Matematická analýza II

20. 2. 2013

Osnova: 1 Řady a mocninné řady
2 Základy metrických prostorů
3 Obyčejné diferenciální rovnice
4 Diferenciální počet více proměnných
5 Variační počet (∞ rozměrné množství proměnných)

I. Řady a mocninné řady

- o sčítatelnosti nekonečně mnoha čísel
- řady – řady čísel $\sum^{+\infty}$
- mocninné řady – řady monomů (jednočlenů), součty jednočlenů
- jednočlen – ax^n, $a \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Historie: Zénonův paradox
Newton, Euler, Cauchy, Bolzano (definice limity)

- 1.1 Posloupnosti
- 1.2 Řady
- 1.3 Řady s nezápornými ~~~~ členy
- 1.4 Mocninné řady

1.1 Posloupnosti

Definice 1.1 Každou fci $a: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nazveme posloupností komplexních čísel

Poznámka: $a_n = a(n)$ značení

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_n$, (a_n), a_n ← v zápisu

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \{m, m+1, \dots\}$, $m \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

Definice 1.2 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{C}^* \cup \mathbb{R}^* :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|a_n - A| < \varepsilon)$

Poznámka $P_\delta(+\infty) = U_\delta(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{\delta}\}$

$U_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - A| < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $A \in \mathbb{C}$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in P_{\frac{1}{n_0}}(+\infty))(a_n \in U_\varepsilon(A))$

Lemma 1.1 $a: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkce. Pak platí $\lim_{x\to+\infty} a_*(x) = A \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = A$

Dk: Aniv.

definice se liší jen o $(\forall x \in P_\delta(+\infty))(\forall n \in P_{\frac{1}{n_0}}(+\infty) \cap \mathbb{N})$

(č. pž to platí pro ∀ x tak to platí i pro ∀ n ktere jsou z menší množiny)

Pozn: limity posloupností počítáme stejně jako limity fcí

Př

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \underset{\text{L1.1}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \underset{\text{V2.9}}{=} \lim_{x\to+0} x \underset{\text{spoj. fce}}{=} 0$$

Je-li $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{C} \cup \mathbb{R}$ vlastní číslo tak je posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentní

Definice 1.3 $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost, $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost přirozených čísel. Pak $(b_k) = (a_{n_k})$ se nazývá posloupnost ~~vyb~~ vybraná z (a_n)

Př $(a_n) = n^2$, $n_k = 2k$

$(b_k) = a_{n_k} = a_{2k} = (2k)^2 = 4k^2$

Věta 1.2: $(a_n), (b_n), (c_n)$ buďte posloupnosti. Nechť $a_n \leq b_n \leq c_n$ (tedy pp $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$)

Věta o sevření Pokud (pp. že lim ∃) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$ pak $\lim_{n\to+\infty} b_n$ ∃ a rovná

se $\lim_{n\to+\infty} a_n \left(= \lim_{n\to+\infty} c_n\right)$

Dk $\forall \varepsilon > 0$ Víme pro $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_0, \forall n \geq n_0$, $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ kde $A = \lim_{n\to+\infty} a_n$

$\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_0'$ ~~∃~~ $\forall n \geq n_0'$ $|c_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ je $A - \frac{\varepsilon}{2}$ ~~≤~~ $< a_n \leq b_n \leq c_n < A + \frac{\varepsilon}{2}$ tj. $|b_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

pozn: $\frac{\varepsilon}{2}$ nebylo potřeba stačilo ε

To je ona věta o 2 policistech (A)

$(a_n), (b_n)$ $a_n \leq b_n$ Pak pokud $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$

limitní přechod nerovnosti

$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ $0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \not< \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ → ostrá nerovnost se nezachovává

Věta 1.3 Každá monotónní posloupnost má limitu.

Dk: 1) a_n nerostoucí

1.1) neomezená $= \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ A \quad a_{n_0+1} \le a_{n_0} < A \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0 \quad a_n < A \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

1.2) omezená

$\alpha := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\alpha \le a_n$ (z def. infima) $\quad \underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(a_{n_0} < \alpha + \varepsilon)}_{(\exists n_0)} \Rightarrow \alpha - \varepsilon \le a_{n_0} \le \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_{n+1} \le a_n \le \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0 \quad \alpha - \varepsilon < a_n \le \alpha + \varepsilon$

2) a_n neklesající $\to$ samý ale obrácení

Věta 1.4 Bolzano-Weierstraßova věta

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ omezená $\Rightarrow \exists$ vybraná $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jež je konvergentní

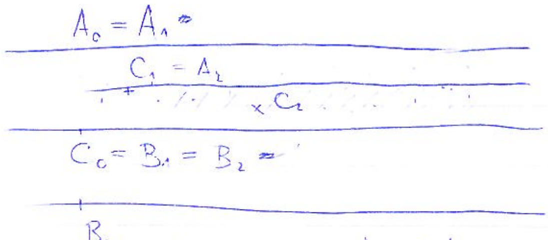
Dk: 1) $A_0 = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$, $B_0 = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

pp. že pak dány $(A_n), (B_n)$ posloupnosti

$C_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n)$, $n \ge 0$

a) $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = C_n$ $\quad$ if $\langle A_n, C_n \rangle$ nekonečně mnoho členů

b) $A_{n+1} = C_n$, $B_{n+1} = B_n$ $\quad$ if $\langle C_n, B_n \rangle$ leží nekonečně mnoho členů posl. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$



kde je jich nekonečně mnoho a postupně to konvergují

2) $|A_n - B_n| = |A_{n-1} - C_{n-1}| = \frac{1}{2}|A_{n-1} + B_{n-1}|$

$|B_{n-1} - C_{n-1}| = \frac{1}{2}|A_{n-1} + B_{n-1}| \quad \frac{1}{2}|A_{n-1} + B_{n-1}| = \dots =$

$= \frac{1}{2^n} |A_0 - B_0|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} |A_n - B_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} |A_0 - B_0| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} (A_n - B_n) = 0$

$\uparrow$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |A|$

3, $A_n \geq A_{n+1}$ nerostoucí

$B_n \leq B_{n+1}$ neklesající

$\Rightarrow$ podle V1.3 má (A_n), (B_n) limitu (om. monotónní)

platí $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (A_n + B_n - B_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (A_n - B_n) + \lim\limits_{n \to +\infty} B_n = 0 + \lim B_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} B_n =: A$

4,

k_0 zvol libovolně (konstruuji vybranou posloupnost). Nechť k_{n-1} je zvoleno

k_n buď takové že $a_{k_n} \in \langle A_n, B_n \rangle$ a $k_{n-1} < k_n$ (musí to pořád jít, aby se nezasekl u jednoho)

← to by mohlo nastat ...

mezi tím je nekonečně mnoho členů

$B_n \leq a_{k_n} < A_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ limitní přechod nerovnosti

$A \quad A \quad A$

Pozn. $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$, $x_1 = 1$

Pp že víme (C) že (x_n) konverguje

$2 x_{n+1} x_n = x_n^2 + 2$ / lim (proč?)

$2x^2 = x^2 + 2 \qquad x := \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$x_{n+1} - x_n = \left| \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} - x_n \right| = \left| \dfrac{\frac{2}{x_n} - x_n}{2} \right| = \left| \dfrac{2 - x_n^2}{2 x_n} \right|$

Snad(no) zjistíte že $|x_{n+1} - x_n| \to 0$

$x_n \in \mathbb{Q}$, limita tam nespadá

Matematická analýza 21. 2. 2013

Definice 1.4 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ buď posloupnost. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazveme Cauchyovou, pokud
$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall m,n\geq n_0)(|a_n-a_m|<\varepsilon)$

Pozn.: cauchyovskost formalizuje „přibližování"

$a_n=\frac{\lfloor\sqrt{2}\cdot 10^n\rfloor}{10^n}$, kde $\lfloor x\rfloor=\tilde{x}\overset{def}{\iff}\tilde{x}\in\mathbb{Z},\ \tilde{x}\leq x$ a neexistuje větší číslo s touto vlastností. Tj. $\lfloor 1{,}4\rfloor=1$

$a_0=1,\ a_1=1{,}4,\ a_2=1{,}41,\ a_3=1{,}414\ldots$

lze zjistit že $|a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{10^n}$

$\Rightarrow a_n$ je Cauchyova, ale $a_n\to\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Věta 1.5 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyova posloupnost $\iff(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje.

Dk: $\Leftarrow$

Označme $A=\lim_{n\to+\infty}a_n\iff\forall\varepsilon>0,\ \forall n\geq n_0,\ |a_n-A|<\varepsilon$

$\forall n,m\geq n_0$

$|a_n-a_m|=|a_n-A-a_m+A|=|(a_n-A)+(A-a_m)|\leq|a_n-A|+|a_m-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

$\Rightarrow$ použijeme Bolzano-Weierstrassovu

• pp - posloupnost je omezená $\Rightarrow$ to už z fce cauchyovskosti plyne

↳ speciálně $\varepsilon=1\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq n_0$ je

$|a_n-a_m|<1\Rightarrow|a_n-a_{n_0}|<1$

$|a_n|=|a_n-a_{n_0}+a_{n_0}|\leq|a_n-a_{n_0}|+|a_{n_0}|<1+|a_{n_0}|=$ číslo

$K:=\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots|a_{n_0-1}|,1+|a_{n_0}|\}\quad|a_n|\leq K$

• Dle B-W $\exists a_{n_k}$ vybraná posloupnost z posl. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jež konverguje

$\exists A:=\lim_{k\to+\infty}a_{n_k}$. Chceme: A je limita $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tedy že má limitu dle def. konvergence

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall \overset{\text{kvantifikovat ani m ani n nebude}}{(m),} n\geq n_0)|a_n-A|<\varepsilon$

Víme $\forall\varepsilon'>0,\ \exists k_0',\ \forall k\geq k_0,\ |a_{n_k}-A|<\varepsilon'$

$|a_n-A|=|(a_n-a_{n_k})-(A+a_{n_k})|\leq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-A|\leq\varepsilon+\varepsilon'$

volba $\varepsilon'=\varepsilon$, $\tilde{n}_0=\max\{n_{k_0},n_0\}$, kde n_0 je určeno cauchyovskostí

tj. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall m,n\geq n_0)(|a_n-a_m|<\varepsilon)$

Pro $\forall n\geq\tilde{n}_0\ |a_n-A|<2\varepsilon\iff$ konvergence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ▨

Pozn.: Užití spíše k důkazům neexistence

$\exists\varepsilon>0,\ \forall n_0,\ \exists m,n\geq n_0,\ |a_n-a_m|>\varepsilon\Rightarrow a_n$ nekonverguje

no prý se ~~t~~ používá k tomu u ta snazší části dk.

1.2 Řady

Definice 1.5 Buď $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost, pak řekneme, že $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ a) konverguje, b) diverguje, c) osciluje

a) konverguje pokud $\lim\limits_{k\to+\infty} s_k \in \mathbb{C}$

b) diverguje $\lim\limits_{k\to+\infty} s_k$ $\exists$ a je nevlastní

c) osciluje $\lim\limits_{k\to+\infty} s_k$ neexistuje

Pokud $\lim s_k \, \exists$, nazveme toto číslo součtem řady $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$

Pozn.: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazýváme posloupností n-tých částečných součtů posloupnosti (a_n),

tj. $s_k = a_1 + \dots + a_k$

Př: • $a_n = 1$ $\quad s_p = a_1 + \dots + a_p = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p\text{-krát}}$

$$\lim_{p\to+\infty} s_p = \lim_{p\to+\infty} p = +\infty \qquad \text{divergentní}$$

• $a_n = (-1)^n$

$s_{2n} = 0$ ← částečné součty

$s_{2n+1} = -1$ osciluje! $\lim s_n \nexists$

• konvergence geometrické řady

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^k \quad a_k = q^k$. Platí $\forall q \in \mathbb{C}$

$$(1-q)(1+q+\dots+q^{k-1}) = 1-q^k$$

$$q \neq 1 \Rightarrow 1+q+\dots+q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q} = s_{k-1}+1$$

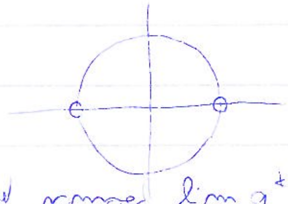
$$s_{k-1} = \frac{1-q^k-1+q}{1-q} = \frac{q-q^k}{1-q} = q\,\frac{1-q^{k-1}}{1-q}$$

Pro $q = 1 \dots \sum 1$ diverguje (souč. $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} |q^{n+1}| = \lim_{n\to+\infty} |q|^{n+1} = \lim_{x\to 0^+} |q|^{\frac{1}{x}+1} = |q| \lim_{x\to 0^+} |q|^{\frac{1}{x}} = |q| \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln|q|} \; \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ +\infty, & |q|>1 \end{cases}$$

$q \neq 0$

DÚ $|q| = 1, \; q \neq 1, -1$



$\lim s_k$ je spočitatelná pomocí $\lim q^{k-1}$, jíž jsme spočítali výše

Pozn.: Dle L1.1 limita posloupnosti nezávisí na konečném počtu členů posl. (lim to je lokální pojem, když jde $n \to \infty$ tak nás nezajímá co se děje tolik)

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} a_{k+r_0} \quad r_0 \in \mathbb{N} \text{ fixní}$$

$\Rightarrow$ Odtud ani konvergence, ani divergence, ani oscilace nezávisí na konečném počtu členů řady. Součet však ano.

- Indexace posloupnosti (různé) $\sum_{i=m}^{+\infty} a_i$, $m \in \mathbb{Z}$

Věta 1.6 (nutná podmínka konvergence)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dk: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) \overset{*}{=} s - s = 0$ (Věta 1.L)

z pp. konvergence $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

víme, že $\exists$ a jsou vlastní limity posloupností s_k, s_{k+1}, označme je s $*$ $\square$

Př: $a_n = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ Nutná $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ je splněna

divergence později ($\int$-kritérium), S_{2^n} částečný součet $= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} +$

$\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots + \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots +$

$\frac{1}{2^n} 2^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + (n+1)\frac{1}{2} \Rightarrow +\infty$

takže to diverguje, toto je elementární způsob

Věta 1.7 Bolzano-Cauchyova pro řady

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost. Pak následující je ekvivalentní (TFAE)

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall m, n \geq n_0, \; m \geq n \; \left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| < \varepsilon$

(2) $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ konverguje

Dk: plyne z B-C pro posloupnosti

$$\left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| = |s_m - s_{n-1}|$$

(1) $\Rightarrow$ (s_n) je cauchyovská $\xrightarrow{\text{B-C posl}}$ (s_n) konverguje $\xrightarrow{\text{def řady}}$ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ konverguje = (2)

Naopak stejně

1.3 Řady s nezápornými členy

Pp. že $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, že s nezápornými členy

Definice 1.7 Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ libovolná řada (např. i se zápornými členy)

Řekneme, že $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ konverguje absolutně pokud $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|$ konverguje

Věta 1.8 Nechť $\sum |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konverguje (nikoli naopak)?

Dk: $\left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i|$ (△ nerovnost)

$\wedge$ + BC pro řady

ε

„Pamatuj minimum věcí pro 2 dny"

H ??

Matematická analýza

27. 2. 2013

Lemma 1.9 dichotomie: $(a_n)_n$ buď posloupnost s nezápornými členy, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konverguje nebo diverguje (tj. neosciluje)

Dk: $s^a_{n+1} := \sum_{i=0}^{n+1} a_i = s^a_n + a_{n+1} \geq s^a_n$ $(a_n \geq 0)$, tj. s^a_n je neklesající posloupnost, spec. monotónní dle L1.3 (monotónní má limitu) je $\lim_{n\to+\infty} s^a_n$ vlastní (dle def: $(s^a_n)_n$ konverguje) nebo nevlastní ($\equiv$ existuje) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s^a_n = A \in \mathbb{C} \xleftrightarrow{def} \sum a_n$ konverguje, nebo $\lim_{n\to+\infty} s^a_n = +\infty \xleftrightarrow{def} \sum a_n$ diverguje $\blacksquare$

Pozn: Řada č. součtů je neklesající a monotónní posloupnost má limitu

! Pozn: Konv/div/osc. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ nezávisí, změním-li konečný počet členů $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, neboť nechť $a_{n_1}, \dots, a_{n_k} \longrightarrow \tilde{a}_{n_1}, \dots, \tilde{a}_{n_k}$

Zřejmě $\tilde{s}^a_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i = s^a_n - \sum_{l=1}^{k} (a_{n_l} - \tilde{a}_{n_l})$ $\forall n \geq n_k$. Proto $\lim_{n\to+\infty} \tilde{s}^a_n = \lim_{n\to+\infty} s^a_n - C$, kde $C = \sum_{l=1}^{k} (a_{n_l} - \tilde{a}_{n_l})$ tj. $\lim s^a_n \exists \Longleftrightarrow \exists \lim \tilde{s}^a_n$ a je vlastní $\Longleftrightarrow$ druhá je vlastní

Př) $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ konverguje nebo diverguje? $\lim s_n \overset{\text{Gauss}}{=} \lim \left[\frac{1}{2} n(n+1)\right] \Longrightarrow$ diverguje

Věta 1.10 Srovnávací kritérium: $(a_n)_n, (b_n)$ buďte posloupnosti s nezápornými členy. Pokud $\forall n \in \mathbb{N}$, pokud:

1) $a_n \geq b_n$ nebo

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, pak

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje

Dk: 1) $\Longrightarrow$ a) $\wedge$ b)

- $s^b_n = \sum_{n=1}^{n} b_n \leq \sum_{n=1}^{n} a_n$ (z 1) $= s^a_n$

Limitní přechod v nerovnosti (pozn. za V1.2 věty o 2 strážnících)

$\lim_{n\to+\infty} s^b_n \leq \lim_{n\to+\infty} s^a_n \underset{\uparrow}{=} A \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} s^b_n \leq A$ + víme, že $\lim s^b_n \exists$ (např. dle L1.9) $\Longrightarrow$

dle pp. v a)

$\lim_{n\to+\infty} s^b_n \in \mathbb{R} \equiv$ a)

- $s^a_n \geq s^b_n$, $\lim_{n\to+\infty} s^b_n = +\infty \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} s^a_n = +\infty$ nebo neexistuje. Neexistence zbourá L1.9

2) $\Leftarrow$ a) $\wedge$ b) neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_2}{b_1}$$

$$a_{m+1} \cdot \frac{1}{a_1} \geq b_{m+1} \cdot \frac{1}{b_1} \implies a_{m+1} \geq \frac{a_1}{b_1} b_{m+1} = \lambda b_{m+1}, \quad \lambda = \frac{a_1}{b_1}$$

• Konverguje-li $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$, konverguje i $\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda^{-1} a_m \left(= \lambda^{-1} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m\right)$. Dle 1 $\to$ a) pro $a_m = \lambda^{-1} a_m$
+ z dokázané nerovnosti $\lambda^{-1} a_m \geq b_m \implies$ konv. $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$

$\Rightarrow$ b) doma (stejně jako v a) $\Rightarrow$ b)) ▨

Pozn. 2) $\Rightarrow$ a) a b) $\equiv$ podílové srovnávací kritérium

$(a_m), (b_m)$ posloupnosti. Nechť $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ konvexní $\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} (a_i + b_i)$ konverguje

a $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i = \sum_{i=1}^{+\infty} (a_i + b_i)$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ je $\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda a_m = \lambda \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$. Jinak řečeno je $\{(a_m)_{n\in\mathbb{N}}, \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \text{ konverguje}\}$ vektorový prostor

pokud definuji pro $(a_m), (b_m)$, součet $(a_m) \oplus (b_m) = (a_m + b_m)$

$\lambda \odot (a_m) = (\lambda \cdot a_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Báze $(e_i)_{i=1}^{+\infty}$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

i-tá pozice

Věta 1.11 Cauchyovo odmocninové kritérium

Nechť $q < 1$. Nechť $(a_m)_{m=1}^{+\infty}$ je posloupnost s nezápornými členy a nechť

1) $(\forall m \in \mathbb{N})(\sqrt[m]{a_m} \leq q) \Rightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ konverguje

Nechť $q > 1$. Nechť $(a_m)_{m=1}^{+\infty}$ je posloupnost s nezápornými členy a nechť

2) $(\forall m \in \mathbb{N})(\sqrt[m]{a_m} \geq q) \Rightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ diverguje

Dk. 1) $q < 1$, $b_m = q^m$, $a_m \leq q^m$. Víme $\sum q^m$ konv. pro $q < 1$

Ještě lépe Polož $b_m = a_m$, $a_m = q^m$ a užij V1.10 a)

Je pp V1.10 splněn $a_m \geq b_m$

$q^m \geq a_m \iff q \geq \sqrt[m]{a_m}$, což pp $\Rightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ konv což znamená že

$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ konv.

2) analogicky dle 1) $\Rightarrow$ b) ve V1.10

$\left(q^m \leq a_m, q > 1 \text{ a geom. } \sum_{m=1}^{+\infty} q^m \text{ diverguje}\right)$ ▨

Př. $a_m = \frac{1}{m}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}$ diverguje / konverguje / osciluje?

oscilace vyloučena L1.9 $(a_m \geq 0)$

Cauchy: Sestroj $\sqrt[m]{a_m}$ $\quad \sqrt[m]{a_m} = \sqrt[m]{\frac{1}{m^m}} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} \; \forall m \in \{2, 3, \dots\}$

Cauchy přivolává na pomoc poznámku s vyloučením členů pod L1.9 ☺

$\Rightarrow$ konverguje

Věta 1.12 d'Alembertovo podílové kritérium

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ buď posloupnost, $a_n \geq 0$

1) $q<1$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje

2) $q>1$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje

Dk: 1) doma

2) $b_n = q^n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q = \frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ji splníma podmínku 2) ve V 1.10

Dle b) a $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ diverguje pro $q>1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje ▨

Pozn: Podm ve V 1.11 a V 1.12 lze ekvivalentně nahradit $(\exists q<1)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(\sqrt[n]{a_n} \leq q)$

$(\exists q<1)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(\sqrt[n]{a_n} \geq q)$

$(\exists q<1)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q)$

Věta 1.11' limitní odmocninové / Cauchyovo kritérium

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \geq 0$

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje

2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje

Dk: 1) Víme že $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Označme $q = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ Z def. limity víme, že $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})$

$(\forall n\geq n_0)(|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon)$.

Tj. $\forall n \geq n_0$ $|\sqrt[n]{a_n}| = |\sqrt[n]{a_n} - q + q| \leq |\sqrt[n]{a_n} - q| + |q| = \varepsilon + q$

Když vezmu ε dosti malé $\varepsilon + q = c < 1$, pak hotov.

Stačí $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$

$\varepsilon + q = \frac{q+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Dále z pozn. V 1.12

2) Analogicky. $\sqrt[n]{a_n} > 1$ $\forall n \geq n_0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ▨

Věta 1.12' limitní podílové d'Alembertovo kritérium

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \geq 0$

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konv.

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje

Dk: stejně jako ve V 1.11'. Zde nelimitní d'Alembertovo z pozn. pod větou V1.12. Rozepsáním
def. limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (tedy hotové) $\boxtimes$

Př. $a_n = \frac{1}{n!}$

Cauchyho limitní kr. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ pracné

d'Alembert $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n!}$ konverguje

Nelimitní Cauchy - pracné

Nelimitní d'Alembert $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1$

Pozn: Nelimitní verze jsou SILNĚJŠÍ než limitní

V1.12 a V1.11, neboli jejich zesílení, dle poznámky pod větami

~~tez~~ Lze-li rozhodnout o konvergenci limitní verzí, lze rozhodnout i nelimitní

Existuje řada, jež konverguje podle nelimitního a limitní nic neposkytne

př. $a_{2n} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)^n$

$a_{2n+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

limitní Cauchy $\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{4} \\ &\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ limita $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \nexists$

avšak $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$

$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$

$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 4$

Postup: Nejdříve limitní, pokud nevychází tak nelimitní (protože to je těžší, těm musíme dělat odhady)

To zde Cauchy nebo d'Alembert, podle toho co je jednodušší $\sqrt[n]{a_n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Př. $\sum \frac{1}{n!}$ mnohem snazší $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cancel{\ldots} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$??

Matematická analýza

28. 2. 2013

Př. Chceme vyšetřit konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

d'Al.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1$ .. nic

Cauchy: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = n^{-\frac{2}{n}}$

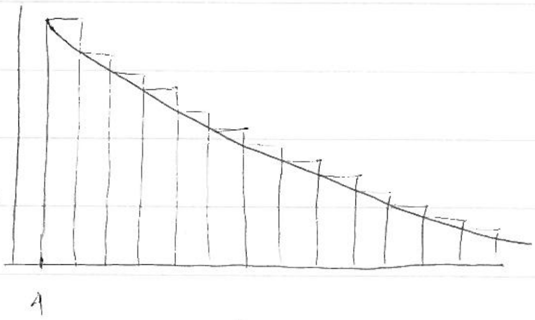
$\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{2}{n}} = e^{\lim -\frac{2}{n}\ln n} = e^0 = 1$ .. ne Nelimitní taky ne

Věta 1.13: Integrální kritérium

Nechť $f: \langle 1,+\infty) \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, spojitá a nezáporná fce. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy když $\exists \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ vlastní, tj. $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

Dk: $\Leftarrow$ $(\exists \int < +\infty \Rightarrow \sum < +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty} \int_1^{\xi} f(x)\,dx \quad \text{Riem. int. } f \text{ na } \langle 1,\xi\rangle$$



↳ zobecněný Riemannův integrál

vlastní Riemannův int. $= \int \in \mathbb{R}$

nevlastní Riemannův int. $= \int \notin \mathbb{R}$ $(-\infty,+\infty)$

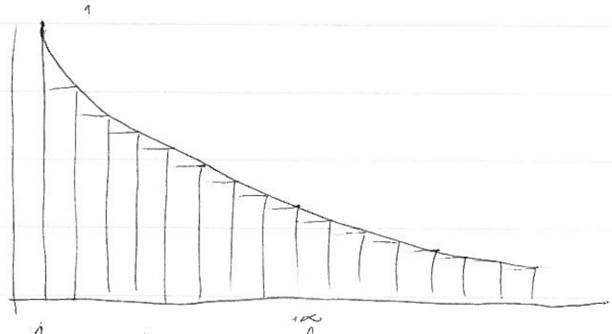
$\sum f(n) =$ 

$\int_1^{+\infty} f(n)\,dn \leq \sum f(n)$

Označme $K := \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ (pp)

$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx$, na $\mathbb{N}$ fixní, neboť

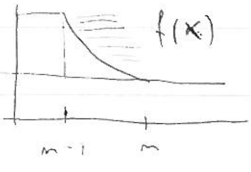
$$\int_{n-1}^{n} f(n)\,dx = f(n)\int_{n-1}^{n} 1\,dx = f(n)[n-n+1] = f(n)$$



$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(n)\,dn$

Navíc $f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$ neb

$f(x) \geq f(n)$ na $\langle n-1, n\rangle$



$$\sum_{m=1}^{+\infty} f(m) = f(1) + \sum_{m=2}^{+\infty} f(m) \leq f(1) + \sum_{m=2}^{+\infty} \int_{m-1}^{m} f(\xi)\,d\xi$$

$$\sum_{m=1}^{k} f(m) = f(1) + \sum_{m=2}^{k} f(m) \leq f(1) + \sum_{m=2}^{k} \int_{m-1}^{m} f(\xi)\,d\xi = f(1) + \int_{1}^{k} f(\xi)\,d\xi \quad (*)$$

, kde jsme užili aditivitu Riemannova integrálu vůči mezím

$$\lim_{k\to+\infty} (*) \Longrightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} f(m) \leq \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ pp}}{<} +\infty \Longrightarrow \text{tj. } \sum_{m=1}^{+\infty} f(m) \text{ konverguje}$$

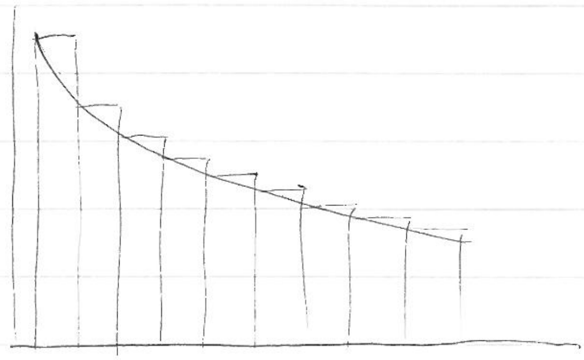
$\Rightarrow$ Analogicky

$$\sum f(m) \geq \int_1^k f(x)$$

$$f(m-1) \geq f(m),\ x \in \langle m-1, m\rangle$$

dev $\sum f(m) \ldots \geq \ldots + \sum \int \ldots$ aditivita

** sopačnou aditivitou



Př. $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^k}$

$k=1$ .. cvičení

$$S_{2^m} \left(\geq \frac{1+3m}{2} \right) \qquad \lim S_m = +\infty$$

$k=2$ .. cvičení

$$\frac{1}{m}\frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$$

integrálním kritériem

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx \begin{cases} \lim \left[\ln(\xi) - \ln(1)\right] = +\infty,\ k=1 \\ \int_1^{\xi} x^{-k}\,dx = \left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_1^{\xi},\ \xi \to +\infty \end{cases}$$

$$= \frac{\xi^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{-k+1}\ .\ \xi \to +\infty$$

$k > 1$ .. int. je vlastní

$k < 1$ ... int. je nevlastní

Dle $\int$-kritéria je $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^k}$ konvergentní pro $k > 1$

divergentní pro $k \leq 1$

Později $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{C}$ (Riemannova ζ-funkce [dzeta])

Př: $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (za rok)

$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ později … pomocí Fourierových řad Stefan-Boltzmannovým zákonem

Pozn: Někdy je počítání ζ obtížné, chceme kritérium jež rozhodne konvergenci řad „typu" $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Věta 1.14 (Raabeova)

Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost s nezápornými členy. Nechť $\exists \beta > 1$, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\beta}{n}$. Pak $\sum a_n$ konverguje.

pozor: Kop je to naopak!

Pokud $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$, pak $\sum a_n$ diverguje

Dk: • Nechť $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 - \frac{\beta}{n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n-\beta}{n} \Rightarrow n a_{n+1} \leq a_n(n-\beta)$$

$$(\beta - 1) a_n \leq \boxed{(n-1)a_n - n a_{n+1} = b_n}$$

trik! teleskopická pro a_n ta si sčítá

$\beta > 1 \Rightarrow b_n \geq 0$, $\sum b_n$ je řada s nezápornými členy

$(n-1)a_n \geq n \cdot a_{n+1} \Rightarrow (n a_{n+1})_{n=1}^{+\infty}$ je nerostoucí $(*)$

$$\sum_{n=2} b_n = -\cancel{a_2} + (a_2 - 2a_3) + (2a_3 - 3a_4) + (3a_4 - 4a_5) + \ldots + ((n-1)a_n - n a_{n+1}) =$$

$= a_2 - n a_{n+1}$ (to už je nezáporný) – je to nezáporná řada od až od dvojky

Ad $(*)$ Co ještě víme o $(n a_{n+1})_{n=1}^{+\infty}$: je nerostoucí, tj $n a_{n+1} \leq 1 \cdot a_2$

$$\left|\sum_{n=2}^{m} b_n\right| \leq |a_2 - n a_{n+1}| \leq |a_2|$$

Spc. $s_m^b \leq |a_2|$ $(**)$

Dle dichotomie, 1.1.9 je $\sum b_n$ konvergentní ($+\infty$ vyloučíme $(**)$) $\sum \frac{1}{\beta-1} b_n$ konverguje

Dále $a_n \leq b_n \frac{1}{\beta - 1}$. Dle srovnávací kritérium (1.10)

$\sum a_n$ konverguje ✓

• divergence

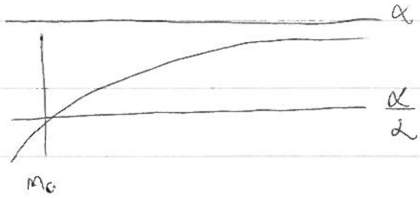
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \implies n a_{n+1} \geq (n-1) a_n > 0$$

$n \geq 2 \implies n a_{n+1}$ neklesající (nemůže být v limitě nula, to by to muselo být konst. 0 a to není protože lim dělím)

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n a_{n+1})$ $\exists$ vlastní či nevlastní

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n a_{n+1}) = \alpha,\ \alpha > 0$

$\implies \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ n a_{n+1} > \frac{\alpha}{2}$



$\implies a_{n+1} > \frac{\alpha}{2n}$ jež diverguje ($\equiv$ řada $\sum \frac{1}{2n}$ div.)

Srovnávacím krit. (V 1.10) $\sum a_{n+1}$ diverguje ∎

Pozn: $\cancel{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1}$

1. Platí i tyto verze (ať princip pozn. z minulé hodiny)

$\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\beta}{n} \implies \sum a_n$ konv.

$\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \implies \sum a_n$ diverguje

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\beta}{n} \implies \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{1-\frac{\beta}{n}} \implies \boxed{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)} \geq \left(\frac{n}{n-\beta} - 1\right) n =$

$= \frac{n - n + \beta}{n - \beta} n = \beta \frac{n}{n-\beta} \boxed{\geq \beta}$ $\quad \beta > 1 \implies \sum a_n$ konv.

$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \leq 1 \implies$ div. $\sum a_n$

3. Opět limitní verze $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\right] > 1 \implies$ konv.

dle principu z minula

{Víme-li $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\right] > 1^*$ víme, že $\exists n_0\ \forall n \geq n_0,\ \left|n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) - 1^*\right| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$

$-\varepsilon < n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) - 1^* < \varepsilon$

$1^* - \varepsilon < n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < \varepsilon + 1^*$

* to je ta limita, namísto 1^* dal α (jeho nová limita) a dostaneš $\alpha - \varepsilon < n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < \varepsilon + \alpha$

Matematická analýza

6. 3. 2013

$\exists$ ještě $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon > 1$.

Pozn: Gaussovo kritérium formulace ne celé, pokud více bude tak to pod dle (ještě jemnější než Raabeho) srovnání

Alternativní dk z Raabeho srovnáním s $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ (o jejíž sumě víme, že konverguje dle $\int$ kr.)

1.3 Řady obecné – neabsolutní konvergence

<u>Definice 1.8</u> Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ nekonverguje.

~~Pokud~~ Pozn: neabsolutní konvergence = konv. + není pravda že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolutně

Netýká se řady řad s nezáp. koeficienty

Absolutní $\Rightarrow$ konvergence

Př: Proč konverguje $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$? B-C složité – jiná krit. pro tyto řady neznáme, tak postup dle pozn. nýže.

Zkusme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Víme již že konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konv. abs. $\underset{\text{pozn.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ k.,

ale nekonverguje neabsolutně

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konv. neabs. – dnes

víme z věty o Taylor. T pro $\ln(1+x)$

<u>Lemma 1.15 (Abelovo lemma)</u>. Nechť $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq 0$. Pak

I. $\sum_{i=1}^{j} a_i \leq A \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \leq A\varepsilon_1$

II. $\sum_{i=1}^{j} a_i \geq B \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \geq B\varepsilon_1$

<u>Dk:</u> I. $s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n\varepsilon_n =$

$s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$

$\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \geq 0$

$= \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \varepsilon_3(s_3 - s_2) + \dots + \varepsilon_{n-1}(s_{n-1} - s_{n-2}) + \varepsilon_n(s_n - s_{n-1}) + \varepsilon_1 s_1 =$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$, neb $s_{i+1} - s_i = a_{i+1}$

Odtud $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i = s_1(\overset{\geq 0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}) + \dots + s_{n-1}(\overset{\geq 0}{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}) + s_n \overset{\geq 0}{\varepsilon_n} \overset{\text{pp}}{\leq} A(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + A(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + A\varepsilon_n = A\varepsilon_1$

II. $\sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_i = s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + s_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + s_m \varepsilon_m = \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \dots + \varepsilon_m(s_m - s_{m-1}) +$

$s_1 \varepsilon_1 \geq B(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + B(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + B(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + B\varepsilon_m \geq B a_1$

$a_i = s_i - s_{i-1}$

$\square$

Věta 1.16 (Abelovo - Dirichletovo kritérium)

Nechť $(\varepsilon_i)_{i=1}^{+\infty}$ je nezáporná a nerostoucí posloupnost a nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je lib. posloupnost reálných/komplexních čísel. Označme $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Pak platí:

I. Pokud s_n je omezená a $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} a_i \varepsilon_i$ konv.

$|a| \leq |a+b| \leq |a| + |b| < \varepsilon$

$|b| \leq |a+b| \leq |a| + |b| \leq \varepsilon$

II. Pokud s_n konverguje $\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} a_i \varepsilon_i$ konverguje

Dk: Pp., že (a_n) je reálná (jinak tvrzení pro Re a Im část a_n)

I.) s_n je omezená $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}_0^+ \; |s_n| \leq K$

chceme $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \varepsilon_i$ konverguje $\iff$ BC - kritérium (pro číselné řady), tj. chceme (v reformulaci):

„BC" $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall p \geq 0$

$(n =) \left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+p} a_i \varepsilon_i \right| < \varepsilon$

$\hookrightarrow$ toto použijeme A-D podmínku

$\lim_{i \to +\infty} \varepsilon_i = 0 \quad \exists n_0, \text{že } \varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2K}$ tedy i $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2K} \; \forall n \geq n_0$

(*)

$|a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p}| = |s_{n_0+p} - s_{n_0}| \leq 2K$ $\quad + n_0 - 1$

$\leq |s| + |s|$ Δ nerovnost

$-2K \leq a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p} \leq 2K$

L 1.15 $\Rightarrow a_{n_0+1}\varepsilon_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p}\varepsilon_{n_0+p} \leq 2K\varepsilon_{n_0+1} \leq 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$

dle (*)

$\geq -2K\varepsilon_{n_0+1}$

$\geq -2K \frac{\varepsilon}{2K} = -\varepsilon$ dle (*)

II. pp. konvergenci (s_n)

$\varepsilon > 0$, B-C Zvolím $\eta < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$

(S_n) konverguje $\Rightarrow |a_{j_0+1} + \dots + a_{j_0+p}| < \eta$ konverguje

(≡ B-C ref.) $\quad -\eta < a_{j_0+1} + \dots + a_{j_0+p} < \eta$ → „min" (A) $\quad$ tedy to vím již to je malý

L 1.15 $\Rightarrow -\eta\varepsilon_1 < a_{j_0+1}\varepsilon_{j_0+1} + \dots + a_{j_0+p}\varepsilon_{j_0+p} < \eta\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\varepsilon_1 = \varepsilon$ $\quad\square$

ε \ volba η

tedy můžu volit ~~tu~~ tu sumu malou

7.3.2013

Př: $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ ~~to~~ nekonverguje dle $\int$-krit.

Tj. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ nekonverguje absolutně

A-D krit. I. $\quad S_{2n+1} = -1$

$S_{2n} = 0 \qquad (S_n)$ je omezená

$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ nezáporné, nerostoucí, $\to 0$

A-D $\Rightarrow \sum a_i\varepsilon_i = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ konv.

$(a_n = (-1)^n)$

II nic nepoukytne neboť $\lim S_n$ neexistuje.

V 1.17 Leibnitz

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotónní nezáporná, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje

Dk: A-D - I: $a_n = (-1)^n$, $\varepsilon_n = a_n$ $\quad S_n$ → -1, 0

Př: Aplikace Abel-Dirichletovy věty

Chceme zjistit konvergenci

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \sin(ka)$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \cos(ka)$, kde a je volný

najdeme si o řadě s nez. členy

Navíc pz. $\sum|\sin ka|$, $\sum|\cos ka|$, a právě nevíme

Vyšetříme nejprve $\sum \sin$, $\sum\cos$

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{ika} \qquad S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ika} = \frac{e^{ia(n+1)}-1}{e^{ia}-1} \qquad \leftarrow (\tilde{a}^n + \dots \tilde{a} + 1)(\tilde{a}-1) = \tilde{a}^{(n+1)} - 1$

$S_n = \frac{e^{ia(n+1)}-1}{e^{ia}-1}\cdot\frac{e^{-i\frac{a}{2}}}{e^{-i\frac{a}{2}}} = \frac{e^{ia(n+\frac{1}{2})} - e^{-ia/2}}{\frac{e^{ia/2}-e^{-ia/2}}{2i}}\frac{1}{2i} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})a} - e^{-ia/2}}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{2i} =$

neboť víme $e^{ix} = \cos x + i\sin x \Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\left(-\frac{i}{2}\right)\left(e^{ia(n+\frac{1}{2})}-e^{-ia/2}\right)$$

$$\mathrm{Im}(s_n) = -\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\cdot \mathrm{Re}\left(e^{ia(n+\frac{1}{2})}-e^{ia/2}\right) = -\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\cos a\left(n+\frac{1}{2}\right)-\cos\frac{a}{2}\right]$$

$$s_n^{\sin} = \sum_{k=0}^{n} \sin(ak) = \mathrm{Im}(s_n^{\exp}) = \frac{-1}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\cos a\left(n+\frac{1}{2}\right)-\cos\frac{a}{2}\right]$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(ka)$, $a=0$: $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$, pro $a=0$ konverguje

$a\neq 0$ řady $\sum_{k=0}^{+\infty}\sin(ka)$ konverguje $\iff \exists \lim_{n\to+\infty} s_n^{\sin}$ konverguje (a je vlastní ta lim)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right]-\cos\frac{a}{2}\right] = \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\, 2\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})a-\frac{a}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})a+\frac{a}{2}}{2}\right) =$$

$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\,\frac{\left(\sin\frac{na}{2}\right)}{\frac{na}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\frac{(n+1)a}{2}}\cdot\frac{(n+1)a}{2} \notin \mathbb{R}$$

$\forall a\in(0,2\pi)$ $\sum_{k=0}^{+\infty}\sin ka$ nekonverguje

(geom. řada $e^{ia}=1=\cos a+i\sin a \iff \cos a=1$ a $\sin a=0$

$\iff a=2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$

konv. $\forall a=2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$

$a\in\mathbb{R}\setminus\{2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}\}$ nekonverguje

Dokompletovat doma..

asi je to špatně, zkusíme znovu

Vyšetříme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\sin\frac{na}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)a$ PŘÍŠTĚ

(Je to těžíme, to je neodolí)

$\lim_{n\to+\infty}\cos(nx)$ neexistuje pro $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

dle Heineho věty $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall a_n\to x_0,\ n\to+\infty$ a $\exists n_0\ \forall n\geq n_0\ a_n\neq x_0$

$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=A$

Dk: $a_n=\frac{n}{|x|}\pi$ $\cos(nx)=\cos(\pm n\pi)=(-1)^n$ nemá limitu a když $\frac{n\pi}{|x|}\to+\infty,\ n\to+\infty$

DÚ $\lim_{n\to+\infty} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$

$$\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos n\pi\cos\frac{\pi}{2}-\sin n\pi\sin\frac{\pi}{2}=0$$

Aplikace na A-D. $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(kx)$

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kx)$, a_k posl., $x\in\mathbb{R}$

A-D I, a_k nerostoucí a jde k nule $\equiv a_k \searrow 0$ jde monotónně k nule
nezáporný symbol

$s_n=\sum_{k=0}^{n} \sin kx$ ~~konverguje~~ je omezená
$\Downarrow \sum a_k \sin kx$ konverguje

minule $s_n=\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a-\cos\frac{a}{2}\right)$

$|s_n|=\frac{1}{2|\sin\frac{a}{2}|}\left\{\underbrace{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right|}_{\le 1}+|\cos a|\right\}\le\frac{2}{2\sin\frac{a}{2}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\sin(nx)$ konverguje.

např. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ konv. $\frac{1}{n}\searrow 0$

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\cos kx$ nekonverguje pro $x=0$ a $a_k=\frac{1}{k}$ byť $\frac{1}{k}\searrow 0$

$\sum\frac{1}{k}=+\infty$

(Znamená to, že A-D neplatí? Nikoliv, neboť bych splnil pp A-D I

a sice $s_n^{\cos(x=0)}=\sum_{k=0}^{n}1=n$ (což nejsou omezené $\equiv$ pp A-D)
což souvisí

$s_n^{(\cos)}=\mathrm{Re}\left(s_n^{\exp}\right)=-\mathrm{Im}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)a}-e^{-i\frac{a}{2}}\right)\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}=\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a+\sin\frac{a}{2}\right]\frac{1}{(\sin\frac{a}{2})2}$
má omezenost

$a\neq 0 \Rightarrow s_n^{(\cos)}$ je tedy omezená $\left|s_n^{\cos}\right|\le\frac{2}{2\sin\frac{a}{2}}\in\mathbb{R} \Rightarrow$ A-D I $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos nx$
konverguje pokud $a_n\searrow 0$

$a=0 \Rightarrow \sum a_n \ldots$ viz minule kapitola

<u>Definice 1.3</u> M nazveme spočetnou, existuje-li $\varphi: M\to\mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné
a <u>na</u> ($\equiv$ prosté množiny M na $\mathbb{N}$)

<u>Pozn:</u> M nazveme konečnou, pokud existuje $m\in\mathbb{N}$ a bijekce $\varphi: M\to\{1,2,\ldots,m\}$
M na $\{1,\ldots,m\}$ (konečná nejsou spočetná)

Př. 1) $\mathbb{N}_0$ je spočetná

$\varphi: \mathbb{N}_0\to\mathbb{N}$ $\varphi(i)=i+1$

2, $\mathbb{Z}$ je spočetné $\quad \varphi(i) = 2i,\ i \geq 0$

$\varphi(i) = -2i-1,\ i < 0$

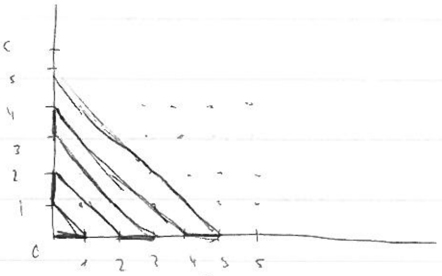
$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \xrightarrow{\text{z př. 1}} \mathbb{N}$

φ je prosté (sudé č. nemá liché)

φ je na (každé z $\mathbb{N}_0$ je buď liché nebo sudé) $\gg$ bijekce

3, $\mathbb{Q}$ (mna rac. čísel) je spočetná

a, dokonce $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ je spočetné



b, $\mathbb{Q}^+_{\cancel{0}} = \{q \geq 0,\ q \in \mathbb{Q}\}$ // největší spol. dělitel

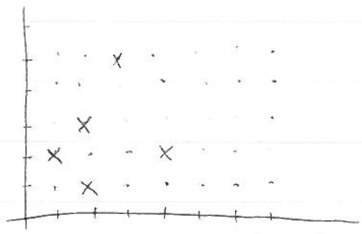
$x \in \mathbb{Q}_0^+ \ \exists!\ (p,q) \in \mathbb{Z}^+_{\cancel{0}} \times \mathbb{Z}^+_{\cancel{0}}$, že $\frac{p}{q}$ je zkrácený ($\text{msd}(p,q) = 1$)

a $x = \frac{p}{q}$

$x \mapsto (p,q).\ \mathbb{Q}^+ \to \overbrace{\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+}^{\text{spočetné}}$ je injektivní

Injektivní zobrazení z množiny, která není konečná, do spočetné množiny indukuje bijekci na $\mathbb{N}_0$

Důvod



$x \in \mathrm{Im}(\text{injekce})$

$\xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{N}_0$

je jich méně, takže tím spíš jsou spočetné (nepočítáme např. prvek 5×5, 2×2)

$\mathbb{Q}^-$ analogicky $\quad x \mapsto ((p,q),+)$

$\{((p,q),+),(p,q) \mid (p,q) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+\} \xrightarrow{\varphi''} \mathbb{N}$

$\varphi_1: \mathbb{Q}_1^+ \to \mathbb{Z}^+$ již máme

$\varphi_2: \mathbb{Q}_2^+ \to \mathbb{Z}_0^+ \times \{+\} \quad \varphi_2(x) := (\varphi_1(x), +)$

protože záp. čísla tak jim musí dát + znaménko

$\mathbb{Z}^+ \cup (\mathbb{Z}_0^+ \times \{+\}) \to \mathbb{N}$

↳ sudé ↳ liché

Matematická analýza

13. 3. 2013

Př.) $\mathbb{R}$ není spočetná

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 10^{-n}$$

desetinný zápis: $\forall$ reálné číslo můžeme vyjádřit jako posloupnost čísel 1 - 9 $\quad \mathbb{N} \to a_1, a_2, a_3 \dots$, $a_i \in \{1-9\}$ desetinný

Dk: sporem

Nechť $\exists \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ bijekce

$$a_n := \varphi^{-1}(n) \in \mathbb{R}$$

a_0	$b_{00}, b_{01}, b_{02}, \dots$
a_1	$b_{10}, b_{11}, b_{12} \dots$
a_2	$b_{20}, b_{21}, b_{22} \dots$
$\vdots$	$\vdots$

Konstruuji (diag. metoda)

$B_0 = b_{00} + 1$

$B_1 = b_{11} + 1$

$B_2 = b_{22} + 1$

Obecně $B_n = B_{nn} + 1 \quad \Rightarrow B = B_0, B_1, B_2$

B ale nepatří do tabulky, kde by však měla být všechna reálná čísla neb φ i φ^{-1} jsou bijekce

Proč: $a_0 \neq B$

$b_{00} + 1 \neq b_{00}$

$a_1 \neq B$

$b_{11} + 1 \neq b_{11}$ $\quad$ zkonstruovali jsme číslo, které tam být nemůže

Definice 1.10 (přerovnání):

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ buď řada. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ vznikla přerovnáním $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)$, pokud existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $b_k = a_{\varphi(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Pozn.: často značíme $\varphi(n) = k_n$ místo $a_1, a_2, a_3 \dots$ uvažujeme posl. $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3} \dots$

$= a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, a_{\varphi(3)}, \dots = b_1, b_2, b_3$

Otázkou jest, jak souvisí $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ se součtem $\sum_{i=1}^{+\infty} a_{k_i}$, jak souvisí jejich konvergence

Věta 1.18

Nechť $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ absolutně konvergentní a nechť $\sum_{i=1}^{+\infty} a_{k_i}$ vznikla jejím přerovnáním. Pak: $\sum_{i=1}^{+\infty} a_{k_i}$ je absolutně konvergentní a její součet je roven součtu řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Dk:

0) Absolutní konv. (konv. $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_{k_i}|$?)

(*) $|a_{k_1}|+\dots+|a_{k_m}| \le |a_1|+\dots+|a_m|$ pro $m = \max\{k_1,\dots,k_m\} = \max\{k_1,\dots,k_m\}$ $\forall m\in\mathbb{N}$

Ale $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|$ konv (dle pp.) tj. $\exists \lim_{p\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}|a_i| = s < +\infty$

$c_q = \sum_{i=1}^{q}|a_{k_i}|$ je monotónní (neklesající) a omezená nulou a s ($\Leftarrow$ (*))

monotónní omezená má limitu (V 1.3)

1) $s_m := \sum_{k=1}^{m} a_k$

$\sigma_m := \sum_{j=1}^{m} a_{k_j}$ Počítám $\lim_{m\to+\infty}(s_m-\sigma_m) \overset{\text{chci}}{=} 0$ $\varepsilon>0$ Hledám m_0, $\forall m\ge m_0$

$|s_m-\sigma_m|<\varepsilon$

a) [$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ konv. (abs. k. $\Rightarrow$ konv.) tj. dle BC-věty existuje $\tilde{m}_0$ že pro $\forall p\in\mathbb{N}$ je

$\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{m}_0+p} a_i<\varepsilon$] - nepoužil jsem to

Z absolutní konvergence $\sum a_i$ vím totéž o $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|$ tj. $\varepsilon>0$ $\exists \tilde{\tilde{m}}_0$ $\forall p\in\mathbb{N}$

$\sum_{i=\tilde{\tilde{m}}_0+1}^{\tilde{\tilde{m}}_0+p}|a_i|<\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=\tilde{\tilde{m}}_0+1}^{+\infty}|a_i|\le\varepsilon$ ($\Leftarrow$ $S_p := \sum_{i=\tilde{\tilde{m}}_0+1}^{\tilde{\tilde{m}}_0+p}|a_i|$ neklesající ozn., $\lim_{p\to+\infty} S_p \le \varepsilon$,

(**) limitní přechod v nerovnosti)

b) Nechť m_0 je takové, že $\{1,\dots,m_0\}\supseteq\{k_1,\dots,k_{\tilde{\tilde{m}}_0}\}$

($m_0 := \max\{k_i \mid i=1,\dots,\tilde{\tilde{m}}_0\}$)

$m_0\ge\tilde{\tilde{m}}_0$

c) Nechť $m\ge m_0$

tyhle se vždy odečtu ale v posloupnosti mi nezbyde tolik až do v s_m

$(s_m-\sigma_m) = (a_1+a_2+\dots+a_m) - \underbrace{(a_{k_1}+a_{k_2}+\dots a_{k_m})} = (\pm a_{m_1}\pm\dots\pm a_{m_r})$ přičemž

$m_1,\dots,m_r\ge\tilde{\tilde{m}}_0$ neboť $m_i\ge m_0\ge\tilde{\tilde{m}}_0$

Odhaduji $|s_m-\sigma_m| = |\pm a_{m_1}\pm\dots\pm a_{m_r}| \underset{\Delta\text{ner}}{\le} \sum_{i=1}^{r}|a_{m_i}| \le \sum_{i=\tilde{\tilde{m}}_0}^{+\infty}|a_i|\le\varepsilon$

$\forall m\ge m_0$

tzn $m_0 = m_0$

$(\varepsilon \rightsquigarrow \tilde{\tilde{m}}_0 \rightsquigarrow m_0 \ge \tilde{\tilde{m}}_0)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \; m_0$

2) $\lim_{n\to+\infty}\sigma_m = \lim_{m\to+\infty}(\sigma_m - s_m + s_m) \overset{AL}{=} \lim_{m\to+\infty}(\sigma_m-s_m)+\lim_{m\to+\infty} s_m = 0+s$, kde $s := \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ ∎

Definice 1.11

2 čísla s

Nechť M je spočetná, $a: M \to \mathbb{C}$ zobrazení. Řekneme že $\sum_{m \in M} a(m)$ konverguje pokud existuje bijekce $\varphi: \mathbb{N} \to M$ (na M), že $\sum_{m=1}^{+\infty} a(\varphi(m))$ konverguje a má součet s.

Pozn: $a_i = a(\varphi(i))$, $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ konv. k s máme již definovanou.

Pozn: Korektnost definice $\sum a(m)$ je abs. konv tj. $\sum_{i=1}^{+\infty} a(\varphi(i))$ je abs. konv pak $\exists!$ s jež je součtem (V1.18) → nezávisí v případě abs. konv na volbě φ

Matematická analýza

14. 3. 2013

Věta 1.19̃

Nechť $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ je neabsolutní konvergentní (konverguje a nekonv. abs.) a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak $\exists$ $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $s = \sum a_{\varphi(m)}$

Pozn: Neabs konv $\sum a_m \Rightarrow \exists$ nek. mnoho $a_m < 0$ a nek. $a_m > 0$ (a priori nesouvisí s předch. větou)

Aplikace: Madelungova konst. energie nekonečného periodického krystalu

$$\sum_{m,n,l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n+l}}{4\pi\varepsilon_0 r_0 \sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

nekonverguje absolutní

absolutní konv. → Leibnitzem

Pozn: Dvojná řada $\sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij}$, $\sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} a_{ij}$. $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

V případě neabsolutní konv. závisí konv dvojné řady na uspořádání řad

$\sum_{i,j,k=-\infty}^{+\infty} a_{ijk}$, $\sum_{i,j,k=1}^{+\infty} a_{ijk}$ trojné řady

Množina konv. řad je v.p. nad $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ čísly (vůči sčítání a násobení skalárem)

Jak je tomu se součinem?

$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$; $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{m,n=1}^{+\infty} a_m b_n$ jakožto zobecnění $\sum_{m=1}^{k} a_m \sum_{n=1}^{k} b_n = \sum_{m=1, n=1}^{k} a_m b_n$

chtěli bychom — sedí se pro $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

platí pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Problém napravo. A priori pravá strana závisí na zp. sčítání (viz věta bez důkazu). Pokud by $\sum_{(m,n) \in M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_m b_n$ byla abs. konv, jsme šťastnější

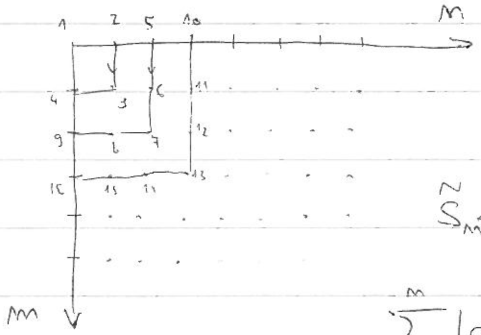
Věta 1.19

Nechť $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní řady. Pak i dvojná řada $\sum_{m,n=1}^{+\infty} a_m b_n$ je absolutně konvergentní a platí $\left(\sum_{m=1}^{+\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} a_m b_n$

1) Dk: Pp., že $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = A$, $\sum_{m=1}^{+\infty}|b_m| = B$ (víme z pp věty)

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty}|a_n b_m| = ?$$

Sčítací metoda



$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{3} a_i b_j$$

$$\tilde S_{m^2} = \sum_{i,j=1}^{m}|a_i b_j| = \sum_{i,j=1}^{m}|a_i||b_j| = \sum_{i=1}^{m}|a_i|\sum_{j=1}^{m}|b_j| \le AB$$

kde $\tilde S_m$ značí m-tý částečný součet řady, který vznikne z dvojné řady $\sum|a_i b_j|$ uspořádáním dle schématu výše (Řady $\alpha_1 = a_1b_1$, $\alpha_2 = a_2b_1$, $\alpha_3 = a_2b_2$, $\alpha_4 = a_1b_2$, $\alpha_5 = a_3b_1$, $\alpha_6 = a_3b_2$, $\alpha_7 = a_3b_3$, $\alpha_8 = a_2b_3$, $\alpha_9 = a_1b_3$)

$\tilde S_m$ je neklesající + omezená (AB) z toho $\xRightarrow{V1.3}$ $\tilde S_m$ má limitu $\xLeftrightarrow{def.}$ $\sum a_i b_j$ je konv

2) součin. $\sum a_n b_m$ konv. abs $\Longrightarrow$ $\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n b_m$ konverguje

začátek sem.

$s_m = \sum_{i=1}^{m} a_{\varphi_1(i)} b_{\varphi_2(i)}$, kde $\varphi_{1,2}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je taková, že $i \longmapsto (\varphi_1(i), \varphi_2(i)) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ uspořádává $\mathbb{N}$ do "čtverce" podle schématu výše

$$s_{m^2} = \sum^{m^2} a_{\varphi_1(i)} b_{\varphi_2(i)} = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j \Longrightarrow \lim_{m\to+\infty} s_{m^2} = \lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m} a_i \lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sum_{j=1}^{+\infty} b_j$$

Jelikož, jak víme, $\lim_{m\to+\infty} s_m$ ∃ a je vlastní, je limita každé z ní vybrané této limitě rovna.

$$\text{je } \lim_{m\to+\infty} s_m = \lim_{m\to+\infty} s_{m^2} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sum_{j=1}^{+\infty} b_j$$

$$\| $$

$$\sum_{i,j=1}^{+\infty} a_i b_j$$

∎

1.4 Mocninné řady

Definice 1.12

Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je libovolná posloupnost komplexních čísel, pak fci přiřazující

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$ nazveme mocninnou řadou se středem v z_0, kde $z_0 \in \mathbb{C}$

Pozn: $\sum a_n (z_1 - z_0)^n$

$$z_0 \in D\left(z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n\right)$$

Pozn: n-tý člen mocninné řady je homogenní polynom v prom. z
(Polynom p je homogenní $\equiv p(\lambda z) = \lambda^m p(z)$)

např. $x^3 + x^3$ není (proč?)

$z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nz)$ není mocninná řada

$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \right.$ .. „prototyp" tohle nás bude nejvíc zajímat

$$D\left(z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) = ?$$ Je to mocninná řada se středem $z_0 = 0$

? pro jaké $w_0 \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_0^n}{n!}$ konv. tato číselná řada

d'Alembert: $\frac{|w_0|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|w_0|^n} = \frac{1}{n+1} |w_0| < 1$

Budu zkoumat abs. konv. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|w_0|^n}{n!}$

$$|w_0| < (n+1). \quad (*)$$

Tvrdím, že z $(*)$ plyne, že $D\left(z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$, $n_0 = \lfloor |z| \rfloor \in \mathbb{N}_0$

$\forall n \geq n_0$ je $|z| \leq n_0 + 1 \leq n + 1$

$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} < 1 \xrightarrow{\text{nel d'Alembert}} \sum \frac{|z|^n}{n!}$ konv $\xrightarrow{\text{abs} \Rightarrow \text{k}} \sum \frac{z^n}{n!}$ konv.

$D\left(z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \mathbb{C}$

$\exp(z) := e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\qquad \left(\sum_i a_i\right)' = \sum_i (a_i)'$

$1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ $\longrightarrow$ toto ~~abs~~ dokážeme (viz dále)

<u>Pozn!!</u> $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

$$\exp: (\mathbb{C}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$$

je homomorfismus grup

$\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) \triangledown \varphi(y)$

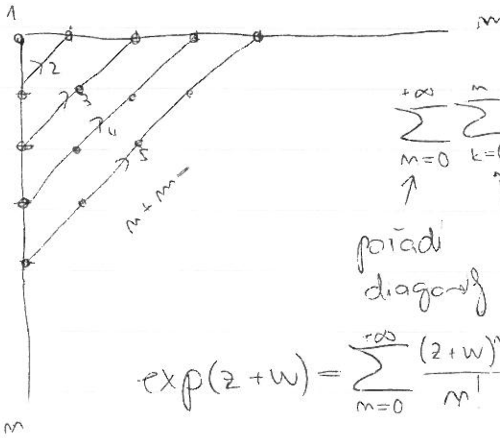
$\varphi : (G, \oplus, e) \to (G', \triangledown, e')$

konkretizace $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$

$\oplus = +$ na $\mathbb{C}$, $\triangledown = \cdot$ na $\mathbb{C}^\times$ násobení

Dk: Z výše uvedeného víme, že exp je všude v $\mathbb{C}$ def. fce a že $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ je absolutní konvergentní

Tj. dle věty o násobení řad (V 1.19) je i dvojná $\sum_{n,m=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$ absolutně konv.
(V 1.18 můžu sčítat "jakkoliv")



$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \exp(z)\exp(w)$$

pořadí diagonál

jedna po diagonále

$$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k w^{n-k}}{k!(n+k)!}$$

$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Matematická analýza

20. 3. 2013

Errata: d'Alembert

$$\frac{|w_c|}{n+1} < \frac{1}{2} = q \qquad n_0 = 2\lfloor |z| \rfloor + 1$$

Analogie (vysvětlení) $\sum \frac{1}{n}$ neb $\left| \begin{array}{l} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \frac{n}{n+1} < 1 \end{array} \right.$ a proto nekonv. $\sum \frac{1}{n}$

(Nenajdu $q < 1$ že $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \frac{n}{n+1} \leq q \iff \xrightarrow{\text{kvalitativní}} C$

Zpět k $\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

1) $D(\exp) = \mathbb{C}$ ✓ již

2) $\exp: (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$

$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

3) $R(\exp) = ?$ $\exp(z) = 0 \quad / \exp(-z)$

$0 \notin R(\exp)$ $\quad \exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1 \neq 0 \cdot \exp(-z) = 0$ ✓

Dohoda: $(z-z_0)^0 = 1$ v teorii mocninných řad

$(z - z_0)^0 = 0^0 = 1$ byť v limitách nedefinováno

$= \frac{0^5}{0^5} = 0^{5-5} = 0^0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

4) $x < y,\ x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$, neboť $1 < \exp(\underbrace{y-x}_{=: t > 0}) = \exp(-x)\exp(+y) \ / \exp(x)$

$\exp(t) = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2} \dots > 1$

$\exp(x) < \exp(y)$ ✓ $\Rightarrow$ víme $\exp_{|\mathbb{R}}$ je rostoucí, má tedy inverzi, kterou nazveme logaritmus

Pozn: Proč monotónnost exponenciály homomorfismem

$0 < x < y \Rightarrow e^x < e^y$ je snadné neboť

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$, což ev. platí neb $\quad x < y \Rightarrow x^n < y^n \Rightarrow \frac{x^n}{n!} < \frac{y^n}{n!}$

$t < 0$

$$e^t = \sum \frac{t^n}{n!} \leq 0 \ ?$$

$$e^{-5} = 1 + -5 + \frac{25}{2!} - \frac{36}{3!} + \frac{49}{4!}$$

Definice 1.13 $\quad$ Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost. Pak definuji:

$\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = A \iff A = \sup\left\{ \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \mid a_{n_k} \text{ je vybraná } a_n \text{ a } \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \exists, \text{vl. či nevl.} \right\}$

limes superior

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = A \iff A = \inf\left\{ \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \mid a_{n_k} \text{ je vybraná z } a_n \text{ a } \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \exists, \text{vl. či nevl.} \right\}$

limes inferior

příklad) Jde o zobecnění pojmu limity

$\limsup\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = \sup\{\dots\} = 1$ $\qquad 1 \geq \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}$, kde a_{n_k} je vybraná z $(-1)^n$

Dk: nejmenší horní závora ($\lightning$) $\quad \varepsilon < 1$ kandidát na sup.

Vezmi $a_{n_k} = a_{2k} = 1$

$\lim a_{n_k} = 1 \not< \varepsilon$

$\liminf (-1)^n = -1$ (Dk. anal.)

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \nexists$ (vl. ani nevlastní)

Věta 1.20

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ je mocninná řada. Pak $\exists$ právě jedno $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$, že $\forall z \in \mathbb{C}$ že:

1) $|z - z_0| < R \implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje

a

2) $|z - z_0| > R \implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ diverguje

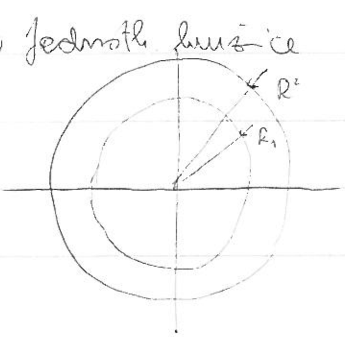
vně kružnice diverguje
uvnitř konverguje
mocninná řada

Navíc platí, že $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ s konvencí $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$

toto je vždy ≥ 0

Dk: 1) Jednoznačnost kružnice $\lightning$ nechť $\exists R_1, R_2$ $\quad R_1 \overset{\text{bůno}}{<} R_2$ a splňují 1) a 2)

$\implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje uvnitř $U_{R_2}(z_0)$ a diverguje $\forall z \; |z-z_0| > R_1 \implies \sum a_n (z-z_0)^n$



div a konv. na $R_1 < |z-z_0| < R_2$

$\{z \mid R_1 < |z-z_0| < R_2\} =: P(z_0; R_1, R_2)$

prstencové okolí

2) Existence (zkusíme R ze vzorečku)

a) $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n||(z-z_0)|^n} = ?$ pro $|z-z_0| < R$

$|z-z_0| \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R \cdot \frac{1}{R} = 1$, tj. $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} =: q < 1$

$\xRightarrow{\text{z def. lim sup}} \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; |a_n||z-z_0|^n \leq q$

(pokr. ↯ $\forall n_0 \; \exists \tilde{n} \geq n_0 \; |a_n||z-z_0|^n > q$. Máme $n_0 \longleftrightarrow \tilde{n}$, což zadá posl. $(a_{n_k} \longleftrightarrow k)$, jejíž $\forall$ členy jsou větší než $q \implies \limsup = q$)

↳ $\limsup \geq q$ ↯

konverguje dle Cauchyho kritéria $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z-z_0|^n$ konverguje

$\xRightarrow{\text{abs. → konv.}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ konv.

b) obdobné počítáme: Nechť $|z-z_0| > R$

$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = |z-z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > R \cdot \frac{1}{R} = 1$ ⇒ $q > 1$

to sup existuje vždy

$\xRightarrow{\text{def. lim. sup}} \exists n_0 \; \forall n \geq n_0, |a_n||z-z_0|^n \geq q > 1$. Dle Cauchyho kritéria $\implies \sum |a_n||z-z_0|^n$ diverguje (to je fajn) (☺)

Z nutné podmínky konv. $\sum a_n$ ($\equiv \lim a_n = 0$) vidíme, že řada nekonverguje ▨

Příklad, 1) geometrická řada $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \, z^n$

$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a|}} = \frac{1}{\limsup 1} = 1$ Nevíme, 11.20, co se děje na $\{z \mid |z|=1\}$

Z hodiny o aplikaci Abelova-Dirichletova kritéria na $\sum a_n \sin nx$ $\sum b_n \cos nx$ víme, že $\sum \cos nx$ osciluje / nekonverguje $\forall x \in \mathbb{R}$

$\to \sum z^n$ ~~nekonverguje~~ osciluje pro $|z| = 1$

P1) $\sum_{n=0}^{+\infty} n z^n = \Big| \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = 1$

$\forall |z|<1$ konv.

$\forall |z|>1$ osciluje $\quad z=+2 \dots \sum n 2^n$

diverguje $\quad z=-2 \dots \sum n(-2)^n \subseteq \mathbb{C}$

<u>Definice 1.14</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a \in \mathbb{C}$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a)}{h}$$ nazveme derivací f v a, kde $B = \lim_{z\to a} g(z)$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in P_\delta(a))(|g(z) - B| < \varepsilon)$$

<u>Pozn:</u> $P_\delta(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \delta\}$

dosud je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ $\quad f(z) = (f^1(z), f^2(z))$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \left(\lim_{x\to a} f^1(x), \lim_{x\to a} f^2(x)\right) = \lim_{x\to a} f^1(x) + i \lim_{x\to a} f^2(x)$$

$\to$ lim reálné a imag. "hodnotové" složky

JE TO NĚCO JINÝHO NEŽ TOTÁLNÍ DIF. V $\mathbb{R}^2$

Př. $$(z^n)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^n + na^{n-1}h + \dots + na h^{n-1} + h^n - a^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (a^{n-1} + \dots + a h^{n-2} + h^{n-1}) = \emptyset$$ (nepsal onoho a pak zjistil že to nebylo a opravil to)

smazání

$= na^{n-1}$

Př. $(\bar{z})' = ?$

$f(z) = \bar{z},\ f'(a),\ a \in \mathbb{C}$

"$f(x,y) = (x,-y)$"

nemá derivaci! ($\triangle$ nerovnost)

Matematická analýza

21.3.2013

D.cv. $f(z)=\bar{z}$ nemá derivaci v žádném bodě $a\in\mathbb{C}$; $a=a_1+ia_2$, $h=h_1+ih_2$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a_1+h_1-ia_2-ih_2-a_1+ia_2}{h_1+ih_2}=\lim_{h\to 0}\frac{(h_1-ih_2)(h_1-ih_2)}{h_1^2+h_2^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{-2h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\cdot i\right)=1-2i\lim_{h\to 0}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\quad\text{(aritm. limit fcí s def. ob. v } \mathbb{C})$$

Tvrdíme, že $\nexists \lim_{h\to 0}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$. Dk: Sporem. Nechť $\exists$. Označme ji β. Tzn. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall(h_1+ih_2)=h$ takové, že $|h|\le\delta \iff h_1^2+h_2^2\le\delta^2$

$\left[\; |z|=\sqrt{z_1^2+z_2^2},\; z=z_1+iz_2\right.$

$\left|\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}-\beta\right|<\varepsilon$. Odtud možná plyne že $\beta=0$. Pro $\varepsilon=\frac{|\beta|}{2}$ $\exists\tilde{\delta}>0$ $\forall h$.

$|\ldots-\beta|<\varepsilon$. Zvolme $h=0+\tilde{\delta}i$

$\left|\frac{0\cdot\tilde{\delta}}{0^2+\tilde{\delta}^2}-\beta\right|<\frac{|\beta|}{2}$ ↯ $\qquad |\beta|<\frac{|\beta|}{2}$

$\hookrightarrow |\beta|=0 \Rightarrow \beta=0$ ↯

abychom mohli použít def. limity tak musela $\frac{|\beta|}{2}$ být >0

$\left|\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right|<\varepsilon$ $\qquad$ Pro $\varepsilon=1$ $\exists\delta_1>0$ $\forall(h_1+ih_2)$ $\quad h_1^2+h_2^2\le\delta_1^2$

je $\left|\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right|<1$ $\qquad$ Zkusme $h_2=th_1$, $t\in\mathbb{R}$

$\left|\frac{th_1^2}{(1+t^2)h_1^2}\right|<1$

$\left|\frac{t}{1+t^2}\right|<1$ $\quad$ což však zřejmě platí, nedostávám spor

$\left|\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right|<\varepsilon$ $\qquad$ zvol $h_1=h_2$ $\quad\left|\frac{h_1^2}{h_1^2+h_1^2}\right|=\frac{1}{2}$ $\qquad$ tady už spor dostávám, potřebuji aby to platilo pro $\forall\varepsilon>0$

Formálně: Zvol $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Nechť $\exists\delta>0$, že $\forall(h_1,h_2)$, $h_1^2+h_2^2\le\delta^2$

je $\left|\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right|<\frac{1}{4}$ $\qquad$ vezmi $h_1=\frac{\delta}{\sqrt2}$ $\quad h_2=\frac{\delta}{\sqrt2}$ $\quad h_1^2+h_2^2\le\delta^2$

$$\left|\frac{\frac{\delta}{\sqrt2}\frac{\delta}{\sqrt2}}{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}}\right|=\frac{1}{2}\not<\frac{1}{4}\ ↯$$

Závěr. $f(z)=\bar{z}$ nemá totální dif. v $\mathbb{C}$

pouze $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1 \qquad f(x,y) = x - iy$

Pozn: Víme, jak spočítat poloměr konvergence mocninné řady, "číslo" R.

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$ (Dk. Cauchyho odm. krit. + def. limes superior, $n \to +\infty$)

Analogicky se dokáže vzorečkem $R^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ pokud lim $\exists$

poro mo to jo? jr to podílové kr.

Derivace mocninných řad $f: z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad Df = U_R(z_0)$, R dáno vzorcem výše

$$f': z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1} \qquad \text{derivace všech členů}$$

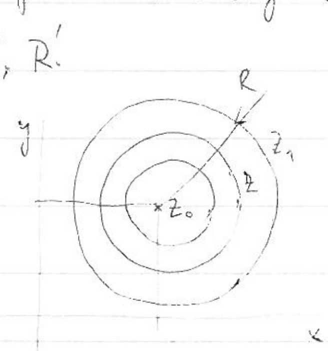
Věta 1.21 o derivaci mocninných řad

Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ s poloměrem konvergence R. Označme $f: z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ její tzv. součet (na $U_R(z_0)$). Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ je mocninná řada o témže poloměru a platí že f má derivaci a $f': z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}$.

Dk:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1} \quad \dots \quad R'$

1, Poloměry. a, $|a_n (z-z_0)^n| \leq |a_n| |n (z-z_0)^n|$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow R \geq$ poloměru konvergence řady $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^n$ jenž je roven pol. konv. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}$, R'.



b, $|n a_n (z-z_0)^n| \leq \begin{vmatrix} |z_1 - z_0| > |z - z_0| \\ z_1 \in U_{R'}(z_0) \subseteq U_R(z_0) \end{vmatrix}$

$$\rho := \left| \frac{z-z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$$

$$|n a_n (z-z_0)^n| = |n a_n (z-z_0)^n| \left| \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = n |a_n| |z_1 - z_0|^n \rho^n =$$

$$= \underbrace{|a_n| |z_1 - z_0|^n}_{z_1 \in U_{R'}(z_0) \subseteq U_R(z_0)} n \rho^n$$

$\sum |a_n||z-z_0|^n$ konv. na $U_R(z_0)$ $\Rightarrow$ konv. i $\sum |a_n||z_1-z_0|^n$ konv.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n||z_1-z_0|^n \to 0 \Rightarrow |a_n||z_1-z_0|^n \le K$

$\forall n$.

dle D'Alambertova kritéria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\varsigma^n$ konverguje $(\varsigma > 1)$

srov. krit. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1} n|a_n||z_1-z_0|^n$ konverguje $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n|a_n||z-z_0|^{n-1}$ konv. $\xrightarrow{\text{abs. k.} \Rightarrow \text{konv}}$

$\sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$ konverguje $\forall z_1 \in U_R(z_0)$

$\Rightarrow R' \ge R \xrightarrow{a+b} R' = R$.

2) $\Delta(h) := h^{-1}[f(z+h)-f(z)] - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

Zajímá nás $\Delta(h)$, $h \to 0$

$$\Delta(h) = h^{-1}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z+h-z_0)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\right] - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left\{h^{-1}\left[(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n\right] - n(z-z_0)^{n-1}\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left\{h^{-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(z-z_0)^j h^{n-j} -\right.$$

$$\left. -h^{-1}(z-z_0)^n - n(z-z_0)^{n-1}\right\} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\left\{h^{-1}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j}(z-z_0)^j h^{n-j}\right\} =$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} h a_n \left[\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j} h^{n-j-2}(z-z_0)^j\right]$$

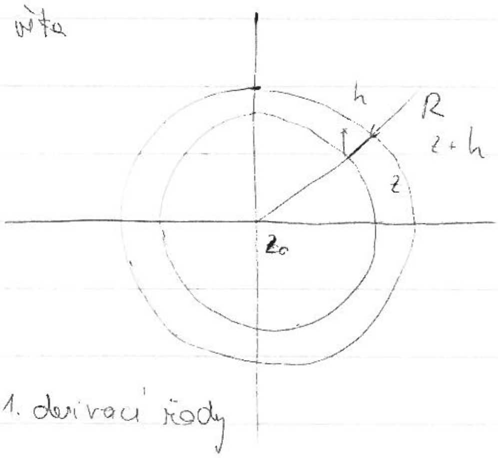
$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \le \frac{(n-2)!(n-1)n}{j!(n-j-2)!} = n(n-1)\binom{n-2}{j}$$

$$|\Delta(h)| \le \sum_{n=2}^{+\infty}|a_n||h|\underbrace{\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}n(n-1)h^{n-j-2}|z-z_0|^j}_{\text{binomická věta}} = |h|\sum_{n=2}^{+\infty}|a_n|n(n-1)(|z-z_0|+|h|)^{n-2}$$

Pokud $z \in U_R(z_0)$ tak vezmu h aby

tj. $|z+h-z_0| < R$. Dokonce aby

$|z-z_0|+|h| < R$.



Řada $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n||z-z_0|^{n-2}$

má však dle 1) stk. pol. R, neboť její členy jsou 1. derivací řady

$\sum a_n n(z-z_0)^{n-1}$, ovšem víme, že její poloměr konvergence je R, tj. i poloměr konvergence $\sum |a_n| n(n-1)|z-z_0|^n$ je R $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z-z_0|+|h|)^n$ konv. na $U_R(z_0)$.

Spc. součet této řady je ozn. číslem K a tedy $|\Delta(h)| \leq |h|K$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} |\Delta(h)| \underset{\uparrow}{\leq} \lim_{h\to 0} |h|K = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \Delta(h) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$. ▨

V o lim. přechodu v nerovnosti

Věta 1.22 o primitivní fci k mocninné řadě

Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence R a součtem

$$f: z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z \in U_R(z_0). \text{ Pak } g: z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} + C,$$

$C \in \mathbb{C}$, je primitivní k f, to jest $g' = f$.

Dk: Ozn. R_g poloměr konvergence $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$

Dle V1.21 je poloměr konv. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ také R_g

Tj. označím-li R_f pol. konv. $\sum a_n(z-z_0)^n$ R_f, mám $R_f = R_g$.

Dle V1.21. je $g' = \sum \left(\frac{a_n}{n+1}\right)(n+1)(z-z_0)^n = \sum a_n(z-z_0)^n = f(z)$ ▨

DÚ $\sum \frac{n}{2^n}$ $\qquad f'(z) = \sum \left(\frac{z}{2}\right)^n$

$\sum \frac{z^n}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{1-Q}$

Matematická analýza

27. 3. 2013

Př: $\exp(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$, $R = +\infty$

V1.22
$\Rightarrow \exp'(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m z^{m-1}}{m!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp(z)$.

! **Definice 1.15** $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $e = \exp$, $z \in \mathbb{C}$

$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Př: $\dfrac{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(iz)^m}{m!} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^m}{m!}}{2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\frac{i^m + (-i)^m}{m!\, 2}\right] z^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = \cos z$

analog. $\sin z = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}$

! Př: $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \left(i \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \right) = e^a (\cos b + i \sin b)$ $\quad a, b \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

exp je homomorf. grup $\qquad$ def sin/cos

$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ $\qquad z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(b)$

$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i \sin(\mathrm{Im}(z)))$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

! Př: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$

neboť $= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h}$

! Př: 1, $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2, $f(0) = 1$

3, $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ na $\mathbb{R}$ $(R = +\infty)$ $\quad \overset{?}{\Longrightarrow} f(x) = \exp(x)$

Dk: Indukcí 1, $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

Snadno $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \Longrightarrow b_k = c_k$ $\quad$ neboť $a_{k+1} = (k+1)^{-1} a_k \Rightarrow a_k = a_0 (k!)^{-1}$, $a_0 \in \mathbb{C}$

dosazení 0

2, $\Rightarrow a_0 = 1 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_0}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$

funkce které jsou součtem mocninné řady... analytické

Závěr: exp nejenže splňuje body 1,2,3 ale je to jediná taková fce

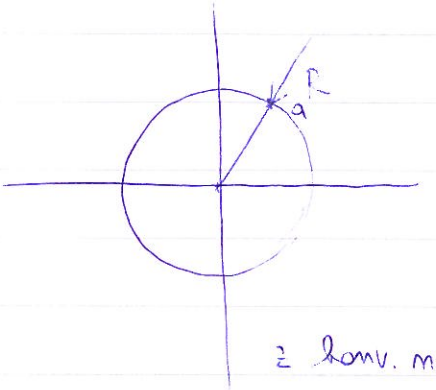
Lemma 1.23 Abelova věta

Nechť $\sum_{m=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ je mocninná řada o poloměru konvergence $R > 0$. Nechť $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (Re^{i\varphi})^k$ konverguje pro nějaké $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Pak

(pro $R > +\infty$ (A))

$$\lim_{t \to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (tRe^{i\varphi})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (Re^{i\varphi})^k$$

Pozn:



Nevíme: $z = z_0 + Re^{i\varphi}$

Lemma: víme co se děje $z = z_0 + Re^{i\varphi_0}$

$\Rightarrow \sum a_k (z-z_0)^k$ konverguje na úsečce

$z = z_0 + Rte^{i\varphi_0}$ $\quad t \in \langle 0, 1\rangle$

z konv. na kružnici $\Rightarrow$ konv v kružnici

a $\lim_{z \to a^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (a^-)^k$ rovná se té fční hodnotě

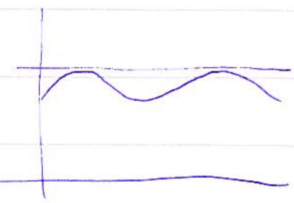
Př: $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} (z-1)^m \qquad R^{-1} = \lim_{m \to +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 1$ Nevíme co se děje při $|z| = 1$

když dosadím 1 tak dostanu součet nul

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} (1-1)^m = 1 \Rightarrow \lim_{z \to 1^-} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} (z-1)^m = f(1) = 1$$

$(0^0 = 1)$

Pro obecné fce Abelova věta neplatí



! Pozn: Důsledek V1.22: Je-li f součtem $\sum_{m=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ s poloměrem konv. $R \Rightarrow f$ je spojitá na $U(z_0, R)$

Dk: f' $\exists$ dle V1.22 a má tentýž poloměr konvergence jako $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$. Z toho že $\exists f' \rightarrow f$ je spojitá

$$|F(a+h) - F(a)| = \left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \right| |h|, \; h \to 0 \ldots |F'(a)||h| = 0 \cdot 0 = 0$$

Poloměr konvergence - když jsem za tím tak to diverguje

II. Metrické prostory

Chceme zobecnit pojmy limity (derivace), spojitosti z fcí/posl. s def. oborem $\mathbb{R}$ i pro jiné množiny než $\mathbb{R}$.

Dosud: $f: \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ $\quad a_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

kromě mocninných řad $z^k: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad (z^k)' = kz^{k-1}$

v $\mathbb{C}$ měříme $|a+ib| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$

Definice 2.16

(P, ρ) nazveme metrický prostor, pokud $\rho: P \times P \to \mathbb{R}$ je zobrazení takové, že

1) $\rho(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in P \quad \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x,y \in P$

3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z) \quad \forall x,y,z \in P$ $\qquad$ (Δ nerovnost)

Pozn. ρ se nazývá metrika.

Př. $P = \mathbb{R}, \rho(x,y) := |x-y|, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\rho(x,y) \geq 0 \quad |x-y| = 0 \iff x = y \qquad (|a| := \max\{a,-a\})$

$|x-y| + |y-z| \geq |(x-y)+(y-z)| = |x-z| = \rho(x,z)$

Př. $P = \mathbb{R}^n, \rho_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}_0$

$\rho_p(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad x = (x^1, \dots, x^n) \quad y = (y^1, \dots, y^n)$

metrika souvisí s měřením vzdálenosti

$\rho_p(x,y) \geq 0$

$\rho_p(x,x) = 0$ (skalární součin to není, ale se součin vektoru sám se sebou není nula)

Δ nerovnost $\ p = 2: \ n \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y^i + z^i)^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - z^i)^2} \quad /^2$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + 2\sum^{n} y_i^2 - 2\sum^{n} x_i y_i + \cancel{\sum^{n} z_i^2} - 2\sum^{n} y_i z_i + 2\sqrt{\ }\sqrt{\ } \geq \cancel{\sum^{n} x_i^2} + \cancel{\sum^{n} z_i^2} - 2\sum^{n} x_i z_i$$

$$2\sqrt{\sum (x-y)^2}\sqrt{\sum (y-z)^2} + 2\sum^{n} y_i^2 \geq 2\sum^{n} x_i z_i + 2\sum^{n} x_i y_i + 2\sum^{n} z_i y_i$$

1, dále tento člen $2\sum y_i^2$ napravo

2, $\cdot \frac{1}{2}$

3) $\square^2$

4) eventuelně $(a_i - b_i)^2 \geq 0$

$$\left(\sqrt{\frac{a_i^2 + b_i^2}{2}} \geq \sqrt{a_i b_i}\right)$$

Cauchy - Schwarzova nerovnost (LA)

$$|a||b| \geq |(a,b)|$$

$$a = x - y$$

$$b = y - z$$

$$CS: |a||b| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}(y^i - z^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq \left|\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i, y^i - z^i)\right| = \left|\sum(x^i, y^i) - \sum(x^i, z^i) + \sum(y^i z^i) - \sum(y^i y^i)\right| \geq \sum(x^i y^i) - \sum(x^i z^i) + \sum y^i z^i - \sum y^i y^i$$

cbd. $\quad (|a| \geq a)$

je to metrika (a plyne to i toho že to je indukovaná skalárním součinem.. co to?)

při d. diskrétní metrika

P libovolná množina

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

1) $\rho(x,y) \geq 0$ & $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

2) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

$\cancel{0 \geq 1}$ nenastane

28.3.2013

Matematická analýza

Definice 2.17

$(V, \|\cdot\|)$ nazveme normovaný prostor pokud V je vektorový prostor nad uspořádaným tělesem $\mathbb{K}$ a $\|\cdot\|: V \to \mathbb{K}$ je zobrazení splňující:

1. $\|a\| \geq 0 \quad \forall a \in V$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| \quad \forall a \in V, \lambda \in \mathbb{K}$, kde $|\lambda| = \max\{-\lambda, \lambda\}$
3. $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|, \forall a, b \in V$
4. $\|a\| = 0 \iff a = 0$

Pozn. 1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tak zademe $|\lambda| = \sqrt{\bar{\lambda} \lambda}$

(Tedy $\|\cdot\|: V \to \mathbb{C}$) 1) implicitní implikuje $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+_0$

2) 4) $\Leftarrow$ je nadbytečné neboť $\|0\| = \|0 \cdot v\| = |0| \cdot \|v\| = 0 \cdot \|v\| = 0$ $\mathbb{K}$

3) metrický prostor nemusí být vektorový

Př. 1) $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, $\|v\| = |v| = \max\{-v, v\}, v \in V$

2) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$, $\|v\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (v^i)^2\right]^{1/2}$ $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{Q}$ je v.p. nad $\mathbb{Q}$

$\|q\| = |q|$

$(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor neboť $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$, neb $|a+b| \leq |a| + |b|$

a ostatní snadné

Lemma 1.24

Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný vektorový prostor, pak (V, ρ), kde $\rho(x,y) = \|x-y\|, \forall x, y \in V$ je metrický prostor

Dk: 1) $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ dle vl. normy

2) $\rho(x,y) + \rho(y,z) = \|x-y\| + \|y-z\| \overset{3}{\geq} \|x-y+y-z\| = \|x-z\| = \rho(x,z)$

3) $\rho(x,x) = \|x-x\| = \|0\| = 0$ (4. normy)

4) $\rho(x,y) = 0 \underset{\text{def } \rho}{\iff} \|x-y\| = 0 \underset{\text{vl. normy}}{\iff} x = y$ ∎

Pozn: Metrice $\rho(x,y)$ z lemmatu výše říkáme indukovaná metrika

Př: Je diskrétní metrika indukovaná?

metrika na diskrétním v.p. jenž vektorový)

Ne! Proč? ↯. Tp, že existuje norma $\|\cdot\|$ na tomto (disk.) v.p. jež indukuje disk. metriku ρ. Nechť $x \in V$, pak $2x \in V$ a nechť $x \neq 0$ pak 1) $x \neq 2x \Rightarrow \rho(x,2x) = 1$

$\Leftrightarrow \|x\| = 1$

2) $\rho(x,2x) = \|2x - x\| = \|x\| \neq 0$

3) Vezmi $3x$, pak $\rho(3x,x) = \|3x - x\| = \|2x\| = 2\cdot\|x\| = 2\cdot 1 = 2$

$\| \; 1 \rightarrow$ ↯

Pozn: Každá metrika je indukovaná normou.

Př) Nechceme měřit jen vzdálenosti bodů z oboru hodnot fcí ale např. i vzdálenosti bodů z prostoru fcí

$V = \mathcal{C}(\langle a,b\rangle) = \{f: \langle a,b\rangle \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C} \mid f \text{ spojitá na } \langle a,b\rangle\}$

$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$

$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \langle a,b\rangle\}$. Definice je korektní neboť $\forall$ spojitá je omezená (tj. $\sup \in \mathbb{R}$, a nikoli $+\infty$) Opravdu $\|\cdot\|$ je normou? 1) $\|f\| \geq 0$, neb $|f(x)| \geq 0 \;\; \forall x, \forall f$

2) $\|f+g\| = \sup\{|f(x)+g(x)| \mid x\in\langle a,b\rangle\} \leq \sup\{|f(x)| \mid x\in\langle a,b\rangle\} + \sup\{|g(x)| \mid x\in\langle a,b\rangle\}$

↑ troj. nerovnost pro $| \; |$ doma

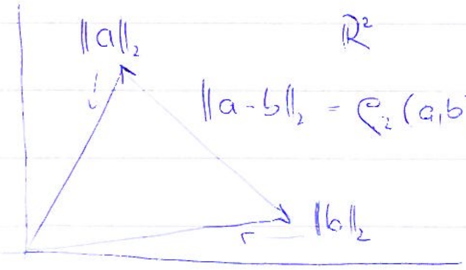
3) $\|\bar{o}\| = 0$, $\bar{o}(x) = 0$, $\forall x \in \langle a,b\rangle$

↑ nulová fce

4) $\|f\| = 0 \Rightarrow \sup\{|f(x)| \mid x \in \langle a,b\rangle\} = 0$

$|f(x)| = 0 \;\; \forall x \in \langle a,b\rangle \Rightarrow f = \bar{o}$ + vím $|f(x)| \geq 0$

Pozn:



$\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ je ∞ dimenze nad $\mathbb{R}$. Obsahuje totiž $\{1_{\langle a,b\rangle}, x_{\langle a,b\rangle}, x^2_{\langle a,b\rangle}, \dots\}$ již je lin. nezáv. prostory fcí jsou definiční obory pro operátory, např. pro integrály

Definice 2.18

(P,ρ) je metrický prostor, $x \in P$, $\delta > 0$

Já: „Dneska trpíš nějakou samomluvou (:)"
M. Koráb: „občas si potřebuju pokecat s někým inteligentním"

$U(x,\delta) = \{y \in P \mid \rho(y,x) < \delta\}$ okolí x

$P(x,\delta) = \{y \in P \mid 0 < \rho(y,x) < \delta\} = U(x,\delta) \setminus \{x\}$ redukované okolí x

$G \subseteq P$ nazveme otevřenou (v (P,ρ)), pokud $\forall x \in G.\ \exists \delta > 0$, že $U(x,\delta) \subseteq G$

$F \subseteq P$ nazveme uzavřenou (v (P,ρ)), pokud $F^c := P \setminus F$ je otevřená (v (P,ρ)).

Pozn. F^c ... komplement / complement

$\emptyset, P \subseteq P$

a, $\emptyset$ je ot., neboť $\forall x \in \emptyset.\ \exists \delta \ldots$ $(\forall x \in \emptyset) \wedge \{\} = \text{def } \emptyset$

$(\forall x)(x \notin \emptyset)$

P je otevřená neboť $\forall x \in P$ máme najít δ, což najdu neboť $x \in P \Rightarrow \delta$ libovolné přiroz. číslo

$U(x,\delta) \subseteq P$ ... splníme neb vždy $U(x,\delta) \subseteq P$

$\emptyset = P \setminus P = P^c$, tj. $\emptyset$ je uzavřená (její doplněk je otevřený), tj. P je uzavřená

Př: $\circ (\mathbb{R}, \rho_p)$ $\rho_p(x,y) = (|x-y|^p)^{1/p} = |x-y|$ obojetný

$|x|$ $|y|$ (je to v $\mathbb{R}$)

$\circ (0,1)$ je otevřená neboť mějme $x \in (0,1)$, $\delta := \min\{\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}\}$

$U(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < \delta\}$

Chceme dokázat $U(x,\delta) \subseteq (0,1) \iff \forall y \in U(x,\delta),\ 0 \leq y \leq 1$

Víme $y \in U(x,\delta) \iff |y-x| < \delta$

a, pp. že $\delta = \frac{x}{2}$ $\quad 0 < y < 1 \overset{?}{\Leftarrow} |y-x| < \frac{x}{2}$ $\quad$ dyž je $\frac{x}{2}$ a δ je min

$0 < y \leq |y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| < \frac{x}{2} + |x| \leq \frac{x}{2} + x \leq \frac{1-x}{2} + x = \frac{1+x}{2} < 1$

$\Downarrow \frac{x}{2} > 0$ $\quad$ zjevně $x \in (0,1)$

b, pp. že $\delta = \frac{1-x}{2}$ doma

- $\langle 0,1 \rangle$ je uzavřená množina, neboť $\langle 0,1 \rangle^c = \mathbb{R} \setminus \langle 0,1 \rangle = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ což jsou otevřené množiny
- $\langle 0,1)$ není ani otevřená ani uzavřená

s každým bodem obsahuje nějaké okolíčko

Věta 2.25

Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Pak

1, $\emptyset$, P otevřené

2) I množina, $\forall \alpha \in I$ je G_α otevřená $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ je otevřená

3) Nechť $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ je G_i otevřená

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} G_i$ je otevřený

Dk: 1) na přř., nějaký př.

2) $x \in \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in I$, že $x \in G_{\alpha_0}$, ale jelikož G_{α_0} je otevřená $\exists \delta_0 > 0$

$U(x, \delta_0) \subseteq G_{\alpha_0}$, z toho plyne, že $U(x, \delta_0) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$

3) $x \in \bigcap_{i=1}^{m} G_i \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}$ $x \in G_j$, avšak G_j je otevřená tj $\forall j \in \{1, \dots, m\}$

$\exists \delta_j > 0 \quad U(x, \delta_j) \subseteq G_j$

Zvol $\delta_0 := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ $(\exists)$

Vezmu $U(x, \delta_0) \subseteq U(x, \delta_j) \subseteq G_j \quad \Rightarrow U(x, \delta_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} G_i$ $\square$

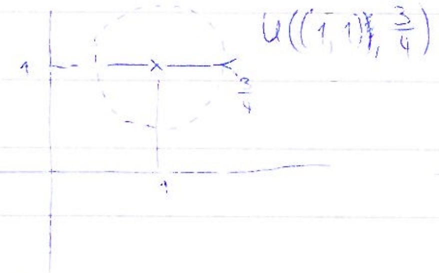
Pozn: 1) Proč $U(x, \delta_0) \subseteq U(x, \delta_j) \Leftarrow \delta_0 \leq \delta_j$

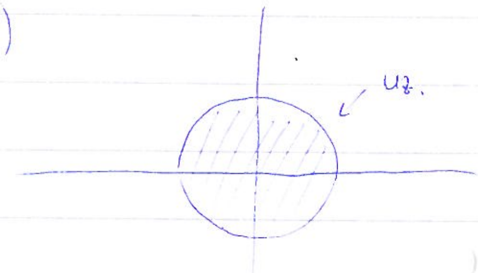
$y \in U(x, \delta) \Rightarrow \rho(x, y) < \delta_0$

Chceme $y \in U(x, \delta_j) \Leftrightarrow \rho(x, y) < \delta_j$

$\rho(x, y) < \delta_0 \leq \delta_j \Rightarrow y \in U(x, \delta_j)$ což jsme chtěli.

2) Ilustrace ρ_2 v $\mathbb{R}^2$





3) Okolí $(\mathbb{R}$, diskr.)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor s diskrétní metrikou

$\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ $\forall x \neq y$

$0 < \delta < 1$, $x_0 \in P \neq \emptyset$

$U(x_0, \delta) = \{x \in P \mid \rho(x, x_0) < \delta\} = \{x_0\}$

$\delta \geq 1 \quad U(x_0, \delta) = X$. bod je otevřený

z def. $\forall$ okolí jsou otevřená

$\forall X \subset P$ je otevřená, neboť nechť $x_0 \in X$. Mám najít $\delta > 0$, že $U(x_0, \delta) \subseteq X$.

Zvol $\delta = \frac{1}{2}$, $U(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\} \subseteq X$

Matematická analýza

3.4.2013

Př: Podmínka 2 nelze zobecnit na nekonečné průniky, neboť uvažujme

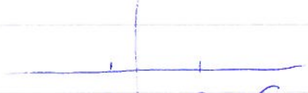
$G_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) \subseteq (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, $i \in \mathbb{N}$

$\bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i \supseteq \{0\}$, neb $0 \in \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$, $\forall i \in \mathbb{N}$

$(\delta \leqq 1)$

Dokonce $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{0\}$ rovnost. $i = \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor$ $\left\lfloor \frac{1}{0{,}5\ldots} \right\rfloor = 1$

$[\delta \in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ $\delta \neq 0$



0 $\delta \in G_{i+1} \Rightarrow \delta \in \bigcap_{j=1}^{i+1} G_j$

$\delta > 1$ $\delta \notin G_1$ $+\infty$

! to se musí, ne zapomenout podbýt

<u>Celkem</u> $\bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i = \{0\}$, což není otevřená množina v $\mathbb{R}$ s uvažovanou metrikou

$\varrho(x,y) = |x-y|$ (metrika indukovaná normou)

Proč $\{0\}$ není ot.?

Def X je otevřená v $(P,\varrho) \Longleftrightarrow \forall x_0 \in X$ $\exists \delta > 0$ $U(x_0,\delta) \subseteq X$.

Kdyby $\{0\}$ bylo otevřená, tak existuje $\delta > 0$ $\frac{\delta}{2} \in \{x \mid \varrho(0,x) < \delta\} = U(0,\delta) \subseteq \{0\} \not\ni \frac{\delta}{2}$

Věta 2.26

Nechť (P,ϱ) je metrický prostor

1, Nechť $G_1, \ldots, G_m$ uzavřené v $P \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ uzavřená

2, Nechť G_α, $\alpha \in I$, uzavřené v $P \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ uzavřená

Dk: 1, $\underbrace{P \setminus \bigcup_{i=1}^{m} G_i = \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{(P \setminus G_i)}_{\text{ot. } (G_i \text{ uz., doplňky ot.})}}_{\text{otevřená dle V2.25}}$ = otevřená $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ je uzavřená

2, $P \setminus \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{(P \setminus G_\alpha)}_{\text{ot.}} \xrightarrow{V2.25} P \setminus \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ je otevřená $\xrightarrow{\text{def uz.}} \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ uzavřená $\square$

Pozn. Opět v 1, nelze volit "$m = +\infty$", neboť $G_i = \left\langle -1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \right\rangle$, $i \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i = (-1,1)$ (doma)

<u>Definice 2.19</u>

(X,ϱ), (Y,τ) buďte metrické prostory a $f: X \rightarrow Y$ zobrazení

1) $x_0 \in X$, říkáme, že f je spojitá v x_0, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U(x_0, \delta)\ f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$
$\subseteq (X, \varrho) \qquad \subset (Y, \tau)$

2) f se nazývá spojitá v Y, pokud f je spojitá v $x_0 \in X$, $\forall x_0 \in X$.

~~Důkaz~~

Pozn: 1) $(\varrho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tau(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$

Koinciduje se spojitostí fce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ vnitřní spojitost napíšeme $(a,b\rangle$

spojitost v $(a,b\rangle$ = spojitost $\forall x \in (a,b)$ a sp. v b zleva $\xLeftrightarrow[\text{„prostoru"}]{}$ $x \in U_\delta^-(b)$, $f(x) \subset U_\varepsilon(b)$

spojitost v $(a,b\rangle \underset{\text{„nové"}}{\equiv}$ sp. v každém bodě $(a,b\rangle$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(b)\ f(x) \subset U_\varepsilon(f(b))$

$U_\delta(b) = \{x \subset (a,b\rangle \mid |x - b| < \delta\} = U_\delta(b)$

$Y \subseteq (X, \varrho) \Rightarrow (Y, \varrho_{|Y \times Y})$ je metrický prostor

(Např. $(a,b\rangle$, $\varrho: (a,b\rangle \times (a,b\rangle \to \mathbb{R}$)

Definice 2.20

1) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (X, \sigma)$ nazveme cauchyovskou $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall m, n \geq n_0,\ \sigma(x_n, x_m) < \varepsilon$

2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (X, \sigma)$. Řekneme, že $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \overset{\in X}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \sigma(x_n, x_0) < \varepsilon$

3) (X, σ) nazveme úplným metrickým prostorem, má-li každá cauchyovská posloupnost $(x_n) \subseteq X$ limitu

Př: 1) $(\mathbb{R}, \varrho(x,y) = |x - y|)$ je úplný metrický prostor na základě Bolzano-Cauchyho věty

↳ pokud ta cauchyovská posloupnost konverguje

2) $(\mathbb{Q}, \varrho(x,y) = |x - y|)$ není úplný metr. pr.

$x_n = \dfrac{[\sqrt{2} \cdot 10^n]}{10^n} \qquad x_1 = 1{,}4,\ x_2 = 1{,}41,\ x_3 = 1{,}414, \ldots$

Dokažme (x_n) cauchyovská, $|d_n - d_{n+1}| < 10^{-n} \ldots < \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m \geq n_0$

$|x_m - x_n| = |x_m - x_{n_0} + x_{n_0} - x_n| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x_n|$

Limitu nemá $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \dfrac{p^2}{q^2} \neq 2$

Věta V2.21 Heineho charakterizace spojitosti

(X, ϱ), (Y, σ), $f: X \to Y$. Pak NVJE. (následující výroky jsou ekvivalentní)

1) f je spojitá v X

2) $(\forall x_0 \in X)(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X)(x_n \to x_0,\ n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0),\ n \to +\infty)$

Dk: 1) 1 ⇒ 2)

víme: f spoj. v $X \overset{\text{def } 1}{\Rightarrow} (\forall x_0 \in X)(f$ je spojitá v $x_0)$. Chceme $\forall x_0\ \forall x_n\ (x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$

víme: f spoj. v x_0 (ze 1), tj. pro toto zadané $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$

Vezmi toto δ a dle def. limity posloupnosti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \varrho(x_n, x_0) < \delta$

To je hledané n_0. $x_n \in U_\delta(x_0) \subseteq (X, \varrho)$

2) Sporem/Nepřímo $\neg(2) \Rightarrow \neg(1) \iff \neg(1) \Rightarrow \neg(2)$

Chceme $\exists x_0\ \exists x_n \in X\ x_n \to x_0$ ale $f(x_n) \not\to f(x_0)$

Víme: $\neg(1) \Rightarrow f$ není spojitá v $X \Rightarrow \exists x_0 \in X$ že $f(x)$ není spojitá v x_0 tj.

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in U_\delta(x_0), f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$

Tvrdím, že toto x_0 je x_0 které chceme. Pro $\delta = \frac{1}{n} \dots x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \wedge f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$

vytvořím $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tvrdím že $x_n \to x_0$ ($\Leftarrow x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$)

definice lim. posl. v metr. prostoru

$f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$ nebo-ť tak jsme x_n volili

Matematická analýza

4. 4. 2013

Heine charakterizace spojitosti

„Založe" $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \wedge f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$. Víme, že

že množina všech z, že $z \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$ a $f(z) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ je neprázdná, $\forall n \in \mathbb{N}$

Vytvoření X je nekonstruktivní, neb víme, že $\exists x_n \ldots$

$\forall x \; x \notin \emptyset$

$M \neq \emptyset \iff \exists x, x \in M$

Pp. že X vytvoří množinu $(X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ vede k paradoxům, jako například Banach - Tarského paradox (překládání Měsíce do kufru, zdvojení $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ $\exists M_i, i = 1, \ldots, 5$

$\bigcup M_i = S^2$ a, $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, $\exists J, I$ $J \cup I = \{1, \ldots, 5\}$, $I \cap J \neq \emptyset$

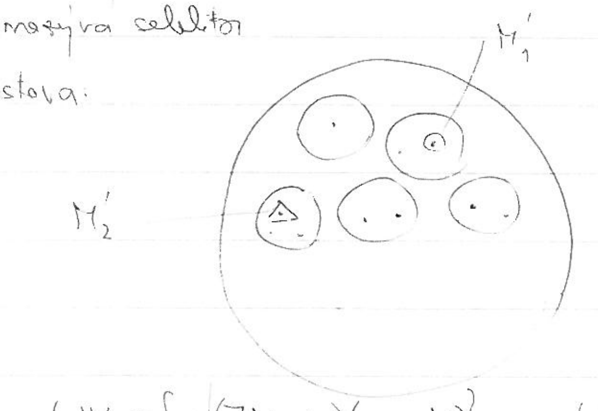
$\bigcup_{k \in I} M_k \cong S^2$, $\bigcup_{k \in J} M_k \cong S^2$)

Existuje axiom výběru: Nechť X je množina a 1, $M \in X \Rightarrow M \neq \emptyset \Rightarrow$

2, $\exists f$ že $\forall M' \in X$ $f(M') \in M'$

f se nazývá selektor

představa:



$f(M_1') = \odot$ nekonstruktivní

$f(M_2') = \triangle$ existuje to být to nemusím zkonstruovat

$f: X \to \bigcup X = \{x \mid (\exists M \in X)(x \in M)\}$ $\quad \bigcup\{\{1,2\},\{3\},\{4,3\}\} = \{1,2,3,4\}$

Literatura: Balcar, Štěpánek

Definice 2.21

Nechť $X \subseteq (P, \rho)$ metrický prostor. $\overline{X} = \{x \in P \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X, \lim_{n \to +\infty} x_n = x\}$ uzávěr množiny X.

$X^\circ = \{x \in P \mid \exists \delta > 0, U_\delta(x) \subseteq X\}$ vnitřek

$\partial X = \overline{X} \setminus X^\circ$ hranice

Př. $(P, \rho) = (\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x - y|)$

$X = \langle a, b)$ $\quad \overline{X} = \langle a, b\rangle \ldots$ neboť $x_0 \in \langle a, b) \ldots x_n = x_0, n \in \mathbb{N}$

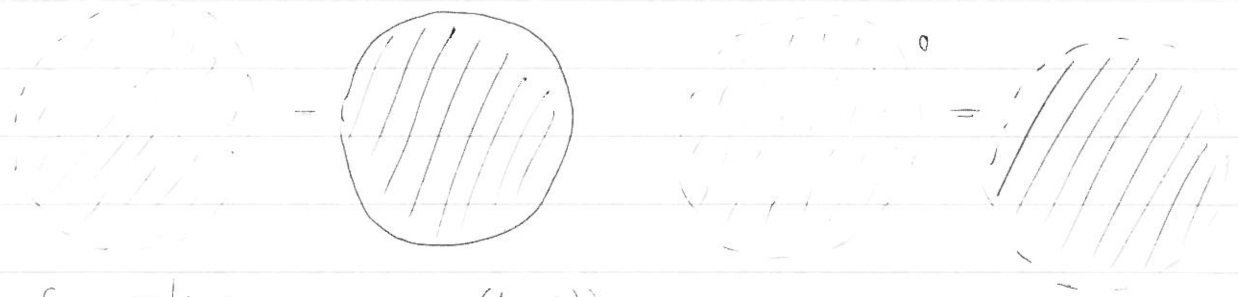
$x_0 = b \ldots \quad x_m = b - \frac{1}{m}, \; m \in \mathbb{N}, \quad x \in X$

$X^\circ = (a,b)$. Proč $a \notin X^\circ$? [illegible]

$\lightning \; a \in X^\circ \Rightarrow \exists \delta \;\; U(a,\delta) \subseteq \langle a,b)$ nelze neb $(a-\delta, a+\delta) \subseteq \langle a,b)$ pro "žádné" δ

$\partial X = \overline{X} \setminus X^\circ = \langle a,b\rangle \setminus (a,b) = \{a,b\}$

Ilustrace:



$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1 \text{ nebo } x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

$\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$

$M^\circ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$

$\partial M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} = \overline{M} \setminus M^\circ$

Úplnost ... když se 2 věci k sobě přibližují tak existuje bod ke kterému se přibližují

Věta 2.28 Banachova o pevném bodu

Nechť (X, ρ) je úplný a $f: X \to X$ je spojité. Pokud f je kontrakce, tj. $\exists L < 1$, že $\forall x,y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \leq L\rho(x,y)$, pak f má pevný bod, tj. $\exists x_0 \in X$, že $f(x_0) = x_0$ a navíc tento bod je jediný.

Dk: 1, Jednoznačnost:

Nechť pro $\lightning$ $\exists x_0, y_0$, $f(x_0) = x_0$, $f(y_0) = y_0$ a $x_0 \neq y_0$. Z def. kontrakce (z věty)

$\rho(f(x_0), f(y_0)) \leq L\rho(x_0, y_0)$

$\rho(x_0, y_0) \leq L\rho(x_0, y_0)$

$0 \leq \underbrace{(L-1)}_{<0} \rho(x_0, y_0) \quad / : (L-1)$ (tj. dělím a změním nerovnost)

$0 \geq \rho(x_0, y_0) \Rightarrow \rho(x_0, y_0) < 0$ $\lightning$ s def. metriky

$\overset{\vee}{\Rightarrow} \rho(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$ $\lightning$ s pp. že body jsou různé

def metriky

2, Existence

$x_1 \in X$ lib.

zvednul si tabuli a pak si dole stahnul tu samou (A)

$x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \dots, x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}$

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyova p. neboť $c = \rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, f(x_1))$

I)

$\rho(x_2, x_3) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \le L\rho(x_1, x_2)$

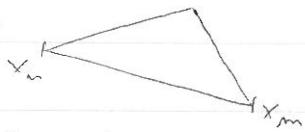
$\rho(x_3, x_4) = \rho(f(x_2), f(x_3)) \le L\rho(x_2, x_3) = L^2 c$

$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le L\rho(x_{n-1}, x_n) = L\rho(f(x_{n-2}),$

$m > n$

$f(x_{n-1})) \le L^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \dots \le L^{n-1}\rho(x_1, x_2) = L^{n-1} c$

II) $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_{n+1}, x_n) + \dots + \rho(x_m, x_{m-1}) \le cL^{n-1} + \dots + cL^{m-2} \overset{*}{=}$



NEBOŤ:

$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_m) \le$

$\rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_m) \le$ atd.

$\overset{*}{=} cL^{n-1}\underbrace{(1 + \dots + L^{m-n-1})}_{\le 1 + L + L^2 + \dots} \le c\dfrac{L^{n-1}}{1-L}$

III) $\lim\limits_{n\to\infty} c\dfrac{L^{n-1}}{1-L} = c \cdot 0 = 0$ neboť $L \in \langle 0, 1)$ (když $L = 0$, do všechny body do 1)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0.\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \ge n_0$

def. limity plus II)

b) Z úplnosti $X \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je nejen Cauchyovská ale má i limitu. Označím ji x_0.

Tvrdím, že x_0 je hledaný pevný bod. Ano neboť

$x_n \longrightarrow x_0 \quad / f$

$f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ (Heineho charakterizace)

$x_{n+1} \quad x_{n+1} \longrightarrow x_0 \quad / f$

Formálně: $f(x_n)$ má limitu $f(x_0)$ neb x_{n+1} má limitu $f(x_0)$ neb $x_{n+1} = f(x_n)$

x_n má limitu x_0 (def x_0)

$\Rightarrow x_0 = f(x_0)$ ∎

Napsal $\Rightarrow x_0 = f(x_0)$, tj. $x_0 = f(x_0)$ (A)

pověděl že 40% českých studentů se věnuje 18 19 jak na to jdou a pak „Pamatujte si odpustím" (A)

<u>Definice 2.22</u> $X \subseteq (P, \rho)$ nazveme kompaktní, pokud $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \ \exists$ vybraná $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ z $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jež má limitu v X

Př. 1, $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní z Bolzano-Weierstrassovy věty + ~~…~~ limitní přechod v nerovnost

$x_n \leq b \Rightarrow \lim x_n \leq b$)

pokud $x_n < b$ tak v lim. se ostrost zachovat nemusí

2, Není kompaktní $\langle a,b)$

$b_n = b - \frac{1}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \notin \langle a, b)$

3, $\mathbb{R}$ není kompaktní

$x_n = n, n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim x_n = +\infty \notin \mathbb{R}$ a každá vybraná má lim $+\infty$

<u>Pozn.</u> 1, $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní $\Leftrightarrow$ A omezená a uzavřená

2, $f: X \to \mathbb{R}$ $A \subseteq X$ kompaktní

f sp. $\Rightarrow$ f omezená na A, f nabývá min i max na A

3, A omezená v $(P, \rho) \overset{def}{=}$ $\exists x_0, \exists R$, že $A \subseteq U_R(x_0)$

Matematická analýza

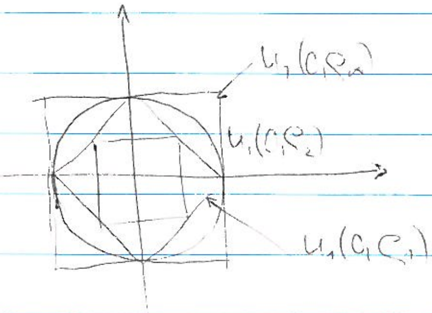
10.4.2013

Kapitola 3 - Obyčejné diferenciální rovnice

Pozn: $\mathbb{R}^n$, $\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, $\rho_2(x,y) = \left(\sum_{l=1}^{n} |x_l - y_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\rho_\infty(x,y) = \max_{l \in 1,..,n} |x_l - y_l|$

• otevřené v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k ρ_N jsou stejné $N = 1,2,\infty$

v $\mathbb{R}^2$



3.1. Obecná tvrzení

Definice 3.23

Buď $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřený, $F: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$. Pak rovnici $F(t,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ (*) nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí.

Řešení ODR je funkce $y: I \to \mathbb{R}$ taková, že $I \subset (a,b)$ a $\forall t \in I: F(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(n)}(t)) = 0$.

Pozn. • Součástí definice řešení je jeho I

• Pp že všechny ty derivace $\exists$ „Další poznámka je poznámka 1. tohle jsou pozn. z tečky a to je pozn 1. :-)“ (A)

1, Je-li $F(t,z_0,\dots,z_n) = z_n - G(t,z_0,\dots,z_{n-1})$ řekneme, že (*) je vyřešená vzhledem k n-té derivaci ($y^{(n)} = G(t,y,\dots,y^{(n-1)})$)

2, F není konstantní v z_n říkáme že (*) má řád n, (*) je řádu n

3, Pokud není zadáno (a,b) a Ω, hledáme maximální

Př) $y' = y$, $F(t,z_0,z_1) = z_1 - z_0$

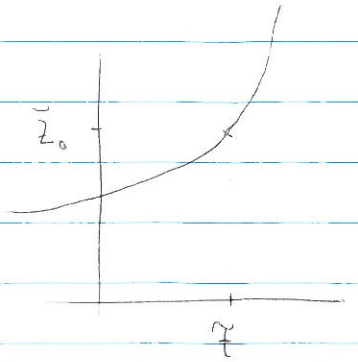
$(a,b) = \mathbb{R}$, $n = 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$y(t) = Ce^t$ je řešení na $\mathbb{R}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Definice 3.24

Je-li $(\tilde{t},\tilde{z}_0,\dots,\tilde{z}_n) \in I \times \Omega$, $y: I \to \mathbb{R}$ je řešení (*), řekneme, že y prochází bodem $(\tilde{t},\tilde{z}_0,\dots,\tilde{z}_{n-1})$ pokud $\forall k = 0,\dots,n-1: y^{(k)}(\tilde{t}) = \tilde{z}_k$

Je-li $y: I \to \mathbb{R}$ řešení (*), řekneme, že je maximální, pokud $\forall \tilde{y}: \tilde{I} \to \mathbb{R}$ řešení (*) takové, že $\tilde{I} \supset I$ a $\tilde{y}|_I = y \Rightarrow \tilde{I} = I$



zvolíme C takové aby ta fce procházela tím bodem

Pozn: • pokud $y_i : I_i \to \mathbb{R}$ řešením (*), $i = 1,2$. $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ a $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$. Pak $y_1|_{I_1 \cap I_2}$ je řešením na $I_1 \cap I_2$

• $y := \begin{cases} y_1 \text{ na } I_1 \\ y_2 \text{ na } I_2 \end{cases}$ Pak y je řešení na $I_1 \cup I_2$

• $C^k(\langle a,b\rangle)$, $C^k((a,b))$ $\quad \frac{1}{x} \in C^\infty((0,1)) \setminus C(\langle 0,1\rangle)$

prostor k-krát spojitě dif. fcí

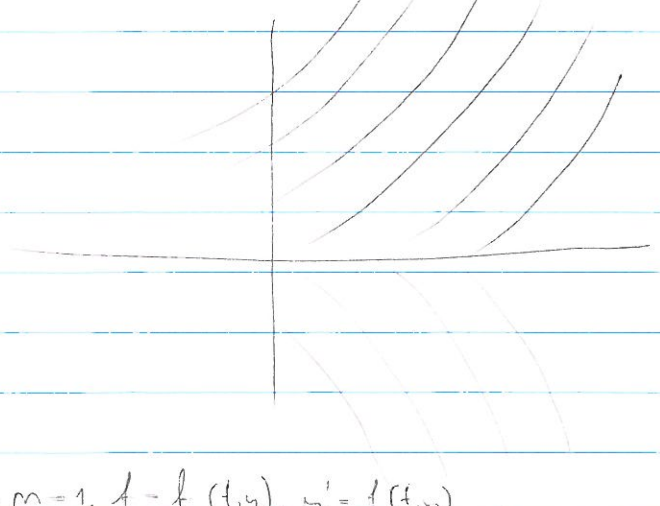
• $C^0(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ je spojitá na $\Omega \}$, tj. $\forall x \in \Omega$ je f spojitá na Ω v bodě x

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$

Věta 3.29 Peanova věta o existenci řešení ODR

Buď $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ otevřená, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ otevřený interval. $(\tilde t, \tilde z_0, \dots, \tilde z_m) \in (a,b) \times \Omega'$. $f : (a,b) \times \Omega' \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak existuje řešení $y : I \to \mathbb{R}$ rovnice $y^{(m)} = f(t, y, \dots, y^{(m-1)})$ procházející bodem $(\tilde t, \tilde z_0, \dots, \tilde z_{m-1})$

Př: $y' = y$ $\quad f(t,y) = y$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ každým bodem $(\tilde t, \tilde y) \in \mathbb{R}^2$ prochází řešení



Dk: Pro $m = 1$. $f = f(t,y)$, $y' = f(t,y)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = y'(t)$$

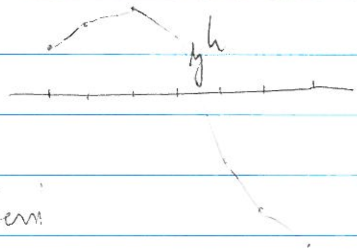
Fix $h > 0$: $y(t+h) - y(t) = h f(t, y(t))$

$$y(t+h) = y(t) + h f(t, y(t))$$

$t_0 = t'$; $y(t') = y(t_0) = \tilde{z}_0$

$t_k = t' + kh$; získám rekurentní vzorec

známe $y(t_k) \to y^h$



získám diskrétní hodnoty

Zbývá $y^h \xrightarrow[\text{stejn.}]{} y$ a y je hledané řešení

Založeno na Arzela-Ascoliho větě (charakterizace relativně kompaktních množin v $C(\Omega)$)

→ tomu se říká Eulerovo aproximační schéma

Definice 3.25

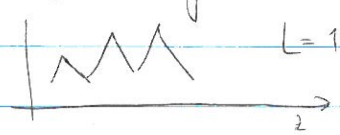
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, $f: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je lokálně lipschitzovská vzhledem k posledním m proměnným pokud $\forall (\tilde{t}, \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{m-1}) \subset (a,b) \times \Omega$

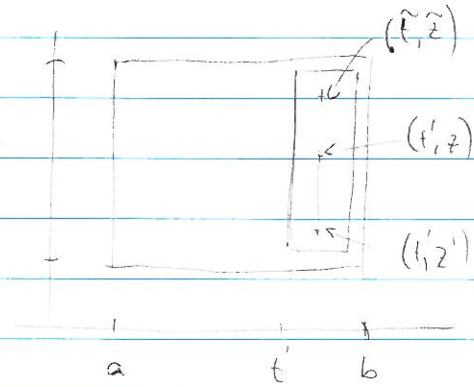
$\exists U \subset (a,b) \times \Omega$, $(\tilde{t}, \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{m-1}) \subset U$ ot., $L > 0$

$\forall (t', z_0', \dots, z_{m-1}'), (t', z_0, \dots, z_{m-1}) \in U$ platí $|f(t', z_0', \dots, z_{m-1}') - f(t', z_0, \dots, z_{m-1})| \le L \|z - z'\|_1$

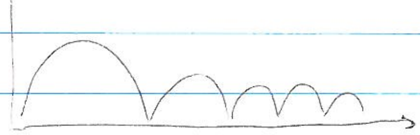
$\|z - z'\|_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |z_k - z_k'| = \rho_1(z, z')$

zuby omezeny





není omezená odmocnina, ani odmocninové zuby



Pozn. Má-li f v $(a,b) \times \Omega$ spojité parciální derivace, je lokálně lipschitzovská

pro $m = 1$ $f = f(t, z_0)$ $|f(t, z_0) - f(t, z_0')| = \left|\frac{\partial f}{\partial z_0}(\xi)(z_0 - z_0')\right|$ ξ mezi z_0, z_0'

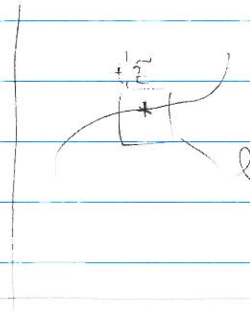
↳ je to omezené na U

Věta 3.30 Picard-Lindelöfova věta

Ať navíc k předpokladům Peanovy věty platí, že f je lokálně lipschitzovská na $(a,b) \times \Omega$.

Pak je řešení y procházející $(t', \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{m-1})$ určeno lokálně jednoznačně.

Tj. pokud y a $\tilde{y}$ řešení prodloužení $(t', \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{n-1})$ s definičními intervaly I a $\tilde{I}$, pak $y = \tilde{y}$ na $\tilde{I} \cap \hat{I}$



to řešení se nemůže v tom bodě větvit

lokálně lipschitzovské $\Longrightarrow$ řešení je jednoznačné

<u>Dk:</u> • převést rovnici n-tého řádu na systém 1. řádu, $n = 1$

$$y' = f(t,y) \text{ na } I$$
$$y(t') = y_0$$
$$\underset{\text{uvažuj}}{\Longleftrightarrow} \quad y(t) = y(t') + \int_{t'}^{t} f(s, y(s))\, ds = \Phi y(t)$$

$$\Phi : C(\bar{I}) \to C(\bar{I}),\ \Phi y(t) = y_0 + \int_{t'}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

Víme: 1, $C(\bar{I})$ je úplný metrický prostor s metrikou $\rho_\infty(y,z) = \max_{\bar{I} \ni x} |y(x) - z(x)|$

am. U4

2, uzavřený podprostor úplného metrického prostoru je úplný metrický prostor

$M^\alpha = \{z \in C(\bar{I});\ \forall x \in \bar{I},\ z(x) \in \langle y_0 - \alpha, y_0 + \alpha \rangle\}$ je úplný metrický prostor

Chceme: $\alpha > 0$, $\bar{I} = (t' - \beta, t' + \beta)$ tak aby $\Phi : M \to M$ bylo kontrakce

A, $\forall z \in M \ \Phi z \subset M$

$$|\Phi z(x) - y_0| \le \int_{t'}^{t} |f(s, z(s))|\, ds \le C \underbrace{|t - t'|}_{2\beta} \overset{\text{volba } \beta}{\le} \alpha$$

B, $\forall z, \tilde{z} \subset M$ $$|\Phi z(x) - \Phi \tilde{z}(x)| \le \left| \int_{t'}^{t} |f(s, z(s)) - f(s, \tilde{z}(s))|\, dS \right| \le |t - t'| L \rho_\infty(z, \tilde{z})$$

konst. lipschitzovskosti

$$\rho(\Phi z, \Phi \tilde{z}) \le \underbrace{\beta L}_{<1} \rho_\infty(z, \tilde{z})$$

Věta Banachova o pevném bodě □

Matematická analýza

11. 4. 2013

$y' = f(t),\ t \in (a,b)$

y řešení $\longleftrightarrow$ y je p.f. k f v (a,b)

existence: $f(t)$ spojitá $\Longrightarrow \exists$ p.f. (teorie Riemannova integrálu)

jednoznačnost: $y_1, y_2 \ldots$ řešení v (a,b)

$$(y_1 - y_2)' = f - f = 0$$

Lemma 3.31

$\exists C \in \mathbb{R}$ takové, že $y_1 - y_2 = C$ v (a,b) (věta o skládání konstanty)

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists!\ \text{řešení}$$

Definice 3.26

$y' = g(y) f(t)$ se nazývá rovnice se separovanými proměnnými

Věta 3.32

Nechť $f(t)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J, kde $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly. Nechť $F(t), G(y)$ jsou primitivní fce k $f(t)$, $1/g(y)$ v I, J. Nechť $\tilde{I} \subset I$, $c \in \mathbb{R}$ jsou takové, že $F(t) + c \subset G(J)$ pro $\forall x \in \tilde{I}$. Pak $y(t) := G^{-1}(F(t) + C)$, $t \in \tilde{I}$ je řešení.

Dk: $f(t), \frac{1}{g(y)}$ spojité $\Longrightarrow \exists$ primitivní fce $F(t), G(y)$, v I, J

$\frac{1}{g(y)}$ spojitá a nerovna nule $\Longrightarrow$ buď >0 nebo <0 v intervalu J

$\parallel$

$G'(y) \Longrightarrow$ ryze monotónní v J

$\Longrightarrow \exists\ G^{-1} : G(J) \longrightarrow J$

$(G^{-1})' = \dfrac{1}{G' \circ G^{-1}}$ (věta o derivaci inverzní fce V 2.15)

nechť $y(t)$ je podle pp věty

$$y'(t) = (G^{-1}(F(t) + C))' = \underset{\uparrow}{G^{-1\,\prime}}(F(t)+C)\,(F(t)+C)' = F'(t) = f(t)$$

derivace složené fce

$$= \frac{1}{G'(\underbrace{G^{-1}(F(t)+C)}_{y(t)})} = \frac{1}{\underset{\frac{1}{g}}{\underset{\parallel}{G'}}(y(t))} = g(y(t))$$

tj. $y'(t) = g(y(t)) \cdot f(t)\quad \forall t \in \tilde{I}$ $\boxtimes$

Př. $y' = 2\sqrt{|y|}\quad g(y) = 2\sqrt{|y|},\ f(t) = 1$

volme $J = (0, +\infty)$; $I = \mathbb{R}$ tj. hledáme řešení $y : I \to J\quad \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$(-\infty, 0)$

$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{|y|}$ $\qquad \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = dt \quad \Big| \int$

$\int \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = t + C^*$ $\quad *$

formální $\quad y' = g(y)\, f(t)$

$\frac{dy}{dt} = g(y)\, f(t)$

$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt \quad \Big| \int$

$G(y) = F(t) + C$

$*$

$\sqrt{y} = t + C$

$\in (0, \infty)$ → to to musí $|y| > 0$ $\qquad C \in \mathbb{R}$ dáno. hledej (maximální) $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ takový že $t + C > 0 \ \forall t \in \tilde{I}$

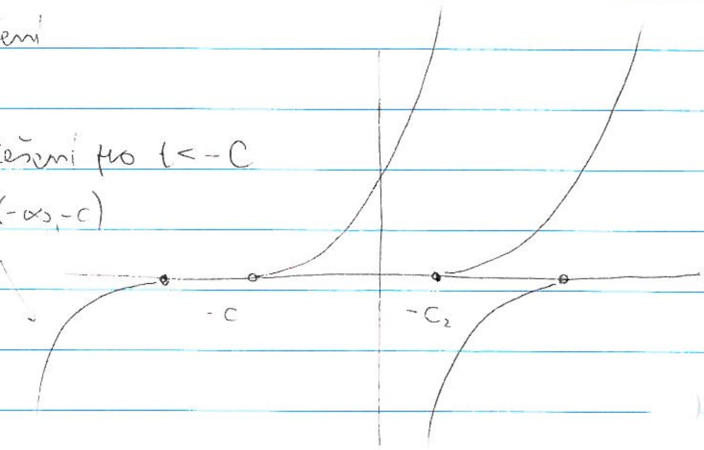
$\tilde{I}_C = (-C, +\infty)$ $\qquad y(t) = (t+C)^2,\ t \in \tilde{I}_C$ je řešení

Pozor: $y(t) = (t+C)^2$ NENÍ řešení pro $t < -C$

analogicky: $J = (-\infty, 0)$: $y(t) = -(t+C)^2,\ t \in \tilde{I}_C = (-\infty, -C)$

později: $y(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ je řešení

(stacionární, singulární)

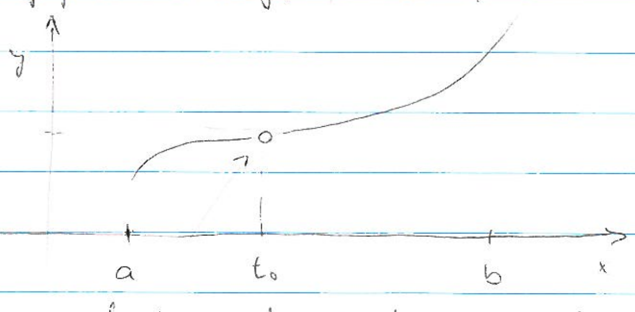


Lemma 3.33 O napojování

Nechť $y_1(t) : (a, t_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(t) : (t_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení $y' = f(y,t)$. Nechť $\lim_{t \to t_0} y_1(t) = \lim_{t \to t_0} (y_2(t)) = y_0$. Nechť $f(y,t)$ je spojitá v bodě (y_0, t_0). Potom fce

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in (a, t_0) \\ y_0, & t = t_0 \\ y_2(t), & t \in (t_0, b) \end{cases}$$

je řešení dané rovnice na intervalu (a, b)



fci tu dodefinuji a fce tam má limitu

Dk: chceme $y'(t) = f(y(t), t)$, $t \in (a, b)$

$t \neq t_0$ zřejmé $\quad y'(t) = y_1'(t)$

$= y_2'(t)$

Zbývá zjistit derivaci v $t_0 = t_c$ Věta: $y(t)$ spojitá v t_0, $y'(t)$ $\exists$ v ryzím $P_\delta(t_0)$

$$\lim_{t \to t_0} y'(t) = L$$
$$\Downarrow \quad y'(t_0) = L$$

(Dk. pomocí Lagrangeovy věty o SH)

$$\Rightarrow \quad y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} y'(t) \quad \text{pokud tato limita } \exists$$
$$\overset{\text{rovnice je splněna mimo } t=t_0}{=} \lim_{t \to t_0} f(y(t), t) \overset{\text{spojitost } f, y}{=} f(y(t_0), t_0)$$

$\square$

Př. $y' = 2\sqrt{|y|}$ dokončení

$y_1(t) = (t+c)^2; \ t \in (-c, +\infty)$

$y_2(t) = 0; \ t \in (-\infty, -c)$

aplikace Lemmatu 3.33: $t_0 = -c$, $y_0 = 0$

$f(y, t) = 2\sqrt{|y|}$ spojitá

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} (c+t)^2, & t > -c \\ 0, & t \leq -c \end{cases} \quad \text{je řešení}$$

Pozn: obecný postup řešení (S) $y' = g(y) f(t)$

① Hledám body, kde $g(y_c) = 0$: $y(t) \equiv y_c$ řešení na $\forall$ I kde $f(t)$ je definováno
↳ stacionární řešení

② Aplikuji ~~Lemma~~ Větu 3.32, hledám řešení $y: I \to J$, $f(t)$.. spoj. v I
$g(y)$.. spoj. $\neq 0$ v J

③ Nalezená řešení nalepuji pomocí Lemmatu 3.33
$\Rightarrow$ všechna maximální řešení

Definice 3.27

Lineární rovnicí 1. řádu rozumíme $y' + a(t) y = b(t)$ (L1).

Tato rovnice se řeší:

Věta 3.34 O řešení L1

Nechť $a(t)$, $b(t)$ jsou spojité v I. Nechť $A(t)$, $B(t)$ jsou primitivní fce k $a(t)$, $b(t) \cdot \exp(A(t))$.
Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak $y(t) = \exp(-A(t)) [c + B(t)]$ je řešením L1. Naopak, každé řešení L1 je takového tvaru.

Dk: ekvivalentní úpravy: $y'(t) + a(t) y(t) = b(t) \quad / \cdot e^{A(t)}$

$$y'(t)e^{A(t)} + \underbrace{a(t)e^{A(t)}}_{e^{A(t)}}y(t) = b(t)e^{A(t)}$$

$$\underbrace{y'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}y(t)}_{\left(y(t)e^{A(t)}\right)'} = \underbrace{b(t)e^{A(t)}}_{B'(t)} \Rightarrow \left(y(t)e^{A(t)}\right)' = B'(t)$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \quad y(t)e^{A(t)} = B(t) + C$$

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[B(t) + C\right]$$

$\square$

Pozn: Toto se nazývá integrační faktor – vynásobím to něčím vhodným aby se z toho stala derivace a já to mohla zintegrovat

Př: (1) $ty' - 3y = t^4 \quad / \cdot \frac{1}{t} \ldots (0, +\infty)$ nebo $(-\infty, 0)$

(2) $y' - \frac{3}{t}y = t^3$

$a(t) = -\frac{3}{t}; \quad A(t) = \int -\frac{3}{t}\, dt = -3\ln(t) + \cancel{c}$

stačí nějaká prim fce, nepotřebujeme všechny proto konst. zahodím

integrační faktor $e^{-3\ln(t)} = \frac{1}{|t|^3}$

lze mít int. faktor $\frac{1}{t^3}$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{t^3} + y\underbrace{\left(\frac{-3}{t^4}\right)}_{(t^{-3})'} = 1$$

$(y \cdot t^{-3})' = 1 = t'$

$y t^{-3} = t + C \quad / \cdot t^3$

$y = t^4 + ct^3$ obecné řešení (2) v $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

též řešení (1) v těchto intervalech

(1) splníme též v bodě 0

obecnější $y(t) =$
- $t^4 + c_1 t^3, \quad t < 0$
- $0, \quad t = 0$
- $t^4 + c_2 t^3, \quad t > 0$

je řešení (1)

Definice 3.28

$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ se nazývá Bernoulliho rovnice

Řešení: $z(t) = y(t)^{1-\alpha} \rightsquigarrow$ L1

Matematická analýza

14. 4. 2013

$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ .. obecná diferenciální rovnice n-tého řádu řešení vzhledem k derivaci

1, Věta o existenci řešení procházejícího bodem

2, Věta o jednoznačnosti řešení procházejícího bodem (Picard-Lindelöf) .. f je lipschitzovská

3 Speciální lineární $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$

$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$ .. vývoj systému v čase (fyzikálního)

Definice 3.29

Systémem ODR 1. řádu rozumíme rovnici $x'(t) = F(t, x(t)), t \in I$ kde $x : I \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení a $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení

Pozn. značíme $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$x^i : t \mapsto x^i(t), I \to \mathbb{R}$ zobrazení

$\dot{x}(t) := (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in I$ definice derivace vektor-hodnotové fce

$F(t, x^1, \ldots, x^n) = (F^1(t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, F^n(t, x^1, \ldots, x^n))$

$F = (F^1, \ldots, F^n)$

Spec. a důležitý (nejčastější). F nezávisí na t a je lineární v $\mathbb{R}^n$ ve smyslu $\exists G$ $F(t, x^1, \ldots, x^n) = G(x^1, \ldots, x^n)$ $\forall t \in I$ a $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení v.p. $\mathbb{R}^n$ do v.p. $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$)

Eventuelní jsou hodnoty v $\mathbb{C}^n$, tj. $x(t) \in \mathbb{C}^n$, $F(t, x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^n$ $\forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$

$F(t, -) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ .. rodina zobrazení, nebo spojitá rodina zobrazení

↳ parametr t je spojitý. $I \subseteq \mathbb{R}$ (není to diskrétní)

Věta 3.35

Pokud $x : I \to \mathbb{R}$ řeší $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$, pak $z : I \to \mathbb{R}^n$ definované předpisem $z^1(t) = x(t), z^2(t) = x'(t), \ldots, z^n(t) = x^{(n-1)}(t)$ řeší systém

$$\begin{pmatrix} \dot{z}^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Dk: Zjevně víme: $\dot{z}^1(t) = x'(t) = z^2(t)$ což odpovídá předpisu řešení soustavy

$\dot{z}^2(t) = x''(t) = z^3(t)$ — " —

atd.

$z^{n\prime}(t) = [x^{(n-1)}]'(t) = x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ což odpovídá řešení soustavy ∎

Věta 3.35'

Nechť $z: I \to \mathbb{R}^n$ řeší soustavu z předchozí věty, kde $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je nějaká pevně zvolená fce. Pak $x(t) := z^1(t)$ řeší $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ kde $z(t) = (z^1(t), z^2(t), \dots, z^n(t))$.

Dk: triv., stejně.

$x^{(n)}(t) = (z^1)^{(n)}(t) = \dots$ doma

$\overset{\text{def.}}{=} [(z^1)']^{(n-1)}(t) \overset{\text{soust.}}{=} (z^2)^{(n-1)}(t) = [(z^2)']^{(n-2)}(t) = (z^3)^{(n-2)}(t) = \dots =$

$(z^{n-1})^{(n-n+1)}(t) \overset{\text{soust.}}{=} (z^{n-1})'(t) = z^{n\prime}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$

Pozn: ehm. co?

3.1 Lineární (obyčejné) diferenciální rovnice

Definice 3.30:

Nechť $a_k \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$, $k = 0, \dots, n$, $f \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$. Pak rovnici $\sum_{k=0}^{n} a_k(t) x^{(k)}(t) = f(t)$ nazveme obyčejnou lineární rovnicí, pokud navíc $a_n \neq 0$, pak rovnici nazveme OLDR n-řádu

Pozn: $\mathcal{C}^{(k)}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}/\mathbb{C}, f$ má spojitou k-tou derivaci na $I\}$

Věta 3.36 O globálním řešení, pro spojité fce na int. I

Nechť $a_0, \dots, a_n, f \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$ a nechť $(\forall t \in I)(a_n(t) \neq 0)$ a nechť je $(x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ libovolný. Pak $\exists! x : I \to \mathbb{R}$ řešící $\sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t)$ a procházející bodem $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, tj. $x^{(k)}(t_0) = x_0^k$, pro $t_0 \in I$

Dk: vynecháme viz Jarník V. (Rovnice v kplx. oboru)

systém: převedeme soustavu a řešení soustavy mocninnými řadami s více proměnnými

$\sum_{(i_j)} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$

Těžší: Jak víme, že každé řešení je analytické (= lze vyjádřit jako součet mocninné řady)

analytičnost.. fce je součtem své mocninné řady

Věta 3.37

Nechť $a_k \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$, $k=0,\dots,m$, $f \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$, spojité a $a_m(t) \neq 0$ $\forall t \in I$. Pak řešení $\sum_{k=0}^{m} a_k x^{(k)} = 0$ tvoří m-rozměrný vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$).

Dk: Označme $L: \mathcal{C}^{(m)}(I) \to \mathcal{C}^{(0)}(I)$

m-krát dif. fce   spojité fce

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{(k)}, \; x \in \mathcal{C}^{(m)}(I)$$

Pozn: řešení f ~~nestačí~~ netvoří lineární prostor ale afinní ⇒ proto nemá smysl kvantifikovat

Zjevně L je lineární zobrazení ($\mathcal{C}^{(k)}(I)$ tvoří v.p., viz minulý semestr)

- $L(x_1 + x_2) \underset{\text{def } L}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k (x_1 + x_2)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} (a_k x_1^{(k)} + a_k x_2^{(k)}) \underset{\text{derivace součtu}}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k x_1^{(k)} + \sum_{k=0}^{m} a_k x_2^{(k)} = L(x_1) + L(x_2)$
- $L(rx) = \sum_{k=0}^{m} a_k (rx)^{(k)} = \dots = r L(x)$ $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{C}^{(m)}(I)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}^{(m)}(I)$

→ Řešení $\sum_{k=0}^{m} a_k x^{(k)} = 0$ je totéž co $\operatorname{Ker} L$. ⇒ z lineární algebry $\operatorname{Ker} L$ je v.p.

Definujme $\Phi: \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}^{(m)}(I)$, $t_0 \in I$

$$\Phi(x^1, \dots, x^m) = y, \text{ jež řeší } \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{(k)} = 0 \text{ a zároveň } y(t_0) = (x^1, \dots, x^m) \qquad (*)$$

(korektnost def Φ - $\exists y$?, ano viz V3.36, unicita, ano viz V3.37)

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}^{(m)}(I) \xrightarrow{L} \mathcal{C}^{(0)}(I)$$

$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker} L$?

- $\operatorname{Ker} L \subseteq \operatorname{Im}\Phi$: $x \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow L(x) \Rightarrow x$ řeší homogenní, zvol $(x^1, \dots, x^m) = (x(t_0), \dots, x^{(m)}(t_0))$ pro nějaké $t_0 \in I$. Zjevně $\Phi(x^1, \dots, x^m) = x$
- $\operatorname{Im}\Phi \subseteq \operatorname{Ker} L$, triv. z def. Φ (Φ dá vždy řešení)

$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker} L$. Avšak nejenže $\Phi: \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}^{(m)}(I)$, ale Φ je injektivní (m c rozložení na 0, tj vektory jsou LN, a bázi mi odpovídá bázi) neboť $\Phi(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y(t_0) = 0 \Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow y^{(m)}(t_0) = 0 \overset{+(*)}{\Rightarrow} x = 0$$

$\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Im}\Phi = m$. (injektivní obraz zachovává dimenzi)

Matematická analýza

18. 4. 2013

Minule: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}^{(n)}(I) \xrightarrow{L} \mathcal{C}^{(0)}(I)$

Φ přiřadilo „poč. podm." řešení jimi procházející

$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker} L$

Pozn. $0 \xrightarrow{0} U \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} W \xrightarrow{0} 0$

$\operatorname{Im} 0 = \operatorname{Ker}\Phi \wedge \operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker}\Psi \wedge \operatorname{Im}\Psi = \operatorname{Ker} 0$

$\Rightarrow$ krátká exaktní posloupnost

$\operatorname{Ker}\Phi = 0 \wedge \operatorname{Im}\Psi = W \Rightarrow \Phi$ je injektivní $\wedge$ Ψ je surjektivní

$\dim \operatorname{Im}\Phi = n \wedge c$ Φ víme že je injektivní

Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze $\mathbb{R}^n \Longrightarrow \{\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)\}$ je báze $\operatorname{Im}\Phi$

a) $a \in \operatorname{Im}\Phi \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n, a = \Phi(b)$

$a = \Phi(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Phi(e_i) \Rightarrow a \in \langle\langle \{\Phi(e_i), i = 1, \dots, n\} \rangle\rangle$

$c_i \in \mathbb{R}$

b) $\lightning$ $\exists d_i \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=0}^{n} d_i \Phi(e_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \Phi(d_i e_i) = 0 \Rightarrow \Phi(\sum d_i e_i) = 0 \Rightarrow$

$\sum d_i e_i = 0$ $\lightning$ $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ je báze

Pozn. Víme, že lineární rovnice s nulovou pravou stranou má za řešení n-dim. vektorový prostor

($p.p.$ $a_i \in \mathcal{C}^{(0)}(I), i = 0, \dots, n$).

Věta 3.32

Nechť $a_i \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$, $f \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$, $i = 0, \dots, n$ a nechť $y_p \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$ je řešením $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = f$.

Pak prostor všech řešení této rovnice je tvaru:

$$\mathcal{V}_f = \{ y_p + y \mid y \text{ řeší (homogenní) rovnici } \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0 \}$$

Pozn. Aplikace Frobeniovy věty!

$\mathcal{V}_f$ není v.p. (proto v uvozovkách) obecně *

Dk: $\Rightarrow$) $y_p + y \in \mathcal{V}_f \overset{\text{řeší}}{\Longrightarrow} L(y_p + y) = L(y_p) + L(y) = f + 0 = f$

$\Leftarrow$) $\tilde{y}$ řeší $L(\tilde{y}) = f$ $y = y_p + (\tilde{y} - y_p) \wedge L(\tilde{y} - y_p) = L(\tilde{y}) - L(y_p) = f - f = 0$

položíme $y = \tilde{y} - y_p$, toto je řešení homogenní (víz 7 slov výš. (A))

$\square$

Pozn. * $y_p + y_1 \in \mathcal{V}_f$, $y_p + y_2 \in \mathcal{V}_f$

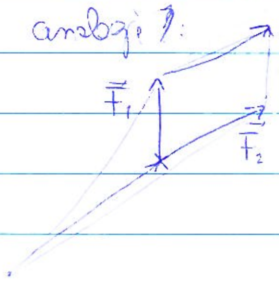
$(y_p + y_1) + (y_p + y_2) = 2y_p + \underbrace{y_1 + y_2}$

$\in \operatorname{Ker} L$ ($\Leftrightarrow$ řeší $L(y) = 0$, ale $2y_p$ neřeší $L(y) = f$

if $f \neq 0$, obecně)

neb $L(2y_p) = 2L(y_p) = 2f \neq f$.

analogie ↗:



Prostorům typu V_f se říká afinní (s vrcholem y_p)

ve vektorovém prostoru VŠE VYCHÁZÍ Z POČÁTKU

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = a + f_1 + f_2$

kde $\vec{F}_1 = a + f_1$

vzdálenost od počátku směr

$\vec{F}_2 = a + f_2$

- afinní jsou rovnice s pravou stranou!

Ale $F_1 + F_2 \neq 2a + f_1 + f_2$

- posunutí není lineární zobrazení

$T : X \longmapsto X + a$, a fixní vektor

$T(x+y) = x + y + a \neq x + y + 2a = x + a + y + a = T(x) + T(y)$

Definice 3.31 Wronskián, Wronského determinant

Nechť $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{C}^{(m-1)}(I)$. Pak

$$W(f_1, \dots, f_m) = \left| \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_m \\ f_1' & & f_m' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & & f_m^{(m-1)} \end{pmatrix} \right|$$

nazveme wronskián.

Pozn: Jde o nadčinu determinantů, nebot $t \longrightarrow \left[W(f_1, \dots, f_m)(t) \right]$, $t \in I$

Př: $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R} = I$

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1, \quad t \longmapsto -1$$

Definice 3.32 (analog z LA)

Funkce $f_1, \dots, f_m$ nazveme lineárně nezávislé, pokud $\forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i = 0 \iff c_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, m$

Jinak je nazveme lineárně závislé.

Věta 3.39

Pokud jsou $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{C}^{(m-1)}(I)$ lineárně závislé $\implies$ $W(f_1, \dots, f_m)(t) = 0 \ \forall t \in I$.

Dk:

$\det\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & & f_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = ?$ $\quad \{f_i\}_{i=1}^{n}$ je LZ $\Rightarrow \exists c_i \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=0}^{n} c_i f_i = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i f_i = 0 \;/^{(j)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i f_{i(t)}^{(j)} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ sloupce $\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_1'(t) \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_n(t) \\ f_n'(t) \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ jsou LZ $\Rightarrow \det\begin{pmatrix} | & \dots & | \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} 0 - W$

Pozn: Lineární závislost fcí zjišťujeme pomocí wronskiánu

Př: Nelze "obecně" obrátit směr:

$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ t^2, & t < 0 \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$W(f_1, f_2)(t) = \begin{cases} t \geq 0 & \begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{vmatrix} = 0 \\ t < 0 & \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$ $\quad$ Je tedy $\{f_1, f_2\}$ je závislý?

↯ nechť je LZ. $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, že $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \Rightarrow$ pro $t=1$ je $c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) = 0$

$c_1 \cdot 0 + c_2 1^2 = c_2 = 0$

pro $t = -1$ je $c_1 f_1(-1) + c_2 f_2(-1) = 0$

$c_1(-1)^2 + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ tj. jediná nulová

LK je triviální směr $\{f_1, f_2\}$ je LN, byť W vyšel 0.

Věta 3.40

Nechť $a_0, \dots, a_n \in C^{(0)}(I)$ a nechť $x^1, \dots, x^n : I \to \mathbb{R}$, $x^i \in C^{(n)}(I)$ jsou řešeními rovnice $L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$. Pak $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ je LZ $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I$, že $W(x^1, \dots, x^n)(t_0) = 0$

Dk: $\Rightarrow$ viz V3.39

$\Leftarrow$ $\exists t_0 \in I$, že $W(x^1, \dots, x^n)(t_0) = 0$ ①

Jelikož x^i řeší $\to \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = f(t)$ řeší $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ③

Nechť x^i jsou LN. Uvažme $(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0))$ ⑤ $\quad$ ④ ↯ s ⑤

$f^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x^i)^{(j)}(t) = 0, \; j = 0, \dots, n-1$

4

$f^{(j)}(t_0) = 0 \wedge f$ je řešením rovnice $\underset{V3.34}{\Rightarrow} f \equiv 0$ (neb nulové řešení a unicita z V 3.34 dá $f \equiv 0$).
Má být jediné řešení a nulové je řešení

$\exists t_0 \in I \;\; W(x^1, \dots, x^n)(t_0) = 0 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} f_1(t_0) \\ f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_n(t_0) \\ f_n'(t_0) \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ jsou LZ. Původní $\begin{pmatrix} x^1(t_0) \\ (x^1)'(t_0) \\ \vdots \\ (x^1)^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^n(t_0) \\ (x^n)'(t_0) \\ \vdots \\ (x^n)^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ jsou LZ. vektory

2

a to je $\lightning$.

Matematická analýza

24. 4. 2013

Minule: $y_1, \dots, y_m$ řeší $L(y)=0 \iff \{y_1, \dots, y_m\}$ je lineárně nezávislá $\iff W(y_1, \dots, y_m) = 0$

Obecně (bez nutnosti $L(y)=0$): $\{y_1, \dots, y_m\}$ LZ $\Rightarrow W(y)(t) = 0$

obrácení ne, nelze obrátit

Definice 3.33

$\{x^1, \dots, x^m\}$ nazveme fundamentální systém řešení rovnice $L(x)=0$ ($L(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) x^{(i)}(t)$: $I \to \mathbb{R}$), pokud $\{x^i, i = 1, \dots, m\}$ je LN a $L(x^i)(t) = 0 \ \forall t \in I$

Poznámka:

Fundamentální systém ⤳ wronskián je NENULOVÝ (nutná podmínka)

!! Je-li $\{y_1, \dots, y_m\}$ F.S. $L(y)=0$ (asociované (přidružené) homogenní rovnice) k rovnici $L(y)=f$, pak $\forall$ řešení rovnice $L(y)=f$ je tvaru $y(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i + y_p$, kde y_p je libovolné řešení $L(y)=f$ (tedy partikulární)

Známe $L(y) = \sum_{i=0}^{m} a_i y^{(i)}$, $a_m(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Tj. speciální rce m-tého řádu má za F.S. právě m funkcí.

Proč pozn. platí? $N_f = \{y + y_p \mid y \in \operatorname{Ker} L\}$. Proč $y = \sum_{i=0}^{m} c_i y_i$ je takové řešení? (c_i jsou konst.)

neboť $L(y) = \sum_{i=0}^{m} c_i L(y_i) = \sum_{i=0}^{m} c_i 0 = 0$. Víme z minula, že $\operatorname{Ker} L \cong \mathbb{C}^m$ a $\{y_i\}$ jsou LN

Př. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ F.S. je $\left\{\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\right\}$ na $I = (0, +\infty)$

Dk: $\left(\frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2}\right)' + \frac{2}{x}\left(\frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2}\right) + \frac{\cos x}{x} = 0$

$\frac{(-\sin x - x\cos x + \sin x)\cancel{x^2} + 2x(\cancel{x}\sin x + \cos x)}{x^{4\,3}} = \dots$

$W = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \\ \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} & \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x^3} = \frac{1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow \left\{\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right\}$ je LN

0 neboť řeší soustavu $\Rightarrow \left\{\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right\}$ je F.S. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$

$\forall$ řešení rovnice je tvaru $y = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}$ $\quad \operatorname{Ker} L = \left\{c_1\left(\frac{\sin x}{x}\right) + c_2\left(\frac{\cos x}{x}\right) \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}\right\} \cong \mathbb{C}^2$

$\frac{\sin x}{x} \in \mathcal{C}^2((0, +\infty))$

Dosud F.S. nikdo dodal, pokud rovnice není lineární (viz přednáška doc. Pražáka)

⤳ počítání F.S. + hledání partikulárního

Pp. že F.S. nikdo opět dodá ⤳ musíme spočítat y_p.

Věta 3.41

$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = 0$ nechť je rovnice n-tého řádu a $a_n(t) \neq 0$, $\forall x \in I$. Nechť f je spojitá

a nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je F.S. $L(y)=0$. Pak $y_p = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) y_i(x)$, kde $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots$

prostory nad funkcemi!

lineární kombinace fcí $c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots$

$\dots + c_n'(x)y_n(x) = 0$, řeší $L(y) = f$.

$\dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_n(x)}$ (musí být čtvercová matice)

Dk: (derivováním)

$$y'(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j(x) y_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j'(x)y_j(x) + c_j(x)y_j'(x)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j'$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j'(x)$$

to je ta první rce F.S.

$$y''(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j'(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j'(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j''(x) = 0 + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j''(x) \quad \dots$$

$$y^{(n-1)}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j^{(n-2)}(x)}_{0} + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n-1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n-1)}(x)$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)} + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n)}(x)$$

$$L(y) \underset{(\text{def.})}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)\right)^{(k)} + \underbrace{\vphantom{|}}_{a_n(x) y^{(n)}(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(k)}(x) = \underbrace{\vphantom{|}}_{+ a_n(x) y^{(n)}(x)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_k(x) y_j^{(k)}(x) c_j(x) + a_n(x) \left[\frac{f(x)}{a_n(x)} + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n)}(x)\right] = f(x) + 0$$

Co?!

(napsal $= \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\dots \quad 0 \right) + f(x) = 0 + f$)

Pozn.:

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \left(\sum_{j=0}^{n} c_j(x) y_j(x)\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \left[\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)\right)^{(k)} + \left(c_n(x) y_n(x)\right)^{(k)}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j(x) \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_j^{(k)}(x)\right) + f(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

tvar toho wronskiánu

Pi. $\{y_1, \dots, y_m\}$ je F.S.

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_m} \end{pmatrix}$$

$y'' + 2y' + y = \sin x$ máme najít charakteristickou rovnici $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ je F.S. známe z 1 semestru

$$W = \left|\begin{pmatrix} e^{-x} & x \cdot e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix}\right| = e^{-2x} - xe^{-2x} + e^{-2x}x = e^{-2x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ z V 3.41 plyne, že $\{xe^{-x}, e^{-x}\}$ je F.S.

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x}x \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{sx}{1} \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} e^{-x} - xe^{-x} & -xe^{-x} \\ xe^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{sx}{1} \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} -xe^{-x} sx \\ e^{-x} sx \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$c_1' = e^x(-x) sx \Rightarrow -\int e^x x \, sx \, dx = c_1$

$c_2' = e^x sx \Rightarrow \int sx e^x \, dx = c_2$

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + c y_1(x) + d y_2(x) \quad c, d \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$$

variace konstant

minule $\{y_1, \dots, y_m\}$ je F.S. $\Rightarrow y = \sum c_i y_i$, c_i je funkce řešící $y_1 c_1' + \dots + y_m c_m' = 0$

$\vdots$

$y_1^{(m-1)} c_1' + \dots + y_m^{(m-1)} c_m' = \frac{f}{a_m}$

řeší $L_y = f$.

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_m' \end{pmatrix} = W^{-1} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_m} \end{pmatrix}}^{v}$$

$c_i = \int (W^{-1} v)_i \, dx = \int (W^{-1})_{ik} v^k \, dx + C_i \quad C_i \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

$y = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$

$y(x_0) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_0) y_i(x_0) = y_0$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\int (W^{-1})_{ik} v^k \, dx\right](x_0) y_i(x_0) + \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x_0) = y_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x_0) = y_{a} - \sum_{i=1}^{m} \overbrace{\int (W^{-1})_{ik} v^k dx}^{\text{číslo}}$$ je soustava lineárních rovnic pro C_i

3.3. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$\sum_{i=0}^{m} a_i y^{(i)} = f$, $a_i \in \mathbb{C}$ (od teď $y: I \to \mathbb{C}$, $f: I \to \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{C}$)

$L(y) = \sum_{i=0}^{m} a_i y^{(i)}$ $\quad a_m \neq 0$ rovnice se nazývá OLD konst. koef. řádu m

Lemma 3.42

$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$, kde $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in I$

Dk: $(e^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}, \forall x \in I$

$$L(e^{\lambda x}) = \sum_{m=0}^{m} a_m (e^{\lambda x})^{(m)} = \sum_{m=0}^{m} a_m \lambda^m e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} \quad \blacksquare$$

Definice 3.34

$P(\lambda)$ z lemmatu 3.42 se nazývá charakteristický polynom rovnice $L(y) = 0$ $(L(y) = f)$

Pozn: Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (m je řád rce $\sum_{i=0}^{m} a_i y^{(i)} = 0$) jsou navzájem různé kořeny rovnice $P(\lambda) = 0$.
Pak $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}\}$ je F.S. $L(y) = 0$

Dk: Zjevně (λ_0 je kořenem $P(\lambda) = 0$) je $L(e^{\lambda x}) = 0$, neboť $L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} P(\lambda) \Rightarrow L(e^{\lambda_0 x}) = e^{\lambda_0 x} P(\lambda_0) = 0$
λ_j : $L(e^{\lambda_i x}) = 0$

Dále je $\{e^{\lambda_i x}, i = 1, \dots, m\}$ F.S. tj. $\{e^{\lambda_i x} \mid i = 1, \dots, m\}$ jsou LN $\overset{}{\underset{V\,3.40}{\Longleftrightarrow}}$ $W(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x})(x) \neq 0$

$$W(\{e^{\lambda_i x} \mid i = 1, \dots, m\})(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_m x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & & \lambda_m e^{\lambda_m x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 x} & & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m x} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 x + \dots + \lambda_m x}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x}}_{\neq 0}$$

Vandermondův determinant	$\neq 0 \underset{L.A}{\Longleftrightarrow} \left(\approx \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)\right)$ $\lambda_i \neq \lambda_j \Leftarrow i \neq j$

Problém nastává pokud $P(\lambda)$ má násobné kořeny.

"Víme" $P(\lambda) = a_m(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$

$$\sum_{i=0}^{m} \nu_i = m$$

Jakmile vím, že $\exists \lambda_0$, že $P(\lambda_0)=0 \Rightarrow \lambda-\lambda_0 \mid P(\lambda) \overset{def}{=} P(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\,Q(x)$, odkud plyne "vime"
Těžké je dokázat, že $\exists \lambda_0$, že $P(\lambda_0)=0$
(4 semestr - analýza fcí kompl. proměnné - Liouvilleova věta)

Věta 3.43
Nechť $\sum_{i=0}^{m} a_i y^{(i)} = 0$ je rovnice m-tého řádu. Pak $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{\nu_1-1}e^{\lambda_1 x}$
$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{\nu_2-1}e^{\lambda_2 x}$
$\vdots$
$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{\nu_k-1}e^{\lambda_k x}\}$ je F.S. řešení této rci,
kde λ_i a ν_i jsou kořeny charakteristického polynomu $P(\lambda)$ a jejich multiplicity (násobnosti)

Dk: 1, $\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{\nu_i-1}e^{\lambda_i x}\}$ řeší $L(y)=0 \ \forall i=0,\ldots,k$.
a, if $\lambda_i=0$. Vím ν_i je násobnost nula $\Rightarrow P(\lambda)=\sum_{j=\nu_i}^{m} a_j\lambda^j = \lambda^{\nu_i}\left(\sum_{j=\nu_i}^{m} a_j \lambda^{j-\nu_i}\right) =$

$= \lambda^{\nu_i}\left(\sum_{j=0}^{m-\nu_i} a_{j+\nu_i}\lambda^j\right) \Rightarrow a_j=0 \ \forall j<\nu_i$, tj. rovnice $Ly = a_{\nu_i}y^{(\nu_i)}+\ldots+a_m y^{(m)}$,

jejíž řešení jsou $\{1, x, \ldots, x^{\nu_i-1}\}$ cbd
b, if $\lambda_i \neq 0$ hledejme řešení ve tvaru $y(x)=z(x)\cdot e^{\lambda x}$
$L(y(x)) = L(z(x)e^{\lambda_i x}) = e^{\lambda_i x}M(z(x))$, kde M je diferenciální operátor s konstantními koeficienty
$Q(\lambda)$ nechť je charakteristický polynom rovnice $Mz=0$. Chceme vztah Q a P.
Dle Lemmatu 3.42 je $\underset{(*)}{Q(\lambda)} = \frac{M(e^{\lambda x})}{e^{\lambda x}} = \frac{L(e^{\lambda x}\cdot e^{\lambda_i x})}{e^{\lambda x}} = \frac{L(e^{(\lambda+\lambda_i)x})}{e^{\lambda x}} = \frac{P(\lambda+\lambda_i)e^{(\lambda+\lambda_i)x}}{e^{\lambda x}} =$

$= P(\lambda+\lambda_i)e^{\lambda_i x}$
~~Příklad~~ Neboť $P(\lambda_i)=0 \Rightarrow P.S.(*)=0 \Rightarrow L.S.=0 \Rightarrow Q(0)=0$
pro $\lambda=0$

Tj. $\{x,\ldots,x^{\nu_i-1}\}$ dle a řeší $Mz=0$

a $L(x^i e^{\lambda_i x}) = M(x^i)e^{\lambda_i x} = 0\cdot e^{\lambda_i x}=0 \Longrightarrow L(x^i e^{\lambda_i x})=0$ cbd 1
2, Lineární nezávislost
a, Lemma: $(e^{\lambda x}P(x))' = e^{\lambda x}Q(x)$
Dk: $\lambda e^{\lambda x}P(x) + e^{\lambda x}P'(x) = e^{\lambda x}Q(x)$, ano
$Q(x) = \lambda P(x) + P'(x)$ ▨
b, Z Lemmatu obecně
$(e^{\lambda x}P(x))^{(k)} = e^{\lambda x}\tilde{Q}(x)$

Dk: indukcí

$\forall P_p$, že $\sum_{i=0}^{p} P_i(x) e^{\lambda_i x} = 0 \ \forall x \in I \implies P_i = 0$ (nuly na I)

Dk. indukcí I) $p = 0$ $P_0(x) e^{\lambda_0 x} = 0$ na I

$P_0(x) = 0$ na I

neboť $e^{\lambda_0 x} \neq 0 \ \forall x \in I \ \forall \lambda$.

II Nechť platí pro p. Chceme pro $p+1$

$P_{p+1}(x) = -\sum_{i=0}^{p} P_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_{p+1})x}$ / zderivuju stupněm $P_{p+1}(x)$-krát

$0 = -\sum_{i=0}^{p} Q_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_{p+1})x}$ dle 2b $\xrightarrow{\text{z IP}} Q_i = 0$ na I.

Chceme $P_i = 0$.

kdyby $P_i \neq 0 \implies Q \neq 0$ (viz Dk. 2a) ▨

Pozn: 2a. Snadno: $Q \neq 0 \implies P \neq 0$

~~Sporem $P \neq 0$~~ Pokud $Q = 0 \implies \lambda P(\lambda) = P'(\lambda)$

i) $\lambda \neq 0 \implies P(\lambda) = P(\lambda) \implies P(\lambda) = 0$

ii) $\lambda = 0 \implies Q(\lambda) = P(\lambda) \implies P(\lambda)$ - const.

Ok. ale nemá stejné nebo $\lambda = \lambda_i$, $\lambda_{p+1} \neq 0$

Matematická analýza

9.5.2013

Minule:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

, kde $x^i : I \to \mathbb{R}$, $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^t$ ← sloupec, $t \in I$

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}/\mathbb{C})$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\dot{x}^i(t_0) = \frac{dx^i}{dt}(t_0) = x^{i\prime}(t_0)$, $t_0 \in I$

Souhrnně: $\dot{x} = Ax$

$\dot{x}(t) = A[x(t)]$

$\exp : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $[\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$r \mapsto r + i0 \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}]$

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \text{ kde } A^n = \underbrace{A \dots A}_{n\text{-krát}}$$

Existence (korektnost) exp

<u>Formálně</u>: neumíme, neboť neznáme teorie mocninných řad více proměnných

Lze definovat: $(z^1, \dots, z^m) \longmapsto \sum_{i_1, \dots, i_m = 0}^{+\infty} a_{i_1, \dots, i_m} z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m}$

(zobecníme řady čísel, je objekt [illegible])

↳ nesčítáme přes usp. množinu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, ale přes $\mathbb{N}_0^m = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$

Lze vybudovat teorie obdobně jako pro mocninné řady jedné proměnné

Spec. $\exists R \in \mathbb{R}_0^+\ \forall z \in U_R(0)$ je mocninná řada konv. / dobře definovaná (na $U_R(0)$)

Ad exponenciála:

$M_{n\times n}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n^2}$ $\quad (E_{ij})_{i=1, j=1}^{n}$ je báze $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $(E_{ij})_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

tj. $\exp : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, $m = n^2$

Lze ukázat, že $R = +\infty$

$D\exp = \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{n^2} \cong M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (Viz např. Jarník, Rovnice komplex. oboru, mocninné řady)

↑ maticová exp.

Idea: $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ konv. v $\mathbb{C}^m \implies$ konv. v jednotlivých proměnných

$\exp'(At) = ?$

$t \in \mathbb{R}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

$$[\exp(At)]' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^{n-1} n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} A \cdot \frac{A^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} = A \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = A\exp(At)$$

$\dot{x} = Ax$

$x(t) := \exp(At)x_0$, kde $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

Je to řešení

$\dot{x}(\tilde{t}) = [\exp(A\tilde{t})x_0]' = \exp'(A\tilde{t})x_0 = A\exp(A\tilde{t})x_0 = Ax(\tilde{t})$, slučbění $x(t) = \exp(At)x_0$ je řešením $\dot{x} = Ax$

$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0^i$, $i = 1, \dots, n$ $\qquad x^i(t_0) = \tilde{x}_0^i$

$\exp(At_0)x_0 = \tilde{x}_0$ soustava lineárních (ne diferenciálních) rovnic

$\det(\exp At_0) \underset{\underset{LA}{\uparrow}}{=} e^{\operatorname{Tr} A} \neq 0$ $\quad (> 0$ v případě $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$

!! $\Rightarrow$ soustava má jednoznačné řešení $\qquad$ (jednoznačné řešení lineární / regulární)

Jak počítat: 1) $(Q^{\mp 1} A Q^{\pm 1})^n = Q^{\mp 1} A^n Q^{\pm 1}$ $\quad \forall Q \in GL_n(\mathbb{C})$ $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

neboť (form indukcí)

$\underbrace{Q^{-1}AQQ^{-1}AQQ^{-1}AQ \dots \cancel{Q}^{-1}AQ}_{n\text{-krát}} = Q^{-1}A^nQ \quad \Rightarrow \exp(Q^{-1}AQ) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(Q^{-1}AQ)^n}{n!} =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q^{-1}A^nQ}{n!} = Q^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\right)Q = Q^{-1}\exp(A)Q$

$\exp\begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \boxed{\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\square) & \\ & \exp(\boxed{\sim}) \end{pmatrix}$, neb $\begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \boxed{\sim} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \boxed{\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square^2 & 0 \\ 0 & \boxed{\sim}^2 \end{pmatrix}$

$\left[\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{J^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\lambda 1_r + J)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}^{n-k}}_{r} =$

$= \left| \begin{array}{l} \text{pro } n-k > r \\ \text{např. } n=2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right| \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}^{n-k} = 0 \qquad$ nilpotentní

(další úprava pomocí Taylora)

Cv (doma) $\quad \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \exp(At)$

$J_A: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = ?$

$\exp(At) = Q^{-1}\exp(J_A t)Q$, Q je transformační matice

$A = Q^{-1}J_AQ$

4. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

4.1 Limity, parciální derivace a totální diferenciál

Jsou $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$

$f(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}$, $f = (f^1,\dots,f^m): (x^1,\dots,x^n) \longmapsto (f^1(x^1,\dots,x^n),\dots,f^m(x^1,\dots,x^n))$,

$(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}$, $x^i \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ uvažujeme jako normovaný prostor. Normu označím $|\ |: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

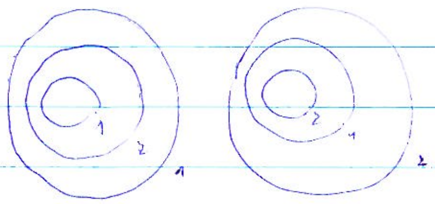
Věta

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ buďte normované prostory, pak $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$

$c_1|\ |_1 \le |\ |_2 \le c_2|\ |_1$ a $\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$

$d_1|\ |_2 \le |\ |_1 \le d_2|\ |_2$.

Pozn:



Říkáme, že $|\cdot|_1$ a $|\cdot|_2$ jsou ekvivalentní normy. Mj. lze ukázat, že $\lim_{\substack{h\to a \\ |\cdot|_1}} f(h) = \lim_{\substack{h\to a \\ |\cdot|_2}} f(h)$, pokud $|\cdot|_1$ a $|\cdot|_2$ jsou ekvivalentní. Důkaz: vím pro $\varepsilon_1\ \exists \delta_1\ \forall x \in U_{\delta_1}(a)$

$|f(h) - L.S.|_1 < \varepsilon_1$

$|f(h) - P.S.|_2 \le \frac{1}{d_1}|f(h) - P.S.|_1 \le \frac{1}{d_1}\varepsilon_1$ a dále limitním přechodem

Definice 4.36

$f: U(a) \to \mathbb{R}^n$, $U(a) \subseteq \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^m$. Definujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}\right),$$ tzv. i-tou parciální derivaci f v a

$(\partial_{x^i} f)(a)$

Pozn: neříkám ortogonální báze

$\{e_i\}_{i=1}^m$, $e_i = (0,\dots,0,\underset{i\text{-tá pozice}}{1},0,\dots,0) \in \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{m\text{-krát}}$

$g: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$g(t) = f(a + te_1) - f(a)$ $\qquad$ $\lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{g(t)}{t}\right) = (\partial_1 f)(a)$

$\frac{g(t)}{t} : (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

limitu máme v metrických sp. v normovaných

Př. Počítáme jako na hodinách fyziky, na ostatní nederivované proměnné hledíme jako na konst.

$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) = y \frac{\partial x^2}{\partial x} = y\, 2x = 2xy$ $\quad$ nebo z definice $\quad \partial_1(x^2y)(a) = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{(x+t)^2 y}{t}(a) - \frac{x^2 y}{t}(a)\right] =$

$= \lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{2xty + t^2 y}{t}\right)(a) = (2xy)(a)$ $\quad a = (1,2) \quad 2xy(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

$\{1,2\} = \{2,1\}$

$[1,2] := \{1, \{1,2\}\} \ni 1 \qquad [2,1] := \{2, \{1,2\}\} \not\ni 1$

něco je víc vlevo a něco vpravo

uspořádaná dvojice

$[a,b] = \{a, \{a,b\}\}$

„Labuť není nic jiného než množina všech labutí.“ (A)

Matematická analýza

14. 5. 2013

Minule: definice $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\right)$, $g_i(t) = f(a+te_i)$

v $\mathbb{R}^m$ může být lib. ~~metrika~~ norma, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m$

$= \lim_{t\to 0} \frac{g_i(t)}{t} = g_i'(0)$

parc. derivace na ní nezávisí (všechny jsou ekvivalentní)

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $D_f \supseteq U(a)$

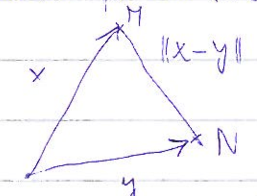
Event. $f = (f^1, \dots, f^n): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}(a), \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x^i}(a)\right)$, $i = 1, \dots, m$ $(f(a^1, \dots, a^m)) =$ souřadnice

když má fce více složek $(f^1(a^1, \dots, a^m), \dots, f^n(a^1, \dots, a^m))$

Pozn: Ve fyzice: Přivol si pozitivní definitní bilineární formu (sk. součin) g a pak definuj metriku takto:

norma: $\|x\| = \sqrt{g(x,x)}$, $x \in \mathbb{R}^m$

metrika: $\rho(x,y) = \|x-y\|$



Definuj parciální derivace vůči metrice ρ, pak gradienty, které pro nás budou jen metrické pojmy, definujy jinak: pomocí g, resp. pomocí ortonormálních bází

„Ve směru jednoho vektoru vidím rododendron, ve směru jiného vidím světlo." libovolné bázi ☺

Definice 4.37

$f: U(a) \to \mathbb{R}$, $U(a) \subseteq \mathbb{R}^m$. Lineární formu $\alpha: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nazveme totálním diferenciálem f v bodě a, pokud:

$$\lim_{v \to 0} \frac{\left(f(a+v) - f(a)\right) - \alpha(v)}{\|v\|} = 0$$

Pozn: Zde jde o limitu reálnou 1 reálné proměnné, spc. případ limity v metrických prostorech. Spc. všechny normy jsou ekvivalentní v $\mathbb{R}^m$, tudíž je toto pojem nezávislý na metrice. Dělit musím normou, $\|v\|$, vektorem nejde dělit.

Značení: Buď $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^m$ báze $(\mathbb{R}^m)^*$ duální k bázi $\{e_i\}_{i=1}^m$ prostoru $\mathbb{R}^m$, tj. $\varepsilon^j(e_i) = \delta_i^j$, $i,j = 1, \dots, m$. Pak $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$, že $\forall \alpha: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (lin. f.) splňuje

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon^i$$

Ve fyzice/analýze často značíme $\varepsilon^i = dx^i$. Z LA víme, že si nemusíme myslet, že dx^i je infinitesimální.

Totální diferenciál fce f v a budeme značit d_af. Jeho vyčíslení na vektoru v pak standardně $(d_af)(v)$

Kopáček: $df(a,v)$, $df(a,h)$

Vztah: $(d_af) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots \\ \varepsilon_m\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon^i$

Věta 4.45 (O střední hodnotě ve více dimenzích)

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $J = J_1 \times \dots \times J_m$, $J_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$

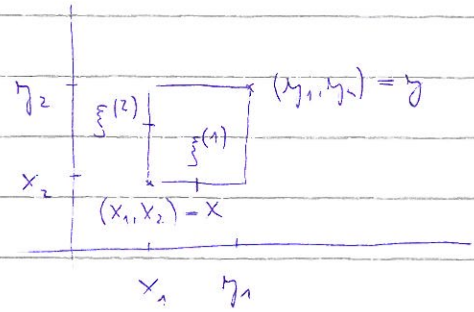
Nechť f má parciální derivace podle všech proměnných na celém J, (tj. $\forall a \in J \; \forall i = 1, \dots, m$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$), m derivací

Pak $\exists \xi^{(i)} \in J$ („m-vektory"), že $f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi^{(i)})(x^i - y^i) \;\; \forall \; x = (x^1, \dots, x^m), y = (y^1, \dots, y^m) \in J$.

Pozn. $\xi^{(i)}, i = 1, \dots, m$ m bodů v prostoru $\mathbb{R}^m$

Dk. Stačí pro $m = 2$.

$x = (x^1, x^2), y = (y^1, y^2)$



$f(x) - f(y) = f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) +$
$\quad + f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2)$

$\psi_1(t) = f(x_1, t) - f(y_1, t)$

$\psi_2(t) := f(t, x_2) - f(t, y_2)$ $\quad \exists t_1 \; \psi_1'(t_1)(x_1 - y_1) = \psi_1(x_1) - \psi_1(y_1)$ dle Lagrang. věty o SH. hodn.

$\exists t_2 \;\; \psi_2(t_2)(x_2 - y_2) = \psi_2(x_2) - \psi_2(y_2)$ — „ —

Dosazením $f(x) - f(y) = \psi_1'(t_1)(x_1 - y_1) + \psi_2'(t_2)(x_2 - y_2) + \dots$

navíc $\psi_1'(t_1) = (\partial_2 f)(x_1, t_1) - (\partial_2 f)(y_1, t_1)$

druhá proměnná

$\psi_2'(t_2) = (\partial_1 f)(t_2, x_2) - (\partial_1 f)(t_2, y_2)$

$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi^{(i)})(x^i - y^i)$ $\qquad \xi^1 = (t_1, x_2), \; \xi^2 = (y_1, t_2)$

$\blacksquare$

Pozn: $f(x) - f(y) = \psi_1(x_2) - \psi_2(x_1)$

Věta 4.46

f má totální diferenciál v $a \Rightarrow f$ je spojitá v a a f má v a parciální derivace dle všech proměnných.

Dk: 1, má všechny parciální derivace

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - \alpha(v)}{\|v\|} = 0$$

$\Rightarrow \exists$ všechny směrové limity $\quad \lim_{v^i \to 0} \frac{f(a + e_i v^i) - f(a) - \sum_{j=1}^{m} x_j \varepsilon^j(v^i e_i)}{\|v^i\|} = 0$

když má ~~...~~ víc limitu více proměnných tak $\exists$ lim i v jednotl. těch proměnných

$$\Rightarrow \lim_{h^i \to 0} \frac{f(a+e_i h^i) - f(a) - \alpha_i h^i}{|h^i|} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{h^i \to 0} \frac{f(a+e_i h^i) - f(a)}{|h^i|} = \alpha^i \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$, tj. jsme parciální derivaci vypočítali lim, tj. $\exists$

2, Spojitost

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\left((a+h)^i - a^i\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) h^i \longrightarrow 0 \quad \text{když } h \longrightarrow 0$$

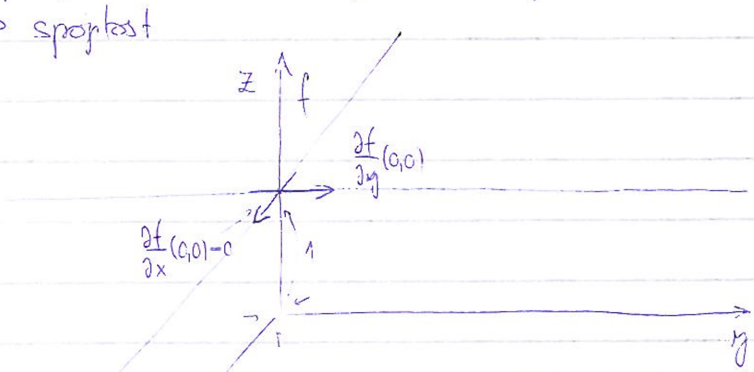
což znamená, že f je spojitá v a ▨

Pozn: tu spojitost i tak implikuje tohle. sp $f(x)$ v $a \Longleftrightarrow f(a+h) - f(a) \to$, $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = \lim_{h\to 0} f(a+h) - \lim_{h \to 0} f(a) = 0$$

TD je silnější podmínka než $\exists$ p.d, než sp.

Př: 1, $\exists$ p.d. $\not\Rightarrow$ spojitost



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = 0 \vee y = 0 \\ 0 & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid xy = 0\} \equiv x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$

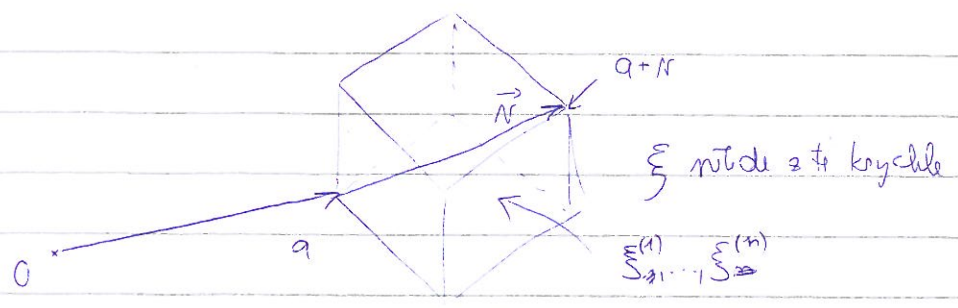
Má parciální derivaci v $(0,0)$ dle x i y.
není v $(0,0)$ spojitá
Tj. mj. f nemůže mít totální diferenciál

Věta 4.47

Nechť f má spojité parciální derivace v bodě a podle všech proměnných. Pak $\exists$ totální diferenciál

Dk:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\right)h^i}{\|h\|} \overset{\text{VoSHUD}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi^{(i)})\left((a+h)^i - a^i\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) h^i}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\right)h^i}{\|h\|}$$



$h \to 0 \Rightarrow a+h \to a$

$\Rightarrow \xi^{(i)} \to a \quad \forall i = 1, \dots, m$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\xi^{(i)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \right] = 0 \quad \text{neb } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ jsou spojité v } a.$$

Toto ale není vše neboť co s $\lim \frac{h^i}{\|h\|}$ — ?

Takže upravím

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left| \sum_{i=1}^{m} h^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\xi^{(i)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \right) \right|}{\|h\|} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} \|h\| \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\xi^{(i)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \right)}{\|h\|} =$$

$h^i \leq \|h\|$

$$= \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\xi^{(i)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \right) = 0$$

$\blacksquare$

Matematická analýza

15.5.2013

př.: f má totální diferenciál a nemá spojité parciální derivace

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ \cancel{1}\,0 & x=0 \wedge y=0 \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\sin t^2 = 1$ $\left(\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}\right.$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(x^2+y^2)\right)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{|t|}\sin t^2 = 0$

Pp. že totální diferenciál v $(0,0)$ $\exists \xrightarrow{V.4.46}$ $\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ $(d_{(0,0)}f = \alpha_1\mathcal{E}^1 + \alpha_2\mathcal{E}^2)$

Tj. zde $d_{(0,0)}f = 0\,\mathcal{E}^1 + 0\,\mathcal{E}^2 = 0$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ale dle definice totálního diferenciálu má platit, že

$$\lim_{v\to 0}\frac{f((0,0)+v)-f(0,0)-0(v)^{\leftarrow \text{tot. dif}}}{\|v\|} = \lim_{v\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}}\sin((v^1)^2+(v^2)^2)-0-0}{\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}} = \lim_{v\to 0}\frac{\sin((v^1)^2+(v^2)^2)}{(v^1)^2+(v^2)^2}\ \exists?$$

Pokud ano, existuje limita $\lim_{r\to 0}\frac{\sin(r^2(s^2\varphi+c^2\varphi))}{r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2} = 1 \neq 0$

Pozn. V 4.46 nelze obrátit. Našli jsme fci, jež má parciální derivace a nemá totální dif., existence parc. der. není postačující

V 4.47 také nelze obrátit (viz kopeček př.)

Tj. sp. parc. der. nejsou nutnou podmínkou pro existenci totálního diferenciálu

(Př. modifikace toho výše)

!! $\lim_{x\to a} f(x) = b \implies \lim_{x^i\to a^i} f(0,\dots,0,x^i,0,\dots,0) = b$ $\forall i=1,\dots,n$, $f: P(a)\to\mathbb{R}^k$, $P(a)\subseteq\mathbb{R}^n$

nelze obrátit. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}\ \nexists$ ale $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cdot 0^2}{x^2} = 1,\ \exists$ a $\lim_{y\to 0}\frac{0^2+2y^2}{y^2} = 2\ \exists$

Proč $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}$? Neb její hodnota závisí na blížení

Analogicky: $\forall$ směrové limity $\exists$ a rovnají se $\not\Rightarrow \lim \exists$

Lemma 4.48 (Ekvivalentní definice totálního diferenciálu)

Následující je ekvivalentní:

1) f má totální diferenciál v a, $d_a f$

2) $f(a+v) - f(a) - (d_a f)(v) = o(\|v\|)$, $v\to 0$

3) $\exists \varphi: U(0)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ spojitá v 0, že $f(a+v)-f(a)-(d_a f)(v) = \|v\|\varphi(v)$

Dk: 1 $\iff$ 2, z def. σ, neb $f(x)=\sigma(g(x))$, $x\to a \iff \frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, $x\to a$

1 $\iff$ 3, $h(v) = f(a+v) - f(a) - (d_a f)(v)$. Víme $\lim_{v\to 0} \frac{h(v)}{\|v\|} = 0$

$\Rightarrow \frac{h(v)}{\|v\|}$ je omezená (analogie 1. sem.)

$\tilde{\xi}(v) = \frac{h(v)}{\|v\|}$ $\quad \xi(0)=0 \quad \xi(v) = \tilde{\xi}(v), v\neq 0$

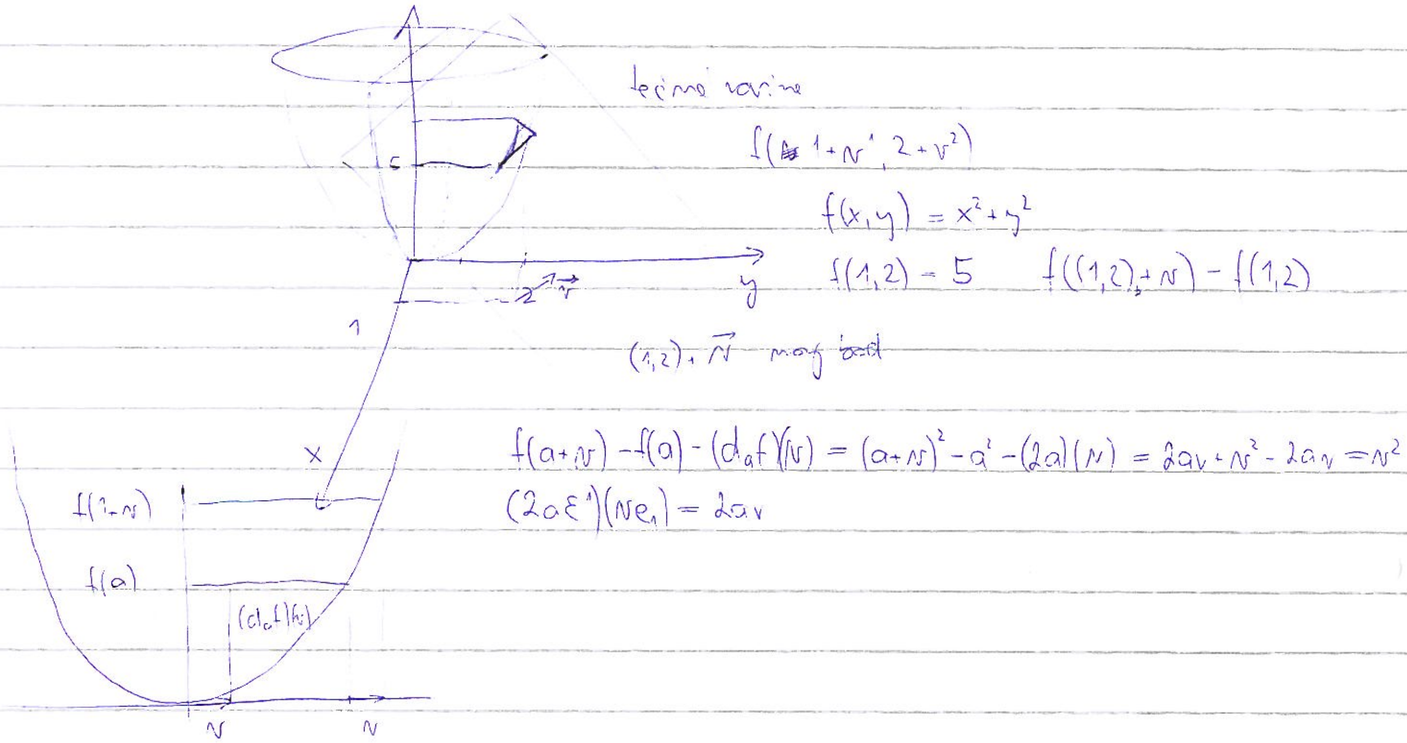
$\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0,\dots,0)\}$

$f(a+v) - f(v) - (d_a f)(v) = \|v\|\xi(v)$

Obrácení (3) $\to$ 1: $\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-(d_a f)(v)}{\|v\|} = \lim_{v\to 0}\frac{\|v\|\xi(v)}{\|v\|} = \lim_{v\to 0}\xi(v) = 0$ dle def. ξ $\boxtimes$

Pozn: Dokonce $\{\xi(v)\}$ je omezená v mn., jak plyne z konstrukce

Technika (definice) tot. dif. byla přímá intuice



Definice 4.38

Nechť $f: U(a) \to \mathbb{R}$, $U(a)\subseteq \mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^m$. Nechť f má totální diferenciál v a.

Pak prostor s počátkem

$P = (a, f(a)) \in \mathbb{R}^{m+1}$ a určený vektorový prostor $W_{f,a} := \{x\in\mathbb{R}^m \mid (d_a f)(x) = 0\}$ nazveme tečnou nadrovinou grafu fce f v bodě a

Pozn: Graf $f := \{(x, f(x)) \mid x\in D_f\}$

VĚTA 4.49 (Totální diferenciál složené fce)

Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v $g(a)$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ má totální diferenciál v a. Pak $(f \circ g)$ má totální diferenciál v a a $\forall i = 1, \dots, m$ platí $\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x^i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a)) \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a)$

Dk: Víme $f(g(a)+v) - f(g(a)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a)) v^j + \|v\| \xi(v)$ (I)

Totální diferenciál $\overset{V4.45}{\Longrightarrow}$ $\exists$ parc. der. + vzorec pro t.d. + lemma 4.48

Víme (ze stejného důvodu) $\forall j = 1, \dots, n$ $\quad g^j(a+w) - g^j(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a) w^i + \|w\| \xi^j(w)$

(II)

Polož $v := g(a+w) - g(a)$ ve vzorci I

$$f(g(a+w)) - f(g(a)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a))\left(g^j(a+w) - g^j(a)\right) + \|g(a+w) - g(a)\| \; \xi(g(a+w) - g(a))$$

Dosaď za $g^j(a+w) - g^j(a)$ vzorec II

$$f(g(a+w)) - f(g(a)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a)\, w^i \frac{\partial f}{\partial x^j}(g(a)) + \|w\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a)) \xi^j(w) +$$

$$+ \|g(a+w) - g(a)\| \cdot \xi(g(a+w) - g(a))$$

Označme:

$$h_1(w) := \|w\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a)) \xi^j(w)$$

$$h_2(w) := \|g(a+w) - g(a)\| \; \xi(g(a+w) - g(a))$$

Chceme: $\quad \frac{h_1(w)}{\|w\|} \to 0,\ w \to 0$ a $\frac{h_2(w)}{\|w\|} \to 0,\ w \to 0$

Ad 1, easy $\quad \frac{h_1(w)}{\|w\|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a)) \xi^j(w) \to 0$ neb $\xi^j(w) \to 0,\ w \to 0$ (Lemma 4.48)

Ad 2, $\quad \frac{\|g(a+w) - g(a)\|}{\|w\|} = \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a) w^i + \|w\| \xi^j(w)\right) e_j\right\|}{\|w\|} \leq$

$$\underset{|w^i| \leq \|w\|}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a) \|w\| + \xi^j(w)\right) e_j$$ je funkce omezená, protože číslo $+ \sum_{j=1}^{n} \xi^j(w) e_j$

suma fcí v nule omezených (dle (4.48))

Nyní: $\frac{\|g(a+w) - g(a)\|}{\|w\|} \cdot \xi(g(a+w) - g(a)) \to 0$

$$\frac{\|g(a+w) - g(a)\|}{\|w\|} \underbrace{\xi(g(a+w) - g(a))}_{\to 0, \text{ neb } g \text{ je sp. v } a}$$

om.

$\xi(h) \to 0,\ h \to 0$ z def. ξ (L4.48)