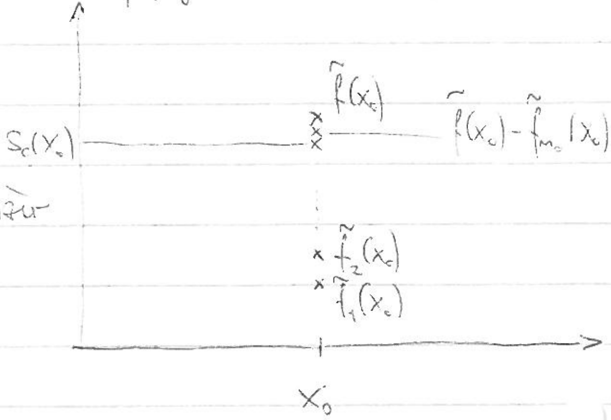
Dk: $f_1(x)$ změnit, ať $\tilde{f}_1(x) \geq 0$ na X ..... N_1

$f_2(x)$ změň, ať $\tilde{f}_2(x) \geq \tilde{f}_1(x)$ na X … N_2
$f_3(x)$ změň, ať $\tilde{f}_3(x) \geq \tilde{f}_2(x)$ na X … N_3
. (formální indukce přes n)
Pak ale $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ na $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i$, neb $\tilde{f}_n$ monotónní (a monotónní posl. má limitu)
$\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ na $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i$ změníme, ať byly monotónní $\downarrow$ Věta ze začátku 2. sem.
$f = \tilde{f}$ s.v. kromě množiny $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i$, jež má míru $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(N_i)$

σ-aditivita, $\mu = 0$

1, $\forall s$ jednoduchou, nezápornou, měřitelnou, která splňuje $s \leq \tilde{f}$ na X a $\forall c \in (0,1)$ definujme
$s_c = cs$ (na X) a $\forall n \in \mathbb{N}$: $X_i = \{x \in X \mid \tilde{f}_n(x) \geq s_c(x)\}$
a, $x \in X_n \Rightarrow \tilde{f}_{n+1}(x) \geq \tilde{f}_n(x) \geq s_c(x) \Longrightarrow x \in X_{n+1}$
~~[illegible]~~ n.r. $\tilde{f}$

b, $x_0 \in X$ • $\tilde{f}(x_0) > 0$. Jelikož $s(x_0) \leq \tilde{f}(x_0) \Rightarrow s_c(x_0) < \tilde{f}(x_0)$ $(0 < c \leq 1)$
Jelikož $\tilde{f}_n(x_0) \nearrow \tilde{f}(x_0)$, tak z definice limity plyne, že $\exists n_0$, že $f_{n_0}(x_0) \geq s_c(x_0)$
def X_n $\quad \varepsilon = \tilde{f}(x_0) - s_c(x_0)$
$\Rightarrow x_0 \in X_{n_0} \Rightarrow x_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$



• $\tilde{f}(x_0) = 0$ $\quad s(x_0) \leq \tilde{f}(x_0)$ takovou s uvažujeme
avšak $s \geq 0 \Longrightarrow s(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 \in X_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
neb $\tilde{f}_n(x_0) \geq 0$, tudíž nebo než $s(x_0)$
Celkem $x_0 \in X \Longrightarrow x_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$
triv. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i \subseteq X$, ověřili jsme tedy pp. lemmatu 3.42

$$3^{(R1)} \int_{X_n} s_c \, d\mu \leq \int_{X_n} \tilde{f}_n \, d\mu = \int_{X_n} \tilde{f}_n \chi_{X_n} \, d\mu \qquad \text{def} \int_{X_n} \ldots = \int_X \ldots \chi_{X_n}$$

def. X_n + monotonie int.
neb $\int$ nezáleží na množině míry 0

monotonie int.
$f \leq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$, $f, g \in \mathcal{L}^*(X, \mu)$

lim (R1)
$n \to +\infty$

$$\int_X s_c \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{X_n} s_c \, d\mu \qquad \text{linearita } \forall 3.40$$

$$\int_X cs \, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \Leftrightarrow \quad c \int_X s \, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \quad / \lim c \to 1^-$$

$$\int_X s\,d\mu \le \lim_{m\to+\infty} \int_X f_m\,d\mu$$

Závěr bodu 1, a 2, $\forall s \le f$ jednoduchou, nez., měř., máme $\int_X s\,d\mu \le \int_X \lim_{m\to+\infty} f_m\,d\mu$ (*)

Na druhou stranu $\int_X f\,d\mu \overset{(NR2)}{\ge} \int_X f_m\,d\mu$ ($f_m \le f$ s.v. + mono $\int$)

z def. $\underbrace{\int_X f\,d\mu}_{\int_X f^+ d\mu - \underbrace{\int_X f^- d\mu}_{0\,(s.v.)}} = \sup\left\{\int_X s\,d\mu \,\middle|\, s\le f\right\} \le \sup\left\{\lim_{m\to+\infty}\int_X f_m\,d\mu \,\middle|\, s \le f\right\} = \lim_{m\to+\infty}\int_X f_m\,d\mu$, tj. $\int_X f\,d\mu \le$

nerovnost výše (*)

$\le \lim_{m\to+\infty}\int_X f_m\,d\mu \implies \lim \int_X f_m\,d\mu \ge \int_X f\,d\mu \ge \lim_{m\to+\infty}\int_X f_m\,d\mu$ NR2 + policajti ∎

Pozn: Vím vůbec, že mohu psát $\int_X f\,d\mu = ?$

a) f_m měř., $f_m \in \mathcal{L}^*(X,\mu) \xRightarrow{\text{lemma}} \liminf_{m\to+\infty} f_m$ měřitelná

b) $\liminf_{m\to+\infty} f_m = \lim_{m\to+\infty} f_m$ s.v. z bodové monotónnosti

$(f_m)_{m=1}^{+\infty}$ ($\liminf$ $\exists$ vždy, if $\exists \lim_{m\to+\infty} f_m \Rightarrow \liminf f_m = \lim f_m$)

$\liminf f_m$ měř. $\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} f_m \in M(X)$

c) f je s.v. nezáporná a $\int_X f\,d\mu = \int_X f^+ d\mu$, pokud $\exists \int_X f^+ d\mu$

$\int_X f^+ d\mu = \sup\left\{\int_X s\,d\mu \,\middle|\, s \le f\right\}$ avšak $\sup\int_X s\,d\mu$ $\exists$ vždy. (ať si není číslo) $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

Věta 3.44 Leviho věta

zobecnění integrovatelné

(X, E, μ) měřitelný prostor, $f_m \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, $f_m(x) \le f_{m+1}(x)$ s.v. na X. Nechť $\exists g \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$ funkce $\int_X g\,d\mu > -\infty$ a $g \le f_1$ s.v. $\underset{s.v.}{\le} f_2 \underset{s.v.}{\le} f_3 \dots$ Pak $\exists f(x) = \lim_{m\to+\infty} f_m(x)$ s.v. $\in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

a $\int_X f\,d\mu = \lim_{m\to+\infty}\int_X f_m\,d\mu$.

($\overset{\lim}{\text{nerostoucí}}$, ohraničenost monotónního int je int. lim f_m)

Dk: 1, $f_m \ge g$ s.v. $\xRightarrow{\text{def } \Psi^-} f_m^- \le g^-$ (*)

$\int_X g\,d\mu > -\infty$ avšak $\int_X g\,d\mu = \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu > -\infty \underset{g\in\mathcal{L}^*(X,\mu)}{\Longrightarrow} \int g^- d\mu$ je konečné reálné číslo

a nejsou nad sebou

5.12.2013

Odtud vzal mj. g^- je konečná s.v. neb kdyby byla nekonečná na nějaké množině míry větší než nula, pak z nezápornosti g^- $\Rightarrow \int g^- d\mu = +\infty$

$\tilde{f}_n = f_n + g^-$, $\tilde{f}_n \geq 0$ s.v. (pp.), neboť $\tilde{f}_n = f_n^+ - \underbrace{f_n^- + g^-}_{\geq 0 \ (*)} = f_n^+ +$ nezáporné ≥ 0

(*) $g^- \geq f_n^-$, tj. celkově $-f_n^- + g^- \geq 0$, a odtud $\geq$ s.v. (výše), neb přičtení $f_n^+ \geq 0$

• $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$? $\tilde{f}_n = f_n + g^- \Longrightarrow \int_X \tilde{f}_n d\mu = \underbrace{\int_X f_n d\mu}_{\in \mathbb{R}^*} + \underbrace{\int_X g^- d\mu}_{\in \mathbb{R}}$ (vlastní číslo)

neb $f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

napsaný výraz má smysl. Odtud $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

(N.p. $\in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, a sice měřitelnost zřejmě splníme, neb $\mathcal{M}(X)$ je v.p. ($f_n, g^- \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow f_n + g^- \in \mathcal{M}(X)$))

2) $\tilde{f}_n = f_n + g^- \leq f_{n+1} + g^-$ (z pp. na f_n) $\Longrightarrow \tilde{f}_n \nearrow f + g^-$, neb $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ dle pp. (z arit. limit).

Jsou tedy splněny pp. Léviho lemmatu, a proto:

$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, a však $\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}_n = \lim_{n\to+\infty}(f_n + g^-) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, neb

$g^- \in \mathcal{L}(X,\mu)$ (aritmetika limit)

$\lim(f_n + g^-) = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g^- = \lim_{n\to\infty} f_n + g^-$

$\int_X f d\mu \overset{\text{aditivita} \int}{=} \int_X f_n d\mu + \int_X g^- d\mu - \int_X g^- d\mu =$

$= \underbrace{\int_X (f + g^-) d\mu}_{\in \mathbb{R}^*} - \underbrace{\int_X g^- d\mu}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \int_X f d\mu \in \mathbb{R}^*$, resp. $f \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

Odkud $\int_X (f+g^-) d\mu$ má smysl: $\int_X (f+g^-)^+ d\mu - \underbrace{\int_X (f+g^-)^- d\mu}_{=0}$ Ano,

neboť $(f+g^-)^+$ je měřitelná (viz výše) a nezáporná a int. (μ-Leb. int.) je def.

$\sup\left\{\int_X s\, d\mu \mid s \in \hat{\ } \right\}$ je $\exists$ vždy ($\in \mathbb{R}^*$).

Shrnutí: $f \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

$\exists \left(\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu\right) + \int_X g^- d\mu \overset{\text{ar. lim}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\int_X f_n d\mu + \int_X g\, d\mu\right) \overset{\text{adit.} \int}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_X (f_n + g)\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \tilde{f}_n d\mu =$

$$= \int_X \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}_n \, d\mu =$$

z Léviho lemmatu, jehož předpoklady ověřeny v části dk výše.

$$= \int_X \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} (f_n + g^-) \, d\mu \underset{\text{adit} \int}{=} \int_X (\lim f_n + g^-) \, d\mu \underset{\text{adit} \int}{=} \int_X \lim f_n \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu, \text{ odkud}$$

odečtením $\int_X g^- \, d\mu$ dostáváme, že

$$\lim \int_X f_n = \int_X \lim f_n \, d\mu \qquad \blacksquare$$

Věta 3.45 (Léviho věta 2)

Nechť (X, E, μ) je měřitelný prostor $f_n \geq f_{n+1}$ s.v. na X a $f_n \underset{n\to+\infty}{\searrow} f$ s.v. (tj. jistě $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$)
Nechť $\exists h \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$ a $\int_X h \, d\mu < +\infty$ a $h \geq f_1$ ($\geq f_2 \geq \dots$). Pak

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \in \mathcal{L}^*(X,\mu) \text{ a } \int_X f \, d\mu \left(= \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu\right) = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu$$

Dk: stejně (monotónní na limitu, $\tilde{f}_n$ = oprava h^+, Léviho lemma, ar. lim., adit. $\int$)

Věta 3.46 Fatouovo lemma

(X, E, μ) měřitelný prostor, $f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, $\exists g \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, $\int_X g \, d\mu > -\infty$, $f_n \geq g$ s.v.
Pak 1. $\liminf_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

2. $\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Dk: $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$, $x \in X$

$$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x) \leq \inf_{k\geq n+1} f_k(x) = g_{n+1}(x)$$

g buď $\lim g_n$, jež existuje, neb $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotónní. ($g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$, $\forall x$ je $g_n(x)$ neklesající posl. čísel, event. s.v.)

s.v. $g \leq g_n \leq f_n$ s.v.

2. část def inf — $\cancel{g = \lim g_n}$ a g_n neklesá — def inf

mono $\int d\mu$ — mono $\int d\mu$ — PP

$$-\text{mono. inf.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad -\infty \overset{\text{PP}}{<} \int_X g \, d\mu \leq \int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$$

Na poslední nerovnost $\liminf_{n\to+\infty}$

$$-\infty < \int_X g\,d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X g_n\,d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu \Rightarrow -\infty < \int_X g\,d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n\,d\mu \le$$

monotónnost posl. z čísl

$$\le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\ge n} \int_X f_k\,d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \int_X \inf_{k\ge n} f_k\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n\,d\mu \quad (\text{def } g_n)$$

Na g_n Leviho věta, její pp. ověřeny v horní části dk výše

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} g_n\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\ge n} f_k\,d\mu \overset{\text{def } g_n}{=} \int_X \lim_{n\to+\infty} g_n\,d\mu$$

Z posl. dvou nerovností: $\int_X \liminf f_n\,d\mu \le \int_X \lim \inf_{k\ge n} f_k\,d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\ge n} \int_X f_k\,d\mu =$

$$= \liminf_{n\to+\infty} \int f_k\,d\mu$$

∎

Věta 3.47 Fatouovo lemma 2

(X,E,μ) měřitelný prostor, $f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, $\int h\,d\mu < +\infty$, $f_n \le h$, $\forall n \in \mathbb{N}$ s.v., h měřitelná

Pak: 1. $\limsup_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

2. $\int_X \limsup_{n\to+\infty} f_n\,d\mu \ge \limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$

Dk sami ∎

Věta 3.48 Lebesgueova věta

(X,E,μ) měřitelný prostor, $f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$, $f_n \to f$ s.v. na X. Nechť $\exists\, g,h \in \mathcal{L}(X,\mu)$, pro něž $g \underset{\text{s.v.}}{\le} f_n \underset{\text{s.v.}}{\le} h$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pak $\int_X \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$

Dk $\int_X f\,d\mu \overset{\text{Fatou 2}}{\ge} \limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n \overset{\text{def lim sup lim inf}}{\ge} \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu \overset{\text{Fatou}}{\ge} \int_X f\,d\mu$

Odtud $\limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu \; (= \limsup \int_X \cdots = \liminf \int_X \cdots)$

Odtud dále připíšeme $\int_X f\,d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$ tj. $\int_X f\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu$ $\boxed{}$

Pozn: Spc. lim f_n funkcí kontrolovaných shora i zdola s.v. funkcemi, pro něž μ-Leb $\int$ má smysl (tj. elementy $\mathcal{L}^*(X,\mu)$), má μ-Leb. int.

Matematika pro fyziky

11. 12. 13

Důsledek Leviho věty

Minulý týden: věty o záměně

Leviho lemma (jed.)

Leviho věta ($\mathcal{L}^*$) $\leq, \geq$

Fatouxovo lemma   složší v zážitku svého tvrzení

Lebesgueova věta   nebylo možné pp ani $\geq$ ani $\leq$

Věta 3.49 Leviho věta II.

(X, E, μ) je měřitelný prostor, $v_n \in \mathcal{L}^*(X, \mu)$, $v_n \geq 0$ s.v. Nechť $\exists H \in \mathcal{L}(X, \mu)$, že $\forall n \in \mathbb{N}$

$s_n(x) := \sum_{m=1}^{n} v_m(x) \leq H(x)$ $\forall$ s.v. $x \in X$. Pak:

1, $\exists s(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} v_m(x)$ $\left(= \lim_{n \to +\infty} s_n(x)\right)$ $\forall$ s.v. $x \in X$

2, $s \in \mathcal{L}(X, \mu)$

3, $\int_X s \, d\mu = \sum_{m=1}^{+\infty} \int_X v_m \, d\mu$

Dk: s_n s.v. neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{L}^*(X, \mu)$.

Polož: $f_n(x) = s_n(x)$ a použij větu 3.44 (Leviho) pro f_n ∎

Př:

$$A \int_0^{+\infty} \frac{\omega^3}{e^{\alpha\omega} - 1} \, d\omega, \ \alpha > 0 \qquad \alpha = \frac{\hbar}{kT}, \ A = \text{konst.} \quad \text{Planckův vyzařovací zákon}$$

$$\text{Per partes } 3\times \longrightarrow A \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon \, d\omega}{e^{\alpha\omega} - 1} = -A\varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{1 - e^{\alpha\omega}} = -A\varepsilon \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n(\omega\alpha)} \, d\omega \underset{V3.49}{=} -A\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{\omega\alpha n} \rightsquigarrow$$

$$\frac{\omega^{n+1}}{(n+1)^\alpha}$$

$$\rightsquigarrow -A\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$ Odtud výpočet σ ve Stefan-Boltzmannově zákonu:

$$U = \sigma T^4$$

$$U = \int dU \quad dU = \frac{\omega^3 \, d\omega}{e^{\alpha\omega} - 1}$$

Aplikace Lebesgueovy věty: na výpočet Lebesgueových integrálů s parametrem:

Chceme vyšetřovat $F(\alpha) = \int_X f(-, \alpha) \, d\mu$, $\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ uvažujeme jako metrický prostor

např. s metrikou $\rho_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Chceme $\lim_{\alpha \to \alpha_0} F(\alpha)$, $F'(\alpha) = \frac{dF}{d\alpha}(\alpha)$, $\alpha_0 \in A$.

$\left(\int_A \left(\int f(-, -) \, d\mu\right) d\lambda_{\mathbb{R}^n}\right) \longrightarrow$ později, Fubiniho věta

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_X f(-, \alpha) \, d\mu \overset{?}{=} \int_X \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(-, \alpha) \, d\mu$$

Podobně u derivace.

Pozn: $f(-,\alpha)$ $\forall \alpha \in A$ je funkce $x \longmapsto f(x,\alpha)$, $\forall x \in X$, tj. mimo jiné $(Df)(-,\alpha) = X \neq X \times A = Df$

Věta 3.50

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ je měřitelný prostor. $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 \in \overline{A}$ (hranice A), $f: X \times (A \setminus \{\alpha_0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$

Nechť 1, Pro $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ je $f(-,\alpha) \in \mathcal{M}(X)$

2, $\forall$ s.v. $x \in X$ $\exists \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x,\alpha) =: \varphi(x)$

3, $\exists g \in \mathcal{L}(X,\mu)$ (integrovatelná majoranta), že $|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ $\forall$ s.v. $x \in X$, $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$

Pak 1, $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ $f(-,\alpha) \in \mathcal{L}(X,\mu)$

2, $\varphi \in \mathcal{L}(X,\mu)$

3, $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_X f(-,\alpha)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu$

Dk: 1, $f_n^\alpha \in \mathcal{M}(X)$, kde $f_n^\alpha(x) = f(x,\alpha)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$. Zjevmě, neb $f_n^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(-,\alpha)$, $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$

$f_n^\alpha \in \mathcal{M}(X)$ rostoucí, neb $f(-,\alpha) \in \mathcal{M}(X)$. Dále: $-g \leq f_n^\alpha \leq g$ (z pp. 3)

Použij Větu 3.48 (Lebesgueovu) $\Rightarrow \forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$: $\lim_{n \to +\infty} f_n^\alpha \underset{\text{def } f_n}{=} \lim_{n \to +\infty} f(-,\alpha) \underset{n \text{ není}}{=} f(-,\alpha)$

tj. $f(-,\alpha) \in \mathcal{L}(X,\mu)$.

3, a, $f(-,\alpha) \in \mathcal{M}(X)$, $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$

Definujme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n \to \alpha$, $n \to +\infty$. Jistě existuje (např. pro $A = \mathbb{R}$, $\alpha_n = \alpha_0 - \frac{1}{n}$).

Navíc požaduji $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n \neq \alpha_0$

(pp3) $\Rightarrow$ $-g \leq f(-,\alpha_n) =: f_n \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall$ s.v. $x \in X$

$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n\, d\mu$ (Lebesgueova věta)

Vím: $f_n = f(-,\alpha_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(-,\alpha_0)$ dle Heineho věty (pp. Heineho věty $\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(-,\alpha)$ $\exists$ dle pp. 2)

$f_n \in \mathcal{L}^*(X,\mu)$ zjevmě z def. majoranty viz výše. Tj. Lebesgueovu větu mohu použít.

$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n\, d\mu$

Heine

$\int_X f(\overline{x},\alpha_0)\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f(-,\alpha_n)\, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f(-,\alpha_n)\, d\mu \underset{\text{viz výše}}{=} \int_X \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(-,\alpha)\, d\mu$

2, $\int \varphi = ?$ $\int_X \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(-,\alpha)\, d\mu = ?$

$\underbrace{\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(-,\alpha)}_{\varphi(-)} = \lim_{n \to +\infty} f(-,\alpha_n) = \lim_{n \to +\infty} f_n$ z def. f_n

Lebesgue výše: $\lim_{n \to +\infty} f_n \in \mathcal{L}(X,\mu)$ tj. $\varphi \in \mathcal{L}(X,\mu)$ $\boxtimes$

Věta 3.51

(X, E, μ) měřitelný prostor, $A \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval.

Nechť 1, Pro $\forall \alpha \in A$, $f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{M}(X)$ (je měřitelný)

2, $\forall$ s.v. $x \in X$ $\exists \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$

3, $\exists g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ $|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)| \leq g(x)$ $\forall$ s.v. $x \in X$, $\forall \alpha \in A$. 4, $\exists \alpha_1$, $f(\cdot, \alpha_1) \in \mathcal{L}(X, \mu)$

Pak 1, $f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{L}(X, \mu)$.

2, $\varphi(\alpha) = \int_X f(\cdot, \alpha) d\mu$, $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mu)$, $\varphi'(\alpha) \exists$ a $\varphi' \in \mathcal{L}(X, \mu)$

3, $\int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) d\mu = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_X f(x, \alpha) d\mu$.

Dk: stejně pomocí Heineho a Lebesgueovy věty (nebude zkoušeno)

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha \to \alpha_0$

$f'_n(\cdot) = \frac{f(\cdot, \alpha_n) - f(\cdot, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0}$ + VOSH $f(x, \alpha) = f(x, \alpha_0) - (\alpha - \alpha_0) \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi^{\alpha_0, \alpha})$, $\forall$ s.v. $x \in X$
$\alpha_n \to \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $\exists \xi^{\alpha_0, \alpha}$

Pozn: důsledek Věty 3.51: Pp-li navíc spojitost v α_0 $f(\cdot, \alpha) \to \int_X f(\cdot, \alpha) d\mu$ je spojitá jako funkce proměnné α v bodě α_0 ($\lim_{\alpha \to \alpha_0} \tilde{f}(x, \alpha) = \tilde{f}(x, \alpha_0)$)

Doporučení: výpočet při $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx) dx$

Inspirace „Doporučení" (☺)

Matematika pro fyziky

12. 12. 2013

Př. Planckův vyzařovací zákon (integrace)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x}\frac{1}{(1-e^{-x})}x^3\,dx = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(e^{-x})^n}_{=q}dx = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}x^3e^{-x}(e^{-x})^n dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{ověřit}\\ \text{pp. důsl.}\\ \text{Leviho věty}\end{matrix}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}(e^{-x})^n dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \overset{=f}{x^3}\,\overset{=g'}{e^{-xn}}\,dx = |3\times \text{per partes}| =$$

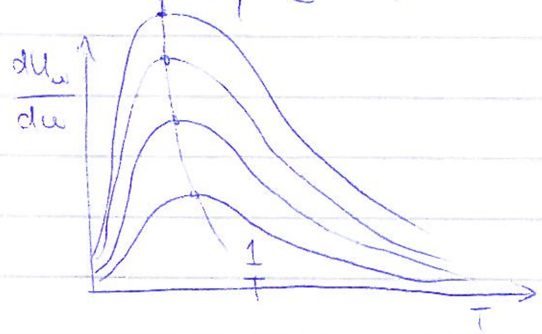
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left[x^3\frac{1}{-n}e^{-xn}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{3x^2e^{-xn}}{-n}dx\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n}\int_0^{+\infty}x^2e^{-xn}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n}\left(\left[x^2\frac{1}{-n}e^{-xn}\right]_0^{+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{+\infty} 2x\frac{1}{(-n)}e^{-xn}dx\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{n^2}\int_0^{+\infty}xe^{-xn}dx \overset{pp.}{=} \dots = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{n^4} = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = 6\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

dokážeme v LS.

$$U = \int_{\omega=0}^{+\infty} dU_\omega, \quad U_\omega = \frac{V}{\pi^2c^3\beta}\frac{\hbar\omega^3\beta}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega$$

záření černého tělesa, bosonového plynu



$U = \sigma T^4$ σ… Stefan-Boltzmannova konst.

$kT = \beta^{-1}$

Užitečné věty pro výpočet Lebesgueova integrálu

Věta 3.51

$f\in M(X)$, $f\ge 0$ s.v. $\Rightarrow f\in \mathcal{L}^*(X,\mu)$

Dk: Kopáček. Nechceme.

Definice 3.17

Nechť (X,E,μ) měřitelný prostor, $M\in E$ (M je měřitelná množina) $\int_M f\,d\mu = \int_X f\chi_M\,d\mu$ nazvu μ-Lebesgueův integrál přes M.

Věta 3.53

Nechť $g,h\in\mathcal{L}(X,\mu)$, $f\in\mathcal{L}^*(X,\mu)$ a nechť $g\le f\le h$ s.v. Pak $f\in\mathcal{L}(X,\mu)$.

Dk: pomocí Lebesgueovy věty $f_n = f$ vezmu konstantní posloupnost ■

Věta 3.54

Buď $(\mathbb{R}, \mathcal{P}^{\mathcal{L}}, \lambda)$ měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou. Pak $\mathcal{C}(M) \leq \mathcal{M}(M)$ $\forall M \in \mathcal{P}^{\mathcal{L}}$

Dk: Kopáček. Neukazán

Věta 3.~~54~~55 Lebesgueovo kritérium pro Riemannův integrál

f omezená a spojitá s.v. na $\langle a,b\rangle \Rightarrow \exists$ Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx = \int_{\langle a,b\rangle} f d\lambda$

Pozn: Lebesguea počítám Riemannovým integrálem
- další zobecnění Lebesguea je pomocí principle value (hlavní hodn)

$$\int^{+\infty} f d\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int_{(-k,k)} f d\lambda$$

Př: $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn} x \, d\lambda = \int_{(-\infty,+\infty)} (\operatorname{sgn})^+ d\lambda - \int_{(-\infty,+\infty)} (\operatorname{sgn})^- d\lambda =$ $\int_{(-\infty,+\infty)} \operatorname{sgn}^+ = +\infty$, $\int_{(-\infty,+\infty)} \operatorname{sgn}^- = +\infty$ $\Big| = +\infty - (+\infty)$ nemá smysl

v.p. $\int_{-\infty}^{-\infty} \operatorname{sgn} x \, d\lambda = 0$

$$\int_{-k}^{k} \operatorname{sgn} x \, d\lambda = \int_{-k}^{k} 0 \, d\lambda = 0 \quad k \to +\infty$$

podrobněji: $\int_{-k}^{k} \operatorname{sgn} x \, dx = \int_{-k}^{0} \operatorname{sgn} x \, dx + \int_{0}^{k} \operatorname{sgn} x \, dx = \int_{-k}^{0} \operatorname{sgn} x^+ d\lambda - \int_{-k}^{0} \operatorname{sgn} x^- d\lambda +$

$+ \int_{0}^{k} \operatorname{sgn} x^+ d\lambda - \int_{0}^{k} \operatorname{sgn}^- x \, d\lambda = \int_{-k}^{0} 0 \, d\lambda - \int_{-k}^{0} (-1)^- d\lambda + \int_{0}^{k} 1 \, d\lambda + \int_{0}^{k} 0 \, d\lambda = -k + k = 0, \; k \to +\infty$

V 3.55 $\qquad \lim_{k\to+\infty} 0 = 0$

Zkonstruovali jsme míru Lebesgueovu na $\mathbb{R}$

Další míra: X množina $E = \{\emptyset, X\}$

X množina $E = 2^X$

Ale $X = \mathbb{R}$, $E = 2^{\mathbb{R}}$ σ-algebra

neexistuje $\mu: E \to \mathbb{R}_0^+$ míra pro tento systém, jež měří $\mu(\langle a,b\rangle) = b-a$

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$ není def. pro všechny elementy $2^{\mathbb{R}}$ ($\exists$ neměři. mna)

Chceme zkonstruovat míru na $\mathbb{R}^n$

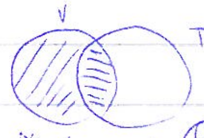
Definice 3.18

K nazveme k-kostkou v $\mathbb{R}^k$, pokud existují otevřené intervaly $I_1, \dots, I_k$ v $\mathbb{R}$, že $K = I_1 \times \dots \times I_k \subseteq \mathbb{R}^k$. Položím $\|K\|_k = (b_1 - a_1) \dots (b_k - a_k)$, pokud $I_j = (a_j, b_j)$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}^*$, $j = 1, \dots, k$ s obvyklou aritmetikou nekonečen.

Definice 3.19

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Definujme $\lambda_k^*(U) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \|K_j\|_k \;\middle|\; K_j \text{ je } k\text{-kostkou a } \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq U, \forall j \in \mathbb{N} \right\}$ jako před-míru množiny U.

Řekneme: $V \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{L}} \iff \forall T \subseteq \mathbb{R}^k \;\; \lambda_k^*(V) = \lambda_k^*(V \setminus T) + \lambda_k^*(V \cap T)$, že V je k-Lebesgueovsky měřitelná



Pozn: $\lambda^*_k|_{\mathcal{P}_k^{\mathcal{L}}} : \mathcal{P}_k^{\mathcal{L}} \to \mathbb{R}_0^+$ je míra (na $\mathcal{P}_k^{\mathcal{L}}$). Tj. spc. věty 3.28 až 3.54 s $\mu = \lambda^*_k|_{\mathcal{P}_k^{\mathcal{L}}}$ platí

Definice 3.20

$\Psi : U \to \mathbb{R}^n$ nazveme regulární, pokud $\forall u \in U$ je jakobiho matice $Jac(\Psi)(u) =$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená

jakobián je DETERMINANT JACOBIHO MATICE!

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^1}(u) & \dots & \frac{\partial \Psi^n}{\partial x^1}(u) \\ \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^n}(u) & \dots & \frac{\partial \Psi^n}{\partial x^n}(u) \end{pmatrix}$$

, ~~nesingulární~~ nesingulární $\iff J(\Psi)(u) = \det(Jac(\Psi)(u))$ nenulový $\forall u \in U$.

Pozn.

Mimochodem vyžadujeme po regulárním zobrazení, aby bylo jedenkrát derivovatelné

Věta 3.56 Věta o substituci

Uvažme n-rozměrný Lebesgueův měřitelný prostor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}^{\mathcal{L}}_n, \lambda^*_n|_{\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_n} =: \lambda_n)$. Nechť $\Psi : U \underset{ot.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární a prosté. Potom $\int_M f \, d\lambda_n = \int_{\Psi^{-1}(M)} (f \circ \Psi) |J(\Psi)| \, d\lambda_n$

Pokud $M \in \mathcal{P}^{\mathcal{L}}$ alespoň jedna strana má smysl.

Dk: nebude. Jarník. ∎

Pozn: 1) má smysl $\equiv f \in \mathcal{L}^*(M, \lambda_n)$ nebo $(f \circ \Psi)|J(\Psi)| \in \mathcal{L}^*(\Psi^{-1}(M), \lambda_n)$

2) $M \in \mathcal{P}^{\mathcal{L}}_n \implies \Psi^{-1}(M) \in \mathcal{P}^{\mathcal{L}}_n$

měřitelná

měřitelnost. Vzory intervalů to pošle do měřitelných množin

3) proč se to dělá: M je složitá množina, a $\Psi^{-1}(M)$ je jednodušší, nebo prostě když je to výhodnější

Věta 3.57

$n, m \in \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{P}^{\alpha}_{n+m}$, $f \in \mathcal{L}^*(M, \lambda_{n+m})$. Označme $= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$

$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m\ (x,y) \in M\}$

$P_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n\ (x,y) \in M\}$

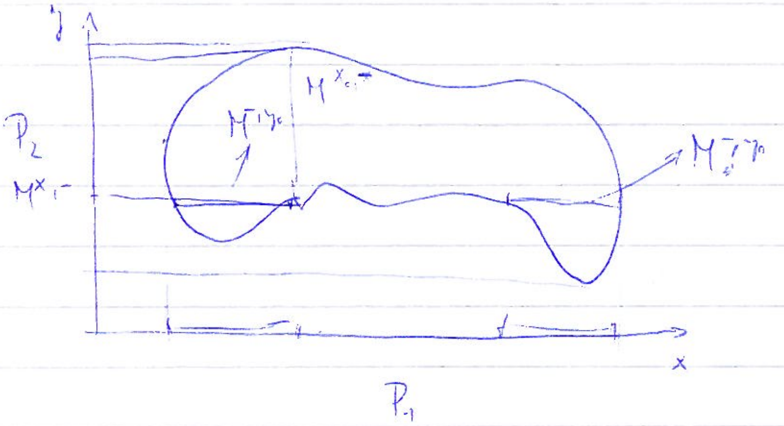
$\forall x \in P_1\ M^{x,-} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in M\}$, $\forall y \in P_2\ M^{-,y} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in M\}$. Nechť P_1, P_2 jsou měřitelné

Pak 1) $\forall$ s.v. $x \in P_1$ $f(x,-) \in \mathcal{L}^*(M^{x,-}, \lambda_m)$, $\forall$ s.v. $y \in P_2$ $f(-,y) \in \mathcal{L}^*(M^{x,\bar{y}}, \lambda_n)$

2) $F_1(x) := \int_{M^{x,-}} f(x,-)\, d\lambda_m^{(y)} \in \mathcal{L}^*(M^{x,-}, \lambda_m^{(x)})$, $F_2(y) := \int f(-,y)\, d\lambda_n^{(x)} \in \mathcal{L}^*(M^{-,y}, \lambda_m^{(y)})$

3) $$\int f(-,-)\, \lambda_{n+m} = \int_{P_1} \int_{M^{x,-}} \Big(f(x,y)\, d\lambda_m^{(y)} \Big)\, d\lambda_n^{(x)} = \int_{P_2} \Big(\int_{M^{-,y}} f(x,y)\, d\lambda_n^{(x)} \Big)\, d\lambda_m^{(y)}$$

po—a—n



Matematika pro fyziky

18. 12. 2013

Př. na větu o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad \Phi: (0,+\infty)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\det\left(\operatorname{Jac}\Phi(r_0,\varphi_0)\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r\cos\varphi_0 \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi_0 + r\sin^2\varphi_0 = r$$

$$|\det(\operatorname{Jac}\Phi)(r_0,\varphi_0)| = |r| = r > 0 \qquad \Phi \text{ je prosté}$$

$$\int_{\Phi^{-1}(\mathbb{R}^2)} e^{-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr = 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-r^2})'}{2}\,dr = -\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi$$

Př. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,d\lambda$$

vlastnost Riemannova integrálu, z hlediska y je x konst tak to můžu vytknout

Fubini

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Př. derivace integrálu dle parametru / záměnnost derivace a integrálu

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

1, $\frac{\partial}{\partial b}\left(e^{-ax^2}\cos bx\right) \overset{\exists}{=} -e^{-ax^2}x\sin bx \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mu)$

2, měřitelnost triv. Spojité na měřitelné mn. a rozšířené na měřitelné

3, majoranta

4, b = 0, viz minulý příklad

od ③ majoranta pro derivaci $|x\cos bx\, e^{-x^2}| \le \underbrace{|xe^{-x^2}|}_{\text{Newtonem}} \in \mathcal{L}(X,\mu)$

$X = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda$

Předpoklady ověřeny. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$

$$\varphi(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx, \quad \varphi'(b) = \int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(e^{-ax^2}\cos bx\right)\right]dx = -\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin bx\cdot x\cdot dx$$

per partes

$$= -\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}\varphi(b)$$

$\varphi' + \frac{b}{2a}\varphi = 0$ Homogenní obyčejná diferenciální lineární rovnice

$$\varphi' = -\frac{b}{2a}\varphi$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{b}{2a} \longrightarrow \ln|\varphi| = -\frac{b^2}{4a} + C$$

$$|\varphi| = e^{-\frac{b^2}{4a}}\cdot C \qquad C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ doma, minulý příklad + subst } t = \sqrt{a}x$$

$$\varphi(b) = \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

4. Vnější diferenciální formy a integrály na k-plochách

Označení:

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n}$ $\qquad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\} \qquad (x,y) = \{x,\{y\}\}$

$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ nulový vektorový prostor

$x^1, \dots, x^n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \forall j = 1,\dots,n: \ x^j(a_1,\dots,a_n) = a_j, \ \forall a_i \in \mathbb{R}\ ((a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n)$

souřadnice / souřadnicové funkce

Definice 4.21

$V \subseteq \mathbb{R}^n$. Každé hladké zobrazení $\alpha: V \longrightarrow \Lambda^{\cdot}(\mathbb{R}^n)^*$ nazveme vnější diferenciální formou na V.
Pokud navíc $\alpha: V \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, nazveme α k-tou vnější diferenciální formou na V.

Pozn.: Můžeme mluvit o hladkosti? Ano, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\Lambda^{\cdot}(\mathbb{R}^n)^*$ je vektorový prostor, tj. můžeme definovat

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\alpha^{i}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{[\alpha(m+te_i)-\alpha(m)]^{i}}{t}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\alpha^{i}\right) = \left(\frac{\partial^1\alpha}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial^{2^n}\alpha}{\partial x^i}\right) \qquad i\text{-tá souřadnice v prostoru } \Lambda^{\cdot}(\mathbb{R}^n)^*$$

2^m $1, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_m$ $\quad \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \dots \wedge \varepsilon_{m-1} \wedge \varepsilon_m, \dots \wedge \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m$

Úmluva: $\alpha(m) = \alpha_m$, $m \in V$ zjednodušení píši jako index

Není-li V otevřená, řekneme, že α je hladká (nekonečně diferencovatelná), pokud existuje U ot., $U \supseteq V$ a β s definičním oborem U, $\beta|_V = \alpha$ a β je hladká

Báze $\quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$\uparrow$ i-tá pozice

kanonická báze $\mathbb{R}^n$, $(e_i)_{i=1}^n$

duální báze $\quad \varepsilon^j(e_i) = \delta^j_i$, $\forall j = 1, \dots, n$ je báze $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Opakování: $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}$, $I = (i_1, \dots, i_k) \subseteq \{1, \dots, n\}^{\times k}$

kartézský součin

$(\varepsilon^I)_I$ je báze $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$

Pozorování

$\alpha: V \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ $(\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*))$ $\quad \alpha(m) = \alpha_m \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \implies \alpha_m = \sum_I c_I \varepsilon^I$, $\exists! c_I$

Odtud $m \longmapsto c_I(m)$, $m \in V \to \mathbb{R}$. Lze relativně snadno odvodit, že hladkost $\alpha \implies$ hladkost c

Aby to ε^I nebylo líto, píšeme $(\varepsilon^I)_m$. Myslíme $\forall m$ vždy jen ε^I. $\quad \alpha_m = \sum_I c_I(m)(\varepsilon^I)_m$

$$\alpha(m) = \alpha_m = \sum_I c_I(m)(\varepsilon^I)_m \qquad \alpha = \sum_I c_I \varepsilon^I$$

Definice 4.22 vnější de Rhamův diferenciál

Nechť α je vnější diferenciální forma na V, $\alpha = \sum_I c_I \varepsilon^I \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)$. Pak $d\alpha = \sum_I dc_I \wedge \varepsilon^I$, kde $dc_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial c_I}{\partial x^i} \varepsilon^i$, nazýváme vnějším deRhamovým diferenciálem vnější diferenciální formy α.

Př: $\alpha = \sin x^1 \varepsilon^1 + x^1 x^3 \varepsilon^2$, $V = \mathbb{R}^3$, $n = 3$ $\quad \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*)$

$d\alpha = dc_{\{1\}} \wedge \varepsilon^1 + dc_{\{2\}} \wedge \varepsilon^2 + d0 \wedge \varepsilon^3 = \qquad c_{\{3\}} = 0$

$$= \left(\frac{\partial c_{\{1\}}}{\partial x^1} \varepsilon^1 + \frac{\partial c_{\{2\}}}{\partial x^2} \varepsilon^2 + \frac{\partial c_{\{3\}}}{\partial x^3} \varepsilon^3\right) \wedge \varepsilon^1 + \left(\frac{\partial c_{\{1\}}}{\partial x^1} \varepsilon^1 + \frac{\partial c_{\{2\}}}{\partial x^2} \varepsilon^2 + \frac{\partial c_{\{3\}}}{\partial x^3} \varepsilon^3\right) \wedge \varepsilon^2 =$$

$$= \cos x^1 \underbrace{\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^1}_{=0} + 0 + 0 + x^3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + x^1 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^2 + 0 + 0 = x^3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3 - x^1 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^2$$

na x^2 a x^3 to nezávisí

Př: $\alpha = \sin x \, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + \cos z \, \varepsilon^2$

$$d\alpha = \underbrace{\frac{\partial \sin x}{\partial z}}_{0} \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 - \sin z \, \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^2$$

! $f = x^1$, ~~b_9~~ $V = \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} = \Lambda^0 \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial x^1}{\partial x^1}\varepsilon^1 + \frac{\partial x^1}{\partial x^2}\varepsilon^2 + \dots + \frac{\partial x^1}{\partial x^n}\varepsilon^n = 1\cdot\varepsilon^1 + 0\varepsilon^2 + \dots + 0\varepsilon^n = \varepsilon^1, \quad dx^1 = \varepsilon^1$$

! $f = x^j$, $df = dx^j = \varepsilon^j$

Zapis

$$a = \sum_I a_I dx^I, \text{ přičemž } dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \ I = (i_1, \dots, i_k), \ dx^{i_j} = \varepsilon^j$$

$$d(\sin x^1 dx^1 + x^1 x^2 dx^2 \wedge dx^3)$$

Matematika pro fyziky

19. 12. 2013

minule: $d\left(\sum \alpha_I dx^I\right) = \sum d\alpha_I \wedge dx^I$ $\quad \varepsilon^i = dx^i,\ \varepsilon^I = dx^I,\ dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_k} = dx^I$

$\forall i = 1,\dots,m,\ |I| = k,\ I \subseteq \{1,\dots,m\},\ 1 \le i_j \le m,\ j = 1,\dots,k$ multiindex délky k,

je uspořádaná k-tice prvků z množiny $\{1,\dots,m\}$

$\deg \alpha = l \iff \alpha = \sum_{I,|I|=k} \alpha_I dx^I \iff \alpha \in \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*)$

Věta 4.58 vlastnosti de Rhamova diferenciálu

$V \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak 1, $d: \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*) \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^m)^*)$ $\quad$ (, hladký)

2, d je $\mathbb{R}$-lineární, tj. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda(\mathbb{R}^m)^*)$ platí

$d(a\alpha + b\beta) = a\,d\alpha + b\,d\beta$.

3, d je řetězcový diferenciál, tj. $d^2 = 0$

4, d je graduovaný diferenciál („Leibnitzovost") $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}$ $\alpha \wedge d\beta$ $\quad \forall \alpha, \beta$ homogenní (smíšení) diferenciální formy, $\alpha \in \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^{\deg \alpha}(\mathbb{R}^m)^*)$, $\beta \in \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^l(\mathbb{R}^m)^*)$

Dk: 1, $d\alpha \overset{\text{minule}}{=} d\left(\sum_{|I|=k} \alpha_I dx^I\right) = \sum_{|I|=k} d\alpha_I \wedge dx^I = \sum_{\substack{|I|=k \\ i=1,\dots,m}} \left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge \underbrace{dx^I}_{|I|=k} \in \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^m))$

def de Rham

2, α, β fixní homogenní k

$d(\alpha + \beta) = d\left(\sum_{|I|=k} \alpha_I dx^I + \sum_{|I|=k} \beta_I dx^I\right) = d\left(\sum_{|I|=k} (\alpha_I + \beta_I) dx^I\right) = \sum_{|I|=k} d(\alpha_I + \beta_I) \wedge dx^I =$

$= \sum_{\substack{|I|=k \\ i=1,\dots,m}} \frac{\partial(\alpha_I + \beta_I)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I = \sum_{\substack{|I|=k \\ i=1,\dots,m}} \left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} + \frac{\partial \beta_I}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^I = \sum_{\substack{|I|=k \\ i=1,\dots,m}} \left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I + \frac{\partial \beta_I}{\partial x^i} dx^i \wedge\right.$

lin. parc. der.

$\left. dx^I\right) = \sum_{\substack{|I|=k \\ i=1,\dots,m}} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I + \sum_{\substack{|I|=k \\ i=1,\dots,m}} \frac{\partial \beta_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I = \sum_{|I|=k} d\alpha_I \wedge dx^I + \sum_{|I|=k} d\beta_I \wedge dx^I =$

$= d\alpha + d\beta$

• $d(a\alpha) = a\,d\alpha \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall \alpha \in \mathcal{E}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*)$

• různé homogenity $d\left(\sum_{|I|=k} \alpha_I dx^I + \sum_{|J|=l} \beta_J dx^J\right) = d \sum_{K} \gamma_K dx^K$, kde

množina všech multiindexů k a délky l

γ_K — $\alpha_I \iff K = I$

spec. multiindex délky k

$\beta_J \iff K = J$

spec. multiindex délky l

Dále $\sum_K d\gamma_K \wedge dx^K = \sum_I (d\alpha_I \wedge dx^I) + \sum_J (d\beta_J \wedge dx^J) = d\alpha + d\beta$

3, $d^2 = 0$ $\quad (d \circ d = d^2)$

• $k=0$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^0(\mathbb{R}^m)^*) = \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$

z hladkosti f můžeme zaměňovat parc. der.

$$ddf \underset{\text{def de Rham}}{=} d\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) \underset{\text{(B) věta 4.58}}{=} \sum_{i=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \quad \text{- sečtu s ②}$$

$$2\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0 \iff 2d^2 f = 0 \iff d^2 f = 0$$

$$\left[(u,v) = \tfrac{1}{2}\big((u+v,u+v) - (u,u) - (v,v)\big) = \tfrac{1}{2}\big(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\big) \right.$$

• k obecné, $k \in \{1,\dots,m\}$

$$d\Big(d\sum_{|I|=k} \alpha_I dx^I\Big) = d\Big(\sum_{|I|=k} d\alpha_I \wedge dx^I\Big) = d\Big(\sum_{\substack{|I|=k\\ i=1,\dots,m}} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I\Big) = \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m\\ |I|=k}} \frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge$$

$$\wedge\, dx^i \wedge dx^I$$

$$\sum_{i,j,I} = \sum_I \Big(\sum_{i,j} \text{tyto}\Big) = 0 \quad \forall I$$

4, (Leibnitz)

$$d\Big(\sum_{|I|=k} \alpha_I dx^I \wedge \sum_{|J|=l} \beta_J dx^J\Big) = d\Big(\sum_{\substack{|I|=k\\|J|=l}} \alpha_I \beta_J dx^I \wedge dx^J\Big) \overset{\text{def de Rham}}{=} \sum_{\substack{|I|=k\\|J|=l}} d(\alpha_I \beta_J) dx^I \wedge$$

$$\wedge\, dx^J = \sum_{\substack{|I|=k\\|J|=l}} \big[(d\alpha_I)\beta_J + \alpha_I d\beta_J\big] dx^I \wedge dx^J \underset{\substack{\tilde{k}\alpha = d\tilde{k}\\ \tilde{k} = \beta_J}}{=} \sum_{|I|=k} d\alpha_I \wedge dx^I \beta_J \wedge dx^J +$$

$$\sum_{\substack{|J|=l\\|I|=k}} \alpha_I d\beta_J dx^I \wedge dx^J = d\alpha_I \wedge \sum_{|J|=l} \beta_J dx^J + \sum_{\substack{|J|=l\\|I|=k}} d\beta_J \underset{\text{1-forma}}{\alpha_I} dx^I \wedge dx^J = d\alpha \wedge \beta +$$

$$+ \sum_{\substack{|I|=k\\|J|=l}} \alpha_I dx^I (-1)^{|I|} d\beta_J \wedge dx^J = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta \qquad \blacksquare$$

Pozn:

1) 4, je analogie Leibnitzova vzorce $(fg)' = f'g + fg'$, $d(fg) = (df)g + fdg$

neboť $\sum_{i=1}^m \frac{\partial (fg)}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i g + \sum_{j=1}^m f \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j = (df)g + fdg$, což

je mj. krok vynechaný v důk. $d(\alpha_I \beta_J) = (d\alpha_I)\beta_J + \alpha_I d\beta_J$

Pro $k>0$ ... graduovaný diferenciál

$$d(\alpha \wedge \beta) \neq d\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\beta$$
$$= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

2) $\mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^0(\mathbb{R}^m)^*) \to \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^1(\mathbb{R}^m)^*) \to \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*) \xrightarrow{d} \dots \to \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*)$

$\to \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^{n+1}(\mathbb{R}^n)^*) - \mathcal{C}^\infty(V, 0)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\{0\}}$

$d^2 = 0,\ d \circ d = 0 \quad \operatorname{Im} d_{|\mathcal{C}^\infty(V,\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)} \subseteq \operatorname{Ker} d_{|\mathcal{C}^\infty(V,\Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*)}$ neboť $y \in \operatorname{Im} d_{|\mathcal{C}^\infty(V,\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)}$

$\Rightarrow \exists z \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)$ $y = d_k z$, $y \in \operatorname{Ker} d_{k+1}$, Ano, neboť $d_{k+1} y = d_{k+1} d_k z = (d^2 z) = 0$

Minulý semestr (exaktní posl.)

$0 \to \mathbb{R}^n \xrightarrow[G]{} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \xrightarrow[L]{} 0 \qquad LG = 0 \iff \underbrace{\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} G}$

věta o existenci řešení pro daný pč. podm. $\qquad$ exaktní řetězce/posloupnosti

$\operatorname{Ker} L \subseteq \operatorname{Im} G$

4.1 Pullbacky neboli kotečné zobrazení $\qquad$ řetězcový komplex

Definice 4.23 Pullback

Buď $\Phi: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\operatorname{Im}\Phi = U$, hladké zobrazení. Pak definuji:

$\Phi^*\ \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*) \to \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)$, $\gamma = \sum_{|I|=k} \gamma_I dx^I \in \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*)$,

$(\Phi^*\gamma) = \Phi^*(\sum_{|I|=k} \gamma_I dx^I) := \sum_{|I|=k} (\gamma_I \circ \Phi)(d\Phi)^I$, kde $(d\Phi)^I = d\Phi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi^{i_k}$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$,

$k \in \{1, \ldots, m\}$.

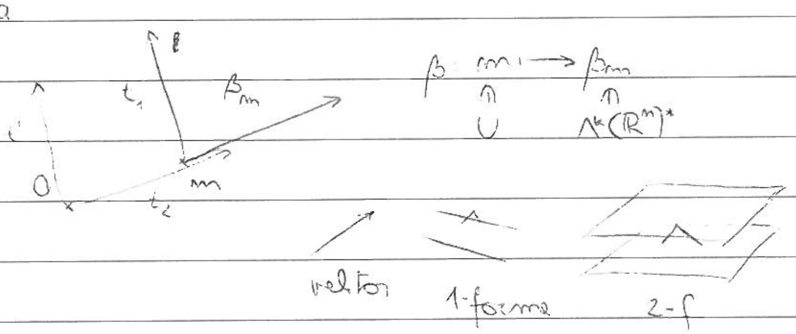
$\Phi^j(m) = (x^j \circ \Phi)(m)$ (tj. je to ~~je~~ j-té komponenta Φ, $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^m)$. Rozumějí pullback

Pokud Φ^j není definováno, je to nula.

Připomenutí $\quad (\Phi^*\alpha)_m \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \qquad$ 2.1.2014

$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{(\Phi^*\alpha)(m)} \qquad (\Phi^*\alpha)_m(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R},\ t_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \ldots, k$

Předehra



$\alpha: V \to \mathbb{R}$

$\{v, \alpha(v) = 1\}$ = "vizualizace 1-formy + šipka $\wedge$

Věta 4.59 Vlastnosti kotečného zobrazení

① Nechť $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*)$, $\beta \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^l(\mathbb{R}^m)^*)$ a $a \in \mathbb{R}$

Pozn: vnější součin 0-forem (fcí) je klasické násobení

Pak $\Phi^*(a\alpha+\beta) = a\Phi^*(\alpha) + \Phi^*(\beta)$

② Nechť $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^l(\mathbb{R}^m)^*)$, $\beta \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^j(\mathbb{R}^m)^*)$.

Pak $\Phi^*(\alpha\wedge\beta) = \Phi^*(\alpha)\wedge\Phi^*(\beta)$. $(l+j=k)$

③ Nechť $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*)$ Pak $\Phi^* d\alpha = d\Phi^*\alpha$

(Pozn: $\Phi^*\alpha$.. změna souřadnic)

Dk: 1, $\Phi^*(\alpha+\beta) = \Phi^*\left(\sum_{|I|=k}\alpha_I dx^I + \sum_{|I|=k}\beta_I dx^I\right) = \Phi^*\left(\sum_{|I|=k}(\alpha_I+\beta_I)dx^I\right) =$

$$= \sum_{|I|=k}(\alpha_I+\beta_I)\circ\Phi\,(d\Phi)^I = \sum_{|I|=k}(\alpha_I\circ\Phi + \beta_I\circ\Phi)\,d\Phi^I = \sum_{|I|=k}(\alpha_I\circ\Phi)\,d\Phi^I +$$

$$+\sum_{|I|=k}(\beta_I\circ\Phi)\,d\Phi^I = \Phi^*\left(\sum_{|I|=k}\alpha_I dx^I\right) + \Phi^*\left(\sum_{|I|=k}\beta_I dx^I\right) = \Phi^*\alpha + \Phi^*\beta \quad \text{c.b.d}$$

Také pro vytýkání $(a\in\mathbb{R})$:

$$\Phi^*(a\alpha) = \Phi^*\left(a\sum_{|I|=k}\alpha_I dx^I\right) = \Phi^*\left(\sum_{|I|=k}a\alpha_I dx^I\right) = \sum_{|I|=k}(a\alpha_I)\circ\Phi\, d\Phi^I =$$

$$= \sum_{|I|=k}a(\alpha_I\circ\Phi)\,d\Phi^I = a\sum_{|I|=k}(\alpha_I\circ\Phi)\,d\Phi^I = a\Phi^*\alpha \quad \text{c.b.d.}$$

2, $\Phi^*(\alpha\wedge\beta) = \Phi^*\left(\sum_{|I|=l}\alpha_I dx^I \wedge \sum_{|J|=j}\beta_J dx^J\right) \overset{(*)}{=}$

vnější součin je lineární $\quad [\alpha\wedge(\beta+\gamma)](m) \overset{def}{=} \alpha_m\wedge(\beta_m+\gamma_m) \overset{kap. 3}{=} \alpha_m\wedge\beta_m + \alpha_m\wedge\gamma_m \overset{def}{=}$

$= (\alpha\wedge\beta)_m + (\alpha\wedge\gamma)_m = (\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\gamma)_m = (\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\gamma)(m)$

$$(*) = \Phi^*\left(\sum_{\substack{|I|=l\\|J|=j}}(\alpha_I\wedge\beta_J)\,dx^I\wedge dx^J\right) = \sum_{I,J}\left[(\alpha_I\wedge\beta_J)\circ\Phi\right]d\Phi^I\wedge d\Phi^J =$$

$$= \sum_{I,J}(\alpha_I\circ\Phi)\wedge(\beta_J\circ\Phi)\,d\Phi^I\wedge d\Phi^J = \sum_{I,J}(\alpha_I\circ\Phi)\,d\Phi^I\wedge(\beta_J\circ\Phi)\,d\Phi^J =$$

zde je to normální součin (0-formy) $\qquad$ prohazujeme fci

$(\alpha\wedge\beta = (-1)^{|I||J|}\beta\wedge\alpha)$

zde pro 0-formy

$$= \sum_{|I|=l}(\alpha_I\circ\Phi)\,d\Phi^I \wedge \sum_{|J|=j}(\beta_J\circ\Phi)\,d\Phi^J = \Phi^*\alpha\wedge\Phi^*\beta \quad \text{c.b.d}$$

$$3^a\ \Phi^*(d\alpha) = \Phi^*\left(d\sum_{|I|=k}\alpha_I dx^I\right) = \Phi^*\left(\sum_{|I|=k}d\alpha_I\wedge dx^I\right) = \Phi^*\left(\sum_{I,i}\left(\frac{\partial\alpha_I}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^I\right)\right) =$$

linearita

DeRhamova dif

+ def DeRhamova dif.

$$= \sum_{I,i}\Phi^*\left(\frac{\partial\alpha_I}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^I\right) = \sum_{I,i}\frac{\partial\alpha_I}{\partial x^i}\circ\Phi\, d\Phi^i\wedge d\Phi^I = \sum_{I,i}\left(\frac{\partial\alpha_I}{\partial x^i}\circ\Phi\right)\sum_j\frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}dx^j\wedge d\Phi^I$$

def. tot. dif.

b) $d(\Phi^*\alpha) = d(\Phi^* \sum_I \alpha_I dx^I) = d\left(\sum_I (\alpha_I \circ \Phi)(d\Phi)^I\right) \underset{\text{DeRham}}{=} \sum_I d(\alpha_I \circ \Phi) d\Phi^I \underset{\text{2. bod DeRhama}}{=}$

$= \sum_{I,j} \frac{\partial(\alpha_I \circ \Phi)}{\partial x^j} dx^j \wedge d\Phi^I \underset{\text{2. sem}}{=} \sum_{I,j,i} \left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} \circ \Phi\right) \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} dx^j \wedge d\Phi^I$ ∎

Shrnutí:

$\alpha \wedge (\beta + a\gamma) = \alpha\wedge\beta + a\alpha\wedge\gamma$

$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|I||J|} \beta \wedge \alpha$

$d(\alpha + a\beta) = d\alpha + a\, d\beta$, $a \in \mathbb{R}$, ne fce!

$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^{|I|} \alpha\wedge d\beta$

$\Phi^*(\alpha + a\beta) = \Phi^*\alpha + a\Phi^*\beta$

$\Phi^*(\alpha\wedge\beta) = (\Phi^*\alpha)\wedge(\Phi^*\beta)$

$d \circ d = d^2 = 0$

$(\alpha\wedge\beta)(m) = \alpha_m \wedge \beta_m$

vnější dif. formy (analýza) — vnější formy (algebra)

$(\alpha + \beta)(m) = \alpha_m + \beta_m$

Zajímavost: "řetězcové komplexy", exaktní posloupnosti

Definice 4.24 Difeomorfismus

(P,ρ), (R,σ) buďte metrické prostory, $U \subseteq P$, $V \subseteq R$. $\Phi: U \to V$ nazveme difeomorfismus, pokud 1) Φ je bijekce U na V a

2) Φ a Φ^{-1} jsou diferencovatelné, $\in \mathcal{C}^1$.

Pozn: 1) $id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$

2) $\exists \Phi: U \to V$ bijekce, že Φ je diferencovatelné a Φ^{-1} není diferencovatelné

$P = R = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = \sigma(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$

$\Phi(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x^2, & x \in \mathbb{R}_0^- \end{cases}$

Inverze

$\Phi^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -\sqrt{-x}, & x \in \mathbb{R}_0^- \end{cases}$

derivace $f'_+(0) = \lim_{m\to 0^+} f'(m) \longrightarrow +\infty$

$f'_-(0) = \lim_{m \to 0^-} f'(m) \longrightarrow -\infty$

Definice 4.25

$I_k \subseteq \mathbb{R}^k$ buď omezená a otevřená k-krychle v $\mathbb{R}^k$. Nechť $\Phi: I_k \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelné. Nechť $\exists$ podmatice $k\times k$ zobrazení

$\underset{\in I_k}{m} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1}(m) & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^k}(m) \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^1}(m) & \dots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^k}(m) \end{pmatrix} \in M(I_k, n\times k)$, jež je v každém bodů regulární, pp. $k < m$. Pak toto Φ nazveme ~~regulární~~ parametrizovanou k-plochou (v m-prostoru).

Př. kružnice $\varphi: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (ct, st) \quad \Big| \quad \underset{\text{Im}\,\varphi \cup \{(1,0)\}}{\underset{\|}{S^1}} = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in (0, 2\pi)\}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -st \\ ct \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} st \neq 0 & t \in (0, \pi) \\ ct \neq 0 & t \in (\pi, 2\pi) \end{matrix}$$

Není to regulární k-plocha, ale sjednocení 2 regulárních ploch