**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA**
**Univerzita Karlova**

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Kokoška

# Integrabilita v Hamiltonově mechanice

Matematický ústav UK

| | |
|---|---|
| Vedoucí bakalářské práce: | doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D. |
| Studijní program: | Fyzika |
| Studijní obor: | Obecná fyzika |

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ........ dne ............ Podpis autora

Zde bych rád poděkoval panu docentu Krýslovi za vždy ochotnou pomoc a přátelský přístup, především pak své rodině za podporu ve studiu.

Název práce: Integrabilita v Hamiltonově mechanice

Autor: David Kokoška

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Hamiltonovu mechaniku lze formulovat pomocí symplektických variet a tzv. hamiltonovských systémů. Věta Arnolda a Liouvilla umožňuje popsat podmínky, kdy je řešení Hamiltonových rovnic omezeno na torus dimenze rovnající se dimenzi konfiguračního prostoru. Příklady na použití této věty jsou uvedeny. Nakonec je studován problém pohybu v poli centrální síly v souvislosti s Rungovým–Lenzovým vektorem.

Klíčová slova: symplektická varieta, hamiltonovský systém, Liouvillova–Arnoldova věta, Keplerův problém

Title: Integrability in Hamiltonian mechanics

Author: David Kokoška

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: Hamiltonian mechanics can be formulated using symplectic manifolds and so called Hamiltonian systems. In the Theorem of Liouville–Arnold, conditions are described, under which solutions of Hamilton equations stay on a torus of dimension equal to the dimension of the configuration space. Examples on application of the Liouville–Arnold theorem are contained. We study the problem of motion in a gravitational central force field in the connection with the Runge–Lenz vector.

Keywords: symplectic manifold, hamiltonian system, Liouville–Arnold theorem, Kepler's problem

# Obsah

# Úvod

Když Newton roku 1687 vydal své *Principie*, položil tím základ moderní, matematicky formulované přírodní vědy. V tomto díle, mimo jiné, publikoval zákony, jimiž se řídí pohyb hmotných bodů. Jde o obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu, pomocí nichž můžeme v principu určit časový vývoj daného fyzikálního systému, známe-li jeho počáteční fyzikální stav. Newtonovy rovnice jsou vektorové, přičemž nalézt vektor síly, který v nich v daném případě vystupuje, nemusí být vždy snadné.

Vývojem matematiky došlo k značné reformulaci jeho rovnic. První krok v tomto ohledu učinil Joseph-Louis Lagrange, který Newtonovy rovnice pohybu vyjádřil rovnicemi, nazývané Lagrangeovy rovnice II. druhu,[1] ve kterých již vystupuje pouze skalární funkce $L$, která má význam rozdílu kinetické a potenciální energie. Jeho rovnice vypadají takto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Dalším, kdo šel ještě dál, byl William Rowan Hamilton, který Legendreovou transformací přešel od funkce $L$, která závisí na zobecněných souřadnicích a rychlostech, k funkci $H$,[2] jež závisí na zobecněných souřadnicích a hybnostech. Dospěl k tzv. Hamiltonovým kanonickým rovnicím

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Obě tyto formulace mechaniky již obsahují pouze skalární veličiny, vystupují v nich však stále konkrétní (ač libovolné) souřadnice. Snaha oprostit se ve fyzikálních rovnicích od souřadnic nastala, protože podstata fyzikálních zákonů by neměla záviset na tom, v jakých souřadnicích pracujeme. Oba dva přístupy k mechanice, Lagrangeův i Hamiltonův, tak podstoupily ještě další zobecnění, a to díky rozvinutí diferenciální geometrie. Ukázalo se totiž, že množiny všech možných fyzikálních stavů daného systému ve fázovém prostoru lze matematicky popsat jako variety, na kterých lze ještě definovat dodatečnou strukturu, symplektickou formu, která je důležitá pro Hamiltonovu formulaci. Následující rovnice zde nebudeme vysvětlovat, poslouží jen jako ilustrace toho, k jaké invarianci se posunula klasická Lagrangeova a Hamiltonova formulace mechaniky. V této geometrické řeči pak jde o nalezení takového vektorového pole $\mathbf{X}$, které řeší rovnice

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Theta_L = dL, \qquad i_{\mathbf{X}}\omega = dH.$$

Přičemž rovnice vlevo vychází z Lagrangeových rovnic, rovnice vpravo z Hamiltonových. V tuto chvíli samozřejmě není jasné, co tyto rovnice znamenají, ale alespoň na nich lze vidět, že v nich již explicitně nevystupují žádné souřadnice.

Výklad začneme ilustrací na známém příkladu, harmonickém oscilátoru, vyřešeném formalismem Hamiltonovské mechaniky. Na tomto příkladu některé přístupy přiblížíme.

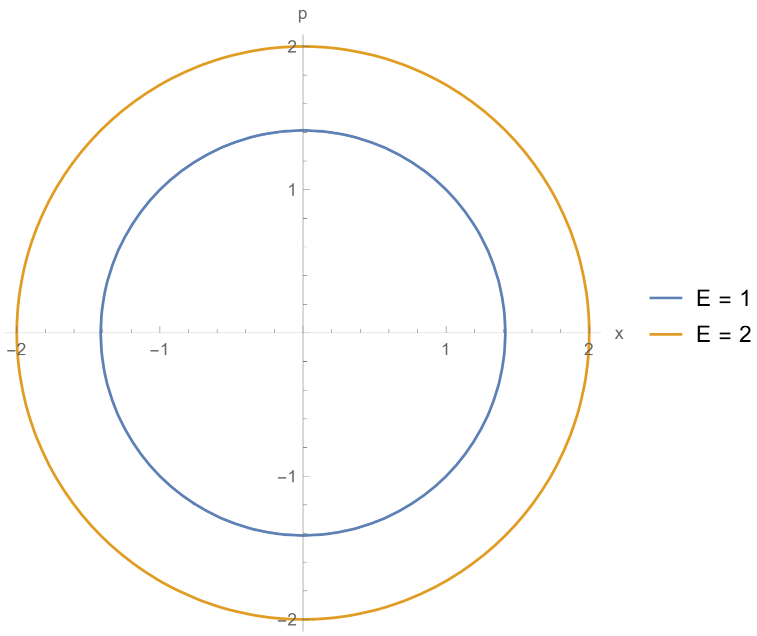
[1] Nazývané také jako Euler-Lagrangeovy rovnice.
[2] Hamiltonova funkce

# Jednorozměrný harmonický oscilátor

Pro jednoduchost budeme uvažovat jednotkovou hmotnost i konstantu úměrnosti z Hookova zákona. Potom Hamiltonián tohoto systému má tvar

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

Jelikož Hamiltonián zde představuje celkovou energii systému, která se zachovává, pak pokud známe určitou počáteční hodnotu energie, známe ji již v každém čase. Pak rovnice (1) pro danou energii je vlastně rovnicí kružnice v proměnných $(x, p)$. Tato kružnice tedy určuje všechny možné stavy harmonického oscilátoru, ve kterých se může při dané celkové energii vyskytovat. Prostor proměnných $(x, p)$ se nazývá *fázový prostor*. Každý bod fázového prostoru představuje jiný fyzikální stav popisovaného objektu (nebo soustavy). Množina bodů, ve kterých se daný systém může nacházet pro dané počáteční podmínky, se pak nazývá *fázový portrét*.




Obrázek 1: Fázový prostor jednorozměrného harmonického oscilátoru. Pro různé hodnoty energie dostaneme jiný fázový portrét. (E zde značí konkrétní, zvolenou, hodnotu Hamiltoniánu v rovnici (1).)

Předcházející příklad je ilustrací typické situace, kdy fázový portrét fyzikálních systémů je tvořen množinou bodů, nazývaných *varieta*. To je, vágně řečeno, množina, která je lokálně podobná euklidovskému $n$-rozměrnému prostoru. Jinak řečeno, v dostatečně malém okolí jejího libovolného bodu lze zkonstruovat vzájemně jednoznačné zobrazení z variety do euklidovského prostoru. Díky tomu pak lze inverzním zobrazením definovat lokální souřadnice i na varietě.

Ukazuje se, že díky možnosti zavedení lokálních souřadnic pak lze na varietě zavést další objekt, tzv. diferenciální 2-formu $\omega$, která je centrálním pojmem pro studium klasické mechaniky z hlediska diferenciální geometrie. Díky jejím vlastnostem a dalším konstrukcím lze rozhodnout, je-li daný systém *integrabilní*, tedy zda lze daný problém explicitně vyřešit a také jaký typ prostoru je v daném případě fázovým portrétem. O tom hovoří tzv. *Liouvillova–Arnoldova věta.*

Ještě se pozastavme nad pojmem *integrabilita.* Nejobecněji lze říct, že se systém nazývá integrabilní, pokud není „*chaotický*“ nebo také, pokud lze „analyticky vyřešit“. V práci pod pojmem integrability míníme tzv. *geometrickou integrabilitu*, tj. vzájemné komutování $n$ integrálů pohybu (hladkých funkcí na fázovém prostoru dimenze $2n$), včetně Hamiltoniánu systému, vůči Poissonovým závorkám.

V této práci čtenáři přiblížíme potřebné matematické pojmy pro popis klasické mechaniky v jazyce diferenciální geometrie.

Konkrétně v první kapitole podáme intuitivní popis obecnějších matematických pojmů čtenářům, kteří ještě nebyli příliš obeznámeni s tímto tématem, s definicemi dále používanými.

Druhá kapitola je již zaměřena na pojmy symplektické geometrie, zejména symplektické formy, Poissonových závorek a jejich využití v popisu Hamiltonovy mechaniky.

Třetí kapitola se zabývá Liouvillovou–Arnoldovou větou, především uvedením části jejího důkazu popsaném v [1] do dnes používaného formalismu a místy podrobnějším rozepsáním postupu. Některé části v [1] jsou jen načrtnuty nebo uloženy za domácí úkol.

Dále jsou uvedeny příklady a kapitola o Rungovu–Lenzovu vektoru, jehož analýzou lze například určit trajektorii objektů v Newtonovském potenciálu bez nutnosti jakékoliv integrace.

# 1. Matematický aparát

(Převážně podle [4]). Nejprve připomeňme definici jednoho ze základních objektů matematické analýzy, *totální diferenciál funkce více proměnných*, který později rozšíříme na obecnější třídu zobrazení na varietách.

## 1.1 Totální diferenciál funkce více proměnných

Mějme funkci $f$ proměnných $(x^1,\ldots,x^n)$, tedy $f(x^1,\ldots,x^n)$. Pak totální diferenciál funkce $f$ je definován jako[3]

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \tag{1.1}$$

kde $dx^i$ je lineární forma, která tedy zobrazuje z vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, tím způsobem, že vektoru přiřadí jeho $i$-tou souřadnici, tedy $dx^i(\mathbf{v}) = v^i$. To je konsistentní s tím, že pak platí

$$df(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \equiv \nabla f \cdot \mathbf{v}. \tag{1.2}$$

## 1.2 Varieta

Jak již zaznělo výše, varietou nazveme takový prostor (množinu) $\mathcal{M}$, který je *lokálně* podobný Euklidovskému prostoru, tedy lze na ní zavést lokální souřadnice, díky existenci bijektivního zobrazení mezi varietou a $\mathbb{R}^n$.

Vezmeme-li tedy libovolný bod variety $P$, pak existuje zobrazení $\Phi$, které vzájemně jednoznačně a spojitě zobrazí okolí $\mathcal{U}_P$ bodu $P$ do $\mathbb{R}^n$. Dvojici $(\mathcal{U}_P,\Phi)$ říkáme *mapa*. Množina všech map tvoří tzv. *atlas*, který pokrývá celou varietu.

Jak je to tedy se souřadnicemi na varietě? Máme-li libovolný bod $Q$ z $\mathcal{U}_P$, pak můžeme psát

$$\Phi(Q) = (x^1,\ldots,x^n),$$

díky tomu, že z definice $\Phi$ zobrazuje do $\mathbb{R}^n$, kde máme a priori zavedené souřadnice. Lokálně tedy můžeme na varietě zavést souřadnice tak, že vezmeme inverzní obraz $\Phi^{-1}$ souřadnicových čar $x^i = konst.\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Ještě je třeba se vypořádat s překryvem různých map. Mějme mapy $(\mathcal{U},\Phi)$ a $(\mathcal{V},\Psi)$. Potom souřadnice bodu $P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ jsou $\Phi(P) = (x^1,\ldots,x^n)$ a $\Psi(P) = (y^1,\ldots,y^n)$. Tím je tedy dáno zobrazení $\Phi(\Psi^{-1})$, které zobrazuje z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. To definuje $(x^1(y^1,\ldots,y^n),\ldots,x^n(y^1,\ldots,y^n))$, přičemž požadujeme, aby toto zobrazení bylo dostatečně *hladké*. V praxi to znamená spojitost parciálních derivací až do jistého řádu $k$. Variety s touto vlastností se pak označují jako $\mathcal{C}^k$ variety. Ty

[3] Samozřejmě za předpokladu, že funkce $f$ je diferencovatelná. V této kapitole půjde především o „nástin“, takže budeme dále mlčky předpokládat, že všechny předpoklady jsou automaticky splněny.

variety, které splňují tento požadavek, se obecně nazývají *diferencovatelné variety.* Navíc, je-li „$k = \infty$“, tedy pokud jsou parciální derivace spojité do libovolného řádu, mluvíme o *hladké varietě.*

**Definice 1.** Množinu $\mathcal{X}$ nazveme *hausdorffovskou* (někdy též *separabilní*) množinou, pokud pro každé její různé dva body $a$ a $b$ existují okolí $\mathcal{U}_a$ a $\mathcal{U}_b$ taková, že $a \in \mathcal{U}_a$, $b \in \mathcal{U}_b$ a zároveň $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$.

**Definice 2.** Množinu $\mathcal{M}$ nazveme varietou, jestliže splňuje:

$(\forall P \in \mathcal{M})(\exists \mathcal{U} \subset \mathcal{M}) : (P \in \mathcal{U}) \wedge \exists \Phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, kde $\Phi$ je bijektivní, spojité zobrazení, současně $\Phi^{-1}$ je spojitá, a $\mathcal{M}$ je hausdorffovská množina.

Diferencovatelné variety jsou významné v tom, že na nich lze zavést další objekty, jako funkce, křivky, vektory, formy aj. Napříč touto prací budou dále pojmy *varieta* a *hladká varieta* používány jako synonyma, stejně jako *funkce* a *hladké funkce.*

## 1.3 Funkce a křivky na varietách

Funkcí $f$ na varietě $\mathcal{M}$ nazveme zobrazení

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

Každému bodu variety $P$ je tak přiřazena hodnota $f(P)$. Díky lokálním souřadnicím, zavedeným na konkrétní mapě $(\mathcal{U}_P,\Phi)$ náležející bodu $P$, pak můžeme funkci $f$ vyjádřit jako $f = f(\Phi^{-1}) = f(x^1, \ldots ,x^n)$, kde $(x^1, \ldots ,x^n) = \Phi(Q), Q \in \mathcal{U}_P$.

Křivkou na varietě rozumíme diferencovatelné zobrazení $\gamma$, které zobrazuje z $\mathbb{R}$ do variety, tedy

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}.$$

Máme-li tedy otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$, pak $\gamma(t)$, kde $t \in I$, je bod $P \in \mathcal{M}$. Díky lokální mapě $(\mathcal{U}_P,\Phi)$ však křivku $\gamma(t)$ můžeme popsat funkcemi $(x^1(t), \ldots , x^n(t))$.

## 1.4 Vektory a vektorová pole na varietách

Jelikož jsme křivkou definovali *diferencovatelné* zobrazení $\gamma$, můžeme jej derivovat podle parametru. Tato derivace v bodě potom vlastně představuje tečný vektor k dané křivce v daném bodě. Symbolicky tedy

$$\gamma(t), t \in I \subset \mathbb{R} \implies \frac{d\gamma}{dt}(t_0) \in T_m(\mathcal{M}),$$

kde $\gamma(t_0) = m \in \mathcal{M}$ je bod variety a $T_m(\mathcal{M})$ je tzv. *tečný prostor* variety $\mathcal{M}$ v bodě $m$, tedy množina všech tečných vektorů v bodě $m$. Je namístě upřesnit, že s takovouto definicí jsou vektory vlastně třídami ekvivalence křivek, jelikož daným bodem prochází nekonečně mnoho křivek se stejným tečným vektorem.

Uvedeme ještě jeden ekvivalentní způsob zavedení vektorů na varietě. Tečným vektorem v bodě $m \in \mathcal{M}$ lze definovat zobrazení na funkcích takové, že

$$\mathbf{v} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R} \text{ je tečným vektorem, pokud}$$

$$\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f)g(m) + \mathbf{v}(g)f(m) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{v}(f) = \mathbf{v}(g), \text{ pokud } \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{M}, f_{|U} = g_{|U} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g), \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Hladké funkce $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ však tvoří vektorový prostor nekonečné dimenze a i dimenze prostoru vektorů je nekonečná. Existuje ale následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

**Věta 1.** $dim(T_m(\mathcal{M})) = dim(\mathcal{M}) = n.$

Z této formulace plyne, že vektory lze chápat jako zobrazení na funkcích. Tuto ideu nyní zkusíme aplikovat v předešlé definici vektorů, což nám pomůže pochopit definici bázových vektorů v tečném prostoru.

Mějme nyní hladkou funkci $f$ na varietě $\mathcal{M}$ a křivku $\gamma(t)$, jejíž derivace v bodě $m$ definuje tečný vektor $\mathbf{v}$. Funkce $f(\gamma(t))$ je tak restrikce funkce $f$ podél křivky. Tuto funkci tak v bodě $m$ můžeme derivovat podle parametru $t$, což lze taky chápat jako akci vektoru $\mathbf{v}$ na funkci $f$. Protože v okolí bodu $m$ lze zavést lokální mapu, lze také vyjádřit křivku pomocí funkcí $x^i(t)$, jak bylo popsáno výše. Celkově

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt}(m) \equiv \mathbf{v}(f) = \sum_i \frac{\partial f(m)}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \equiv \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(m)$$

Jelikož funkce $f$ může být zcela libovolná, můžeme si ji v daném výrazu „odmyslet“, a dostaneme tak

$$\mathbf{v} = \sum_i v^i \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^i} \tag{1.6}$$

Z tohoto vyjádření plyne, že systém $\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}, \dots, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^n}\right)$ tvoří bázi tečného prostoru $T_m(\mathcal{M})$.

### 1.4.1 Tečný bandl

Tečný bandl $T\mathcal{M}$ je definován jako sjednocení tečných prostorů přes všechny body $m$ variety $\mathcal{M}$, tedy[6]

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} T_m(\mathcal{M}).$$

Platí, že $T\mathcal{M}$ je také varieta a zároveň, pokud $dim(\mathcal{M}) = n$, tak $dim(T\mathcal{M}) = 2n$.

[6] Zcela analogicky je definován kotečný bandl.

Pro libovolný bod $\aleph \in T\mathcal{M}$ platí, že jednoznačně určuje vektor $\mathbf{v}$ a bod $m$ variety tak, že $\mathbf{v} \in T_m(\mathcal{M})$. Díky lokální mapě (souřadnicím) můžeme bod $m$ vyjádřit jako $n$-tici $(x^1, \ldots, x^n)$ a vektor $\mathbf{v}$ jako n-tici $(v^1, \ldots, v^n)$, což jsou jeho souřadnice vůči lokální bázi $\left(\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}, \ldots, \dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^n}\right)$. Bod $\aleph$ pak můžeme přirozeně vyjádřit jako $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$.

### 1.4.2 Vektorové pole

Vektorové pole $\mathbf{X}$ je hladké zobrazení

$$\mathbf{X} : \mathcal{M} \to T\mathcal{M} \text{ takové, že}$$

$$\mathbf{X}(m) \in T\mathcal{M} \implies m \in \mathcal{M} \text{ a } \mathbf{X}(m) \in T_m(\mathcal{M}).$$

Tato identifikace je možná díky definici projekčního zobrazení

$$\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}, \text{ kde}$$

$$\pi(\aleph) = m \iff \mathbf{v} \in T_m(\mathcal{M}), \text{ kde } \aleph = (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) \equiv (m, \mathbf{v}).$$

Z tohoto je také vidět, že pro projekci platí následující identita[7]

$$\pi \circ \mathbf{X} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}. \tag{1.7}$$

Stejně tak jako vektor je zobrazení na funkcích, může i vektorové pole působit na funkce, přičemž

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) : \mathbf{X}f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}).$$

Konkrétně definujeme zobrazení $\mathbf{X}f$ následovně.

**Definice 3.** Je-li $\mathbf{X}$ vektorové pole na varietě $\mathcal{M}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, pak pro libovolný bod $m \in \mathcal{M}$ je

$$\mathbf{X}f(m) \equiv \mathbf{X}(m)(f)$$

Pomocí této definice lze pro vektorové pole dokázat analogický vztah vztahu (1.3).

**Lemma 1.** *Je-li $\mathbf{X}$ vektorové pole na varietě $\mathcal{M}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, potom*

$$\mathbf{X}(fg) = (\mathbf{X}(f))(g) + (\mathbf{X}(g))(f). \tag{1.8}$$

*Důkaz.* $\forall m \in \mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(fg)(m) = \mathbf{X}(m)(fg)(m) = (\mathbf{X}(m)(f))(g)(m) + (\mathbf{X}(m)(g))(f)(m) = \\ = (\mathbf{X}f)(m)g(m) + (\mathbf{X}g)(m)f(m) = [(\mathbf{X}f)g](m) + [(\mathbf{X}g)f](m) = \\ = [(\mathbf{X}f)g + (\mathbf{X}g)f](m)\end{aligned}$$

Q. E. D.

[7] Zobrazení $Id_\spadesuit$ značí identitu na prostoru $\spadesuit$.

Vzhledem k tomu, že vektorové pole je hladkým zobrazením, indukuje na varietě tzv. *integrální křivky.*[8] Lze říci, že $\gamma(t)$ je integrální křivka vektorového pole $\mathbf{X}$, jestliže derivace křivky $\gamma$ v bodě $m$ podle $t$, což je tečný vektor dané křivky v $m$, je totožný s $\mathbf{X}(m)$ pro každé $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$. Platí, že každým bodem variety prochází nějaká integrální křivka. Protože tyto křivky tedy pokrývají celou varietu, může být pomocí nich definováno zobrazení variety na sebe samu. Toto zobrazení

$$\phi : I \times \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

které definuje pro každé $t \in I$ zobrazení

$$\phi^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

předpisem

$$\phi^t(m) = \gamma(t) \text{ kde } \gamma(0) = m$$

a zobrazení

$$\begin{gathered}\phi_m : I \to \mathcal{M}, \\ \phi_m(t) = \gamma(t), \text{ kde opět } \gamma(0) = m.\end{gathered}$$

Zobrazení $\phi^t$ se nazývá *tok* vektorového pole $\mathbf{X}$. Z vlastnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic plyne, že

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}.$$

Toto zobrazení lze kromě „přenosu bodů" na varietě využít i k definici přenosu dalších objektů. Dále tedy definujeme zobrazení *push-forward* vektorů a *pull-back* 1-forem. Zobrazení

$$(\phi^t_m)_* : T_m\mathcal{M} \to T_{\phi_m(t)}\mathcal{M},$$

nazveme push-forward vektoru. Jinak řečeno, zobrazení $\phi^t_m$ je vlastně integrální křivkou vektorového pole $\mathbf{X}$, která prochází bodem $m$. Zobrazení $(\phi^t_m)_*$ potom zobrazuje vektory z tečného prostoru variety $\mathcal{M}$ v bodě $m$, na tečné vektory křivky $\phi_m$ v bodě $t$. Toto zobrazení nám tak vlastně dává tečné vektory podél křivky $\phi_m$. Neboli platí, že

$$(\phi^t_m)_* \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right)_m \equiv \mathbf{X}(\phi^t_m) = \frac{d}{dt}\phi^t_m\Big|_{t=0}. \tag{1.9}$$

Zobrazení push-forwardu (a tím pádem i pull-backu) definujeme ještě trochu obecněji. Pull-back 1-forem se totiž definuje jako[9]

$$(\phi^*\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{v}) \equiv \boldsymbol{\alpha}(\phi_*(\mathbf{v})). \tag{1.10}$$

Poznamenejme, že vektorové pole se nazývá *úplné*, pokud jeho tok má prodloužení na celé $\mathbb{R} \supset I$. Je známo, že na kompaktní varietě je každé vektorové pole úplné, viz [9].

[8] Tento pojem v další kapitole ještě explicitně definujeme.
[9] Pro přehlednost bez explicitní specifikace bodů.

### 1.4.3 Doplnění k push-forwardu

Zde definujeme push-forward jakoukoliv difeomorfní funkcí. Dokonce jej můžeme definovat mezi libovolnými difeomorfními hladkými varietami $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

**Definice 4.** Mějme $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ difeomorfismus mezi varietami $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Potom zobrazení

$$F_{*m} : T_m\mathcal{M} \to T_{F(m)}\mathcal{N},$$

které definujeme předpisem

$$F_{*m}\mathbf{v}_m(f) \equiv \mathbf{v}_m(f \circ F),$$

nazveme *push-forward vektoru* $\mathbf{v}_m$ *zobrazením* $F$.

Zároveň pro push-forward složeným zobrazením požadujeme

$$(F \circ G)_{*m} \equiv F_{*G(m)} \circ G_{*m}.$$

**Intermezzo 1.** Speciálně, pokud $F \equiv \gamma$ je křivka na $\mathcal{M}$ a $\mathbf{v}_m \equiv \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right)_m$, potom

$$\gamma_{*m}\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right)_m f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma).$$

## 1.5 Formy na varietách

1-formou v bodě $m$ variety $\mathcal{M}$ nazveme lineární zobrazení

$$\boldsymbol{\alpha} : T_m(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}.$$

Z obecných definic součtu zobrazení a násobení zobrazení skalárem, jsou-li $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ 1-formy a $\xi \in \mathbb{R}$, pak

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})(\mathbf{v}) \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{v}) \tag{1.11}$$

$$(\xi\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{v}) \equiv \xi\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}). \tag{1.12}$$

Z toho plyne, že formy v bodě $m$ variety $\mathcal{M}$ tvoří vektorový prostor. Tento prostor se značí $T_m^*(\mathcal{M})$ a nazývá se *kotečný prostor*.

Teď se podívejme na výraz $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})$. Tento výraz znamená, že máme dánu konkrétní formu $\boldsymbol{\alpha}$, kterou vyhodnocujeme na různých vektorech, zde na vektoru $\mathbf{v}$. Stejně tak ale můžeme držet konstantní vektor $\mathbf{v}$ a za proměnnou brát formy, které na něm budeme vyhodnocovat. To bychom zapsali jako $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha})$, tedy vektor $\mathbf{v}$ vyhodnocený na formě $\boldsymbol{\alpha}$, což definujeme

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}). \tag{1.13}$$

Tím je role vektorů a forem symetrizovaná, což nám dovoluje zavést nové označení

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}), \tag{1.14}$$

čemuž se říká *zúžení* vektoru a formy. Nyní budeme chtít nalézt bázi forem na varietě, předtím se ale znovu podíváme na totální diferenciál funkce.

Totální diferenciál $\mathbf{d}f$ funkce $f$ je v diferenciální geometrii definován jako

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{v}(f) = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{1.15}$$

Nyní nalezneme bázi forem. Mějme bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ vektorů v $T_m(\mathcal{M})$. Lze definovat tzv. *duální bázi*[4] forem k bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $T^*_m(\mathcal{M})$, $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ tak, aby platilo

$$\langle \epsilon^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j. \tag{1.16}$$

### 1.5.1 Diferenciální formy a jejich duální báze

Použitím vztahu (1.15), kde za $f$ dosadíme přímo funkce souřadnicových čar $x^i$ a za vektor $\mathbf{v}$ dosadíme bázové vektory v $T_m(\mathcal{M})$, dostaneme

$$\langle \mathbf{d}x^i, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j} \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Je tedy vidět, že systém $(\mathbf{d}x^1, \ldots, \mathbf{d}x^n)$ tvoří duální bázi tzv. *diferenciálních forem*,[5] které vzápětí zavedeme.

**Definice 5.** Nechť $\Lambda(T^*\mathcal{M})$ označuje tzv. vnější algebru kotečného bandlu, viz např. [7]. Potom libovolné hladké zobrazení

$$\omega : \mathcal{M} \to \Lambda(T^*\mathcal{M}),$$

které (tudíž) lze obecně vyjádřit jako

$$\omega = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \omega_I \mathbf{d}x^I, \tag{1.17}$$

kde $\omega_I \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ a pro $I = \{\imath_1, \ldots, \imath_n\}$ je $\mathbf{d}x^I = \mathbf{d}x^{\imath_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{\imath_n}$, nazveme *diferenciální formou* na $\mathcal{M}$. Navíc, je-li $|I| \equiv k \in \{1, \ldots, n\}$, nazýváme ji *diferenciální $k$-formou* na $\mathcal{M}$. Prostor všech diferenciálních $k$-forem na $\mathcal{M}$ budeme značit $E^k(\mathcal{M})$.

**Definice 6.** Nechť $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ je difeomorfismus. Pak definujeme pull-back diferenciální formy $\omega$ na $\mathcal{M}$ předpisem

$$F^*_m(\omega) \equiv \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (\omega_I \circ F) F^*_m(\mathbf{d}x^I), \tag{1.18}$$

kde

$$F^*_m(\mathbf{d}x^I) \equiv F^*_m(\mathbf{d}x^{\imath_1}) \wedge \cdots \wedge F^*_m(\mathbf{d}x^{\imath_n}) \tag{1.19}$$

a $F^*_m(\mathbf{d}x^\imath) = \mathbf{d}(x^\imath \circ F)$.

[4] Tedy $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \boldsymbol{\epsilon}^i$.

[5] Těmito definicemi a vztahy jsme tak precizněji odůvodnili vztah (1.2) a zároveň jej rozšířili i na funkce na varietě.

### 1.5.2 Pull-back 1-forem

V této části uvedeme příklad na pull-back 1-forem, kterým demonstrujeme aplikaci vzorce (1.10), byť by výpočet pomocí Definice 6 byl snazší. Předpokládejme, že máme formu

$$\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{d}x)^2 + (\mathbf{d}y)^2,$$

kde například

$$(\mathbf{d}x)^2 \equiv \mathbf{d}x \odot \mathbf{d}x \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{d}x \otimes \mathbf{d}x + \mathbf{d}x \otimes \mathbf{d}x\right).$$

Formu $\boldsymbol{\nu}$ tvoří 1-formy příslušející kartézským souřadnicovým čarám. Budeme chtít na základě předcházejících definic vyjádřit formy $(\mathbf{d}x)^2, (\mathbf{d}y)^2$ jako kombinaci 1-forem příslušejících polárním souřadnicovým čarám.(Poznamenejme však, že celý výpočet se zjednoduší, víme-li, že pull-back a diferenciál jsou záměnné.) Naše varieta je tedy $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^2$. Nechť zobrazení $\phi$ je definováno

$$\phi : (r,\varphi) \mapsto (rcos\varphi, rsin\varphi),$$

jde tedy o zobrazení

$$\mathbb{R}^2[r,\varphi] \to \mathbb{R}^2[x,y].$$

V tomto příkladu budeme chtít spočítat

$$\phi^*\left((\mathbf{d}x)^2 + (\mathbf{d}y)^2\right).$$

Ještě musíme definovat přenos kvadrátu formy. Konkrétně

$$\phi^*(\mathbf{d}x)^2 \equiv (\phi^*\mathbf{d}x)^2.$$

Společně s definičním vztahem (1.18) dostáváme

$$\phi^*\left((\mathbf{d}x)^2 + (\mathbf{d}y)^2\right) = (\phi^*\mathbf{d}x)^2 + (\phi^*\mathbf{d}y)^2.$$

Úlohu tak můžeme vyřešit pro obě 1-formy zvlášť. Nejprve se podívejme na 1--formu $\mathbf{d}x$. Jelikož přenosem dostaneme formu ve výchozím prostoru, můžeme ji vyjádřit v tamější bázi. Proto

$$\phi^*(\mathbf{d}x) = \alpha\mathbf{d}r + \beta\mathbf{d}\varphi.$$

Musíme najít koeficienty $\alpha$ a $\beta$. Pro to stačí pozorování

$$\phi^*(\mathbf{d}x)\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}r}\right) = \alpha\mathbf{d}r\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}r}\right) + \beta\mathbf{d}\varphi\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}r}\right) = \alpha\frac{dr}{dr} + \beta\frac{d\varphi}{dr} = \alpha,$$
$$\phi^*(\mathbf{d}x)\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\right) = \alpha\mathbf{d}r\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\right) + \beta\mathbf{d}\varphi\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\right) = \alpha\frac{dr}{d\varphi} + \beta\frac{d\varphi}{d\varphi} = \beta.$$

Díky tomu můžeme dle definic počítat

$$\phi^*(\mathbf{d}x)\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}r}\right) = \mathbf{d}x\left(\phi_*\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}r}\right).$$

Výraz $\left(\phi_* \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r}\right)$ je vektor, čili zobrazení na funkcích. Zkusíme tedy tímto výrazem zapůsobit na testovací funkci.

$$\left(\phi_* \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial r}(f \circ \phi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \phi\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \phi\right) \frac{\partial \phi_2}{\partial r} =$$

$$= \left[cos\varphi \left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x}\right) + sin\varphi \left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y}\right)\right] f \circ \phi.$$

Odtud tedy plyne

$$\left(\phi_* \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r}\right) = cos\varphi \left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x}\right) + sin\varphi \left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y}\right),$$

což dává

$$\alpha = cos\varphi.$$

Stejně pro koeficient $\beta$ dostaneme

$$\beta = \left(\phi^* \mathbf{d}x \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} \varphi}\right) = \mathbf{d}x \left(\phi_* \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} \varphi}\right) = \mathbf{d}x \left(-rsin\varphi \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x} + rcos\varphi \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y}\right) = -rsin\varphi.$$

Nyní zbývá vyřešit pull-back formy $\mathbf{d}y$. Stejně jako v předchozím lze vyjádřit

$$\phi^*(\mathbf{d}y) = \zeta \mathbf{d}r + \eta \mathbf{d}\varphi,$$

potom

$$\zeta = \phi^* \mathbf{d}y \left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r}\right) = \mathbf{d}y \left(\phi_* \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r}\right) = \mathbf{d}y \left(cos\varphi \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x} + sin\varphi \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y}\right) = sin\varphi,$$

$$\eta = \phi^* \mathbf{d}y \left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} \varphi}\right) = \mathbf{d}y \left(\phi_* \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} \varphi}\right) = \mathbf{d}y \left(-rsin\varphi \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x} + rcos\varphi \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y}\right) = rcos\varphi.$$

Nakonec tudíž obdržíme

$$\phi^*(\boldsymbol{\nu}) = (\mathbf{d}r)^2 + r^2(\mathbf{d}\varphi)^2.$$

## 1.6 Vnější diferenciál

**Definice 7.** Je-li $\omega$ diferenciální $k$-forma na $\mathcal{M}$ a $\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_k$ je $k+1$ vektorových polí na $\mathcal{M}$, pak definujme

$$\boldsymbol{d}\omega\left(\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_k\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \mathbf{X}_i(\omega(\mathbf{X}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{X}}_i, \ldots, \mathbf{X}_k)) +$$

$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], \mathbf{X}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{X}}_i, \ldots, \widehat{\mathbf{X}}_j, \ldots, \mathbf{X}_k)),$$

kde $\widehat{\mathbf{X}}_i$ znamená vynechání příslušného pole, tedy

$$\omega(\mathbf{X}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{X}}_i, \ldots, \mathbf{X}_k) = \omega(\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_{i+1}, \ldots, \mathbf{X}_k).$$

Operátor

$$\boldsymbol{d} : E^k(\mathcal{M}) \to E^{k+1}(\mathcal{M}),$$

nazveme vnějším diferenciálem.

**Intermezzo 2.** Ukážeme, že tato definice alespoň v případě 0-formy, tedy funkce, dává očekávaný výsledek.

Mějme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Podle předchozí definice je

$$\boldsymbol{d}f\,(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f,$$

Speciálně například $\boldsymbol{d}f\left(\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$.

Zároveň protože $\boldsymbol{d}f$ je 1-forma, můžeme psát $\boldsymbol{d}f = \sum_i \alpha_i \mathbf{d}x^i$, potom

$$\boldsymbol{d}f\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{d}x^i\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\right) = \sum_i \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Celkem tedy

$$\boldsymbol{d}f = \sum_i \boldsymbol{d}f\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^i}\mathbf{d}x^i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathbf{d}x^i,$$

jak jsme uvedli v 1.1.

## 1.7 Komutátor vektorových polí

**Definice 8.** Mějme vektorová pole $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ na varietě $\mathcal{M}$. Pak definujeme komutátor $[\bullet,\bullet]$ pole $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jako

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] \equiv \mathbf{XY} - \mathbf{YX}.$$

Tato definice platí ve smyslu rovnosti zobrazení. Pokud tedy máme hladkou funkci $f$ na $\mathcal{M}$, je třeba ji chápat ve smyslu

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f).$$

**Intermezzo 3.** Nyní se podíváme na komutátor v lokálních souřadnicích. Budeme přitom používat Einsteinovu sumační konvenci. Mějme na varietě $\mathcal{M}$ vektorová pole $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, které v okolí libovolného bodu vyjádříme pomocí lokálních souřadnic $x^i$ jako $\mathbf{X} = X^i\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^i} \equiv X^i\boldsymbol{\partial}_i$, $\mathbf{Y} = Y^i\boldsymbol{\partial}_i$, stejně tak hladkou funkci $f$ na $\mathcal{M}$ jako funkci $x^i$. Pak

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]f = X^i\partial_i\left(Y^j\partial_j\right)f - Y^j\partial_j\left(X^i\partial_i\right)f = \left(X^i\partial_i(Y^j)\partial_j - Y^j\partial_j(X^i)\partial_i\right)f,$$

čili pak můžeme psát

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = X^i\partial_i(Y^j)\boldsymbol{\partial}_j - Y^j\partial_j(X^i)\boldsymbol{\partial}_i.$$

# 2. Základy hamiltonovských systémů na symplektických varietách

V této kapitole již definujeme opět o něco pokročilejší pojmy, které budou důležité v Liouvillově–Arnoldově větě. Předpokládáme znalost *vnější algebry vektorového prostoru* i *vnějšího součinu*.

## 2.1 Varieta a symplektická 2-forma

**Definice 9.** Bilineární 2-formu $\omega$ na vektorovém prostoru nazveme *symplektickou 2-formou* (zkráceně *symplektickou formou*), jestliže $\omega$ je antisymetrická a nedegenerovaná.

**Definice 10.** Nechť $\mathcal{M}$ je varieta. Dvojici $(\mathcal{M},\omega)$ nazveme *symplektickou varietou*, pokud $\omega$ je uzavřená diferenciální 2-forma a v každém bodě $m \in \mathcal{M}$ je $\omega_m : T_m\mathcal{M} \times T_m\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ symplektická 2-forma. Formu $\omega$ nazýváme také *symplektickou 2-formou.*

**Intermezzo 4.** Mějme hladké funkce $f$ a $g$. Vlastnosti $\omega$ z předchozích definice lze shrnout následovně.[10]

$$\omega(\mathbf{X},f\mathbf{Y_1}+g\mathbf{Y_2}) = f\omega(\mathbf{X},\mathbf{Y_1}) + g\omega(\mathbf{X},\mathbf{Y_2}), \tag{2.1}$$

$$\omega(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = -\omega(\mathbf{Y},\mathbf{X}), \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{d}\omega = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

Nedegenerovanost znamená

$$\exists \mathbf{X} \in T\mathcal{M} : \forall \mathbf{Y} \in T\mathcal{M} : \omega(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 0 \implies \mathbf{X} = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

**Definice 11.** Zobrazení

$$i_\bullet\omega : T\mathcal{M} \to T^*\mathcal{M},$$

definované předpisem

$$i_\mathbf{X}\omega \equiv \omega(\mathbf{X},\bullet), \tag{2.5}$$

nazveme vložení pole $\mathbf{X}$ do $\omega$.

**Věta 2** (Darbouxova)**.** *Nechť $(\mathcal{M},\omega)$ je symplektická varieta a $x$ bod na $\mathcal{M}$. Pak existuje okolí $U$ bodu $x$ a souřadnice $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ tak, že formu $\omega$ můžeme vyjádřit lokálně*

$$\omega_{|U} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i \equiv \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i,$$

*tj. v tzv. standardní formě.*

[10] Bilinearita plyne kombinací (2.1) a (2.2).

*Důkaz Věty 2.* Čtenář může nalézt například v [5]. Q. E. D.

Symplektickou formu $\omega$ lze tedy v okolí každého bodu $m$ variety definovat symplektickou formou $\omega_m$ vyjádřenou ve standardní formě vůči nějaké bázi na okolí bodu $m$.

**Definice 12.** Symplektickou formu $\omega$ nazveme *exaktní*, pokud existuje forma $\theta$ tak, že $\omega = \boldsymbol{d}\theta$.

> **Intermezzo 5.** Spíše pro zajímavost nyní uděláme krátkou odbočku pro důkaz zajímavého tvrzení, které však svou náplní stojí (poněkud) mimo dosavadní text.
>
> **Tvrzení 1.** *Nechť $(\mathcal{M}, \omega)$ je symplektická a kompaktní varieta. Pak $\omega$ není exaktní.*
>
> *Důkaz tvrzení 1.* Protože $\mathcal{M}$ je kompaktní, pak jistě existuje
>
> $$\int_{\mathcal{M}} \omega^{\wedge n},$$
>
> tzv. objem, který je navíc nenulový. Pro spor předpokládejme, že $\omega$ je exaktní. Potom
>
> $$0 \neq \int_{\mathcal{M}} \omega^{\wedge n} = \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{d}\theta \wedge \omega^{\wedge(n-1)} \overset{11}{=} \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{d}\left(\theta \wedge \omega^{\wedge(n-1)}\right) = \int_{\partial\mathcal{M}=\emptyset} \theta \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = 0,$$
>
> kde jsme v předposlední rovnosti využili Stokesovu větu. Q. E. D.

## 2.2 Hamiltonovský systém a dynamika

**Definice 13.** Buď $(\mathcal{M}, \omega)$ symplektická varieta a $H : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom $(\mathcal{M}, \omega, H)$ nazýváme *hamiltonovským systémem*. Takovéto funkci odpovídá na symplektické varietě vektorové pole $\mathbf{X}_H$, přičemž toto pole musí splňovat rovnici[12]

$$i_{\mathbf{X}_H}\omega = \boldsymbol{d}H. \tag{2.6}$$

Je dobré si ihned všimnout, že výše uvedená rovnice definující vektorové pole $\mathbf{X}_H$ dané funkci $H$ určuje jen algebraické podmínky. Na nějakém okolí $U$ libovolného bodu $m$ variety $\mathcal{M}$ totiž díky lokální mapě máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial H}{\partial q^i}\bigg|_U \mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg|_U \mathbf{d}p_i \right), \\
\omega &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i, \\
\mathbf{X}_H &= \sum_{j=1}^{n} \left( a_j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} + b_j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} \right).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

[11] Protože $\boldsymbol{d}\omega = 0$.

[12] Zde sice pod funkcí $H$ máme implicitně na mysli Hamiltonovu funkci, ovšem tato definice platí obecně pro libovolnou $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Pak díky definici vnějšího součinu, kterou zde alespoň jednou explicitně připomeneme

$$\mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i \equiv \mathbf{d}q^i \otimes \mathbf{d}p_i - \mathbf{d}p_i \otimes \mathbf{d}q^i,$$

následně dostaneme

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{X}_H}\omega = \omega\left(\mathbf{X}_H, \bullet\right) &= \sum_i \left(\mathbf{d}q^i \otimes \mathbf{d}p_i - \mathbf{d}p_i \otimes \mathbf{d}q^i\right)\left(\mathbf{X}_H, \bullet\right) = \\ &= \sum_i \left(\mathbf{d}q^i\left(\mathbf{X}_H\right)\mathbf{d}p_i\left(\bullet\right) - \mathbf{d}p_i\left(\mathbf{X}_H\right)\mathbf{d}q^i\left(\bullet\right)\right) = \sum_i \left(a_i \mathbf{d}p_i - b_i \mathbf{d}q^i\right). \end{aligned}$$

Celkově tedy máme pro pole $\mathbf{X}_H$ dány algebraické podmínky

$$a_i = \left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_U, \qquad b_i = -\left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_U. \tag{2.8}$$

**Definice 14.** Řekneme, že křivka (trajektorie) $\gamma : I \to \mathcal{M}$ řeší Hamiltonovy pohybové rovnice, pokud je integrální křivkou Hamiltonova pole $\mathbf{X}_H$, tj.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{X}_H. \tag{2.9}$$

Podívejme se na konsekvenci definice výše přepisem do lokálních souřadnic. Mějme na varietě $\mathcal{M}$ hamiltonovské vektorové pole, přičemž rovnici (2.9) napíšeme v lokálních souřadnicích na okolí $U$ nějakého bodu $m$ variety $\mathcal{M}$. Křivka $\gamma$ má v lokálních souřadnicích tvar $\gamma(t) = (q^1(t), \ldots, q^n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$. Celkově

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_U &= \left.\left(\frac{dq^1}{dt}, \ldots, \frac{dq^n}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \ldots, \frac{dp_n}{dt}\right)\right|_U = \\ &= \sum_{i=1}^n \left.\left(\frac{dq^i}{dt}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i} + \frac{dp_i}{dt}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_i}\right)\right|_U \equiv \sum_{i=1}^n \left(\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_U \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i} - \left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_U \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_i}\right). \end{aligned}$$

Porovnáním těchto sum dostaneme

$$\left.\frac{dq^i}{dt}\right|_U = \left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_U, \qquad \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_U = -\left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_U,$$

čímž jsme skutečně dostali Hamiltonovy kanonické rovnice známé z mechaniky.

**Definice 15.** Mějme funkce $f, g$ na varietě $\mathcal{M}$. Potom zobrazení

$$\{f, g\} \equiv \omega\left(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g\right) \equiv i_{\mathbf{X}_g}\left(i_{\mathbf{X}_f}\omega\right) \tag{2.10}$$

nazveme Poissonovou závorkou funkcí $f$ a $g$.

Opět se pro lepší porozumění můžeme podívat na Poissonovy závorky v dané lokální mapě variety. Jestliže máme na okolí libovolného bodu $m$ variety $\mathcal{M}$ lokální mapu s takovými souřadnicemi $(q^i, p_i)$ tak, aby

$$\omega = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i$$

a máme-li na $\mathcal{M}$ definované funkce $f, g$, pak jejich vektorová pole na okolí bodu $m$ jsou

$$\mathbf{X}_f = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_i} \right),$$
$$\mathbf{X}_g = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_i} \right).$$

Díky tomu pro libovolný bod $\tilde{m}$ z okolí bodu $m$ máme

$$\begin{aligned}\{f, g\}(\tilde{m}) = \omega_{\tilde{m}} \left(\mathbf{X}_f(\tilde{m}), \mathbf{X}_g(\tilde{m})\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i \left(\mathbf{X}_f(\tilde{m}), \mathbf{X}_g(\tilde{m})\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) (\tilde{m}).\end{aligned}$$

Z toho také plynou tzv. *fundamentální Poissonovy závorky*

$$\{q^i, q^j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q^i, p_j\} = -\delta^i_j. \tag{2.11}$$

**Věta 3** (Vlastnosti Poissonových závorek)**.** *Mějme funkce $f$ a $g$ na varietě $\mathcal{M}$, $\mathbf{X}_H$ Hamiltonovské vektorové pole. Pak Poissonova závorka splňuje* [13]

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{2.12}$$
$$\{f, g\} = \mathbf{X}_g f \tag{2.13}$$
$$\mathbf{X}_{\{f,g\}} = -[\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g] \tag{2.14}$$
$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\} \tag{2.15}$$
$$0 = \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}. \tag{2.16}$$

*Důkaz věty 3.* Vlastnost (2.12) plyne přímo z definice Poissonovy závorky díky antisymetrii symplektické formy.

Pro ukázání platnosti rovnosti (2.13) počítejme

$$\{f,g\} = i_{\mathbf{X}_g}(i_{\mathbf{X}_f}\omega) = i_{\mathbf{X}_g}\boldsymbol{d}f = \langle \boldsymbol{d}f, \mathbf{X}_g\rangle = \mathbf{X}_g f.$$

Nyní ke vztahu (2.14). Zde užijeme vlastnost uzavřenosti symplektické formy a definici vnějšího diferenciálu. Pro každou $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ a $\mathbf{Z}$ vektorové pole na $\mathcal{M}$ je

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{d}\omega \left(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g, \mathbf{Z}\right) = \mathbf{X}_f\omega\left(\mathbf{X}_g, \mathbf{Z}\right) - \mathbf{X}_g\omega\left(\mathbf{X}_f, \mathbf{Z}\right) + \mathbf{Z}\omega\left(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g\right) - \\ &\quad -\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g], \mathbf{Z}\right) + \omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{Z}], \mathbf{X}_g\right) - \omega\left([\mathbf{X}_g, \mathbf{Z}], \mathbf{X}_f\right) = \\ &= \mathbf{X}_f\langle \boldsymbol{d}g, \mathbf{Z}\rangle - \mathbf{X}_g\langle \boldsymbol{d}f, \mathbf{Z}\rangle + \mathbf{Z}\langle \boldsymbol{d}f, \mathbf{X}_g\rangle + i_{\mathbf{Z}}\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]\right) - \langle \boldsymbol{d}g, [\mathbf{X}_f, \mathbf{Z}]\rangle + \\ &\quad + \langle \boldsymbol{d}f, [\mathbf{X}_g, \mathbf{Z}]\rangle = \mathbf{X}_f\left(\mathbf{Z}g\right) - \mathbf{X}_g\left(\mathbf{Z}f\right) + \mathbf{Z}\left(\mathbf{X}_g f\right) + i_{\mathbf{Z}}\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]\right) - \\ &\quad -[\mathbf{X}_f, \mathbf{Z}]g + [\mathbf{X}_g, \mathbf{Z}]f = \mathbf{X}_f\left(\mathbf{Z}g\right) + i_{\mathbf{Z}}\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]\right) - [\mathbf{X}_f, \mathbf{Z}]g = \\ &= i_{\mathbf{Z}}\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]\right) + \mathbf{Z}\left(\mathbf{X}_f g\right) = -\mathbf{Z}\{f, g\} + i_{\mathbf{Z}}\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]\right). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}\{f, g\} = i_{\mathbf{Z}}\omega\left([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]\right) \implies \boldsymbol{d}\{f, g\}\mathbf{Z} = -i_{[\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]}\omega\left(\mathbf{Z}\right)\ \forall \mathbf{Z} \implies \\ \implies \boldsymbol{d}\{f, g\} = -i_{[\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]}\omega \implies \mathbf{X}_{\{f,g\}} = -[\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g].\end{aligned}$$

[13] Vztah (2.16) se nazývá Jacobiho identita.

Pro důkaz vlastnosti (2.15), čili „leibnizovskosti“ provedeme nejprve pomocný výpočet

$$\omega\left(\mathbf{X}_{gh},\mathbf{Z}\right)=\langle\boldsymbol{d}(gh),\mathbf{Z}\rangle=h\langle\boldsymbol{d}g,\mathbf{Z}\rangle+g\langle\boldsymbol{d}h,\mathbf{Z}\rangle=h\omega\left(\mathbf{X}_g,\mathbf{Z}\right)+g\omega\left(\mathbf{X}_h,\mathbf{Z}\right)=$$
$$=\omega\left(h\mathbf{X}_g,\mathbf{Z}\right)+\omega\left(g\mathbf{X}_h,\mathbf{Z}\right)\implies\mathbf{X}_{gh}=h\mathbf{X}_g+g\mathbf{X}_h.$$

Díky tomuto výsledku a již dokázaným vztahům (2.12) a (2.13) máme

$$\begin{aligned}\omega\left(\mathbf{X}_{\{f,gh\}},\mathbf{Z}\right)&=\omega\left(-[\mathbf{X}_f,\mathbf{X}_{gh}],\mathbf{Z}\right)=\omega\left([h\mathbf{X}_g+g\mathbf{X}_h,\mathbf{X}_f],\mathbf{Z}\right)=\\&=\omega\left(h[\mathbf{X}_g,\mathbf{X}_f]-\mathbf{X}_fh\left(\mathbf{X}_g\right)+g[\mathbf{X}_h,\mathbf{X}_f]-\mathbf{X}_fg\left(\mathbf{X}_h\right),\mathbf{Z}\right)=\\&=\omega\left(h\mathbf{X}_{\{f,g\}}+\{f,h\}\mathbf{X}_g+g\mathbf{X}_{\{f,h\}}+\{f,g\}\mathbf{X}_h,\mathbf{Z}\right)=\\&=\omega\left(\mathbf{X}_{h\{f,g\}}+\mathbf{X}_{g\{f,h\}},\mathbf{Z}\right)\implies\\&\implies\mathbf{X}_{\{f,gh\}}=\mathbf{X}_{h\{f,g\}}+\mathbf{X}_{g\{f,h\}}\implies\\&\implies\{f,gh\}=h\{f,g\}+g\{f,h\}.\end{aligned}$$

A konečně důkaz Jacobiho identity

$$\begin{aligned}&\{\{f,g\},h\}+\{\{h,f\},g\}+\{\{g,h\},f\}=\\&=-\mathbf{X}_{\{f,g\}}h-\mathbf{X}_{\{h,f\}}g-\mathbf{X}_{\{g,h\}}f=\\&=[\mathbf{X}_f,\mathbf{X}_g]h+[\mathbf{X}_h,\mathbf{X}_f]g+[\mathbf{X}_g,\mathbf{X}_h]f=\\&=\mathbf{X}_f\mathbf{X}_gh-\mathbf{X}_g\mathbf{X}_fh+\mathbf{X}_h\mathbf{X}_fg-\mathbf{X}_f\mathbf{X}_hg+\mathbf{X}_g\mathbf{X}_hf-\mathbf{X}_h\mathbf{X}_gf=\\&=\mathbf{X}_f\left(\{h,g\}-\{g,h\}\right)+\mathbf{X}_g\left(\{f,h\}-\{h,f\}\right)+\mathbf{X}_h\left(\{g,f\}-\{f,g\}\right)=\\&=-2\left(\mathbf{X}_f\{g,h\}+\mathbf{X}_g\{h,f\}+\mathbf{X}_h\{f,g\}\right)=\\&=-2\{\{g,h\}f\}-2\{\{h,f\},g\}-2\{\{f,g\},h\}\end{aligned}$$

Převedením pravé strany na stranu levou a vydělením daným násobkem dostáváme zmíněnou identitu z tvrzení, čímž je důkaz věty dokončen. Q. E. D.

**Definice 16.** Dvojici $(\mathcal{P},\{\bullet,\bullet\})$, kde $\mathcal{P}$ je komutativní a asociativní algebrou, nazveme Poissonovou algebrou, pokud $\{\bullet,\bullet\}$ splňuje Leibnizovo a Jacobiho pravidlo. (Viz [5].)

Pokud máme $(\mathcal{M},\omega)$ symplektickou varietu, pak díky vlastnostem Poissonových závorek, dvojice $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}),\{\bullet,\bullet\})$, kde $\{\bullet,\bullet\}$ je Poissonova závorka, je Poissonova algebra, jak jsme dokázali v předchozí větě.

**Definice 17.** Funkci $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ nazveme integrálem pohybu hamiltonovského systému $(\mathcal{M},\omega,H)$, jestliže

$$\{f,H\}=0. \tag{2.17}$$

Nyní je už snadné formulovat a elegantně dokázat následující větu.

**Věta 4** (O integrálech pohybu)**.** *Jestliže $f$ na souvislé varietě $\mathcal{M}$ je integrálem pohybu hamiltonovského systému $(\mathcal{M},\omega,H)$ a křivka $\gamma$ řeší Hamiltonovy pohybové rovnice, pak*

$$f\circ\gamma=const.$$

*Důkaz věty 4.* Počítejme

$$\frac{d}{dt}f\circ\gamma=\gamma_*\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}t}\right)f=\mathbf{X}_Hf=\{f,H\}=0.$$

Q. E. D.

# 3. Liouvillova–Arnoldova věta

Před zněním samotné věty uvedeme ještě tři důležité definice.

**Definice 18.** Řekneme, že funkce $f$ a $g$ jsou v involuci, jestliže jejich Poissonova závorka je nulová.

**Definice 19.** Mějme $n$ funkcí $f_i$ na varietě $\mathcal{M}$. Řekneme, že jsou navzájem lineárně nezávislé, jestliže jsou lineárně nezávislé 1-formy $\boldsymbol{d}f_i$ v každém bodě $\mathcal{M}$.

**Definice 20.** Mějme $n$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$. Pak množina

$$K = K(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

se nazývá mříž.

V této kapitole bude pro nás *torem* varieta $\mathbb{R}^n/K$, kde $K$ je libovolná mříž v $\mathbb{R}^n$. Liouville a Arnold dokázali, že pokud máme hamiltonovský systém s $n$ stupni volnosti (tedy fázový prostor dimenze $2n$) a pokud známe alespoň $n$ integrálů pohybu, které jsou navzájem v involuci, pak je daný systém „řešitelný“ ve smyslu následující věty.

Čtenáři před čtením důkazu Věty 5 doporučujeme nejprve přečíst kapitolu Dodatky.

**Věta 5** (Liouvillova–Arnoldova). *Předpokládejme, že známe $n$ funkcí $f_i$, které jsou po dvou v involuci na varietě dimenze $2n$. Uvažme vrstevnici funkcí $f_i$, tedy*

$$\mathcal{M}_f \equiv \{x \in \mathcal{M} \mid f_i(x) = c_i, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

*Zároveň nechť jsou všechny tyto funkce na $\mathcal{M}_f$ lineárně nezávislé. Potom*

*I. $\mathcal{M}_f$ je hladká varieta.*

*II. Pokud je $\mathcal{M}_f$ kompaktní a souvislá, pak je difeomorfní $n$-dimenzionálnímu toru $T^n$.*

*III. Tok generovaný Hamiltonovou funkcí $H$ na $\mathcal{M}_f$ určuje periodický pohyb.*

*IV. Systém popsaný Hamiltonovo kanonickými rovnicemi je integrabilní.*

Důkaz Věty 5 rozdělíme do několika částí. Dokážeme jen body $I, II$, pro body $III, IV$ viz [1], str. 279 - 284.

*Důkaz části $I$.* Ukažme, že $\mathcal{M}_f$ je skutečně varieta. Podle předpokladu $\mathcal{M}_f$ je vrstevnicí funkcí $f_i$, tedy

$$f_i(x) = c_i, \quad \forall x \in \mathcal{M}_f, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Redefinujme

$$F_i(x) \equiv f_i(x) - c_i = 0, \quad \forall x \in \mathcal{M}_f, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Protože jsou funkce $f_i$ lineárně nezávislé, jsou zřejmě lineárně nezávislé i $F_i$. Zároveň z lineární nezávislosti plyne

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1} & \frac{\partial F_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x^1} & \frac{\partial F_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x^1} & \frac{\partial F_n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x^n} \end{pmatrix} (\tilde{m}) \neq 0 \quad \tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{2n}).$$

Potom podle věty o implicitních funkcích existuje okolí $U$ bodu $(\tilde{m}_{n+1}, \dots, \tilde{m}_{2n})$ a okolí $U'$ bodu $(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n)$ tak, že

$$\begin{gathered} \forall (y^1, \dots, y^n) \in U \;\; \exists! (x^1, \dots, x^n) \in U' : \\ F_1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ F_2(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0. \end{gathered}$$

Pak $y^i = \varphi_i(\mathbf{x}),\ i \in \{1, \dots, n\},\ \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$. Navíc $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$, $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Tedy můžeme zavést

$$\Phi \equiv (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \to \mathbb{R}^n, \text{ což je difeomorfismus.}^{14}$$

To ovšem znamená, že dvojice $(\Phi, U)$ tvoří lokální mapu variety[15] $\mathcal{M}_f$ dimenze $n$. Q. E. D.

Dále v rámci důkazu formulujeme tvrzení a lemmata, kterými nakonec dokážeme Větu 5.

**Tvrzení 2.** *Na varietě $\mathcal{M}_f$ dimenze $n$ existuje $n$ tečných vektorových polí $\mathbf{X}_{f_i}$, které spolu navzájem komutují, tedy $[\mathbf{X}_{f_i}, \mathbf{X}_{f_j}] = 0, i, j \in \{1, \dots, n\}$. Tato vektorová pole jsou navzájem lineárně nezávislá v každém bodě $\mathcal{M}_f$.*

*Důkaz Tvrzení 2.* Jak již víme, díky tomu, že na $\mathcal{M}_f$ máme definováno jak $n$ funkcí $f_i$, tak i 1-formy $\boldsymbol{d}f_i$, máme jednoznačně definována i vektorová pole $\mathbf{X}_{f_i}$ díky vztahu (2.6), tedy

$$i_{\mathbf{X}_{f_i}} \omega = \boldsymbol{d} f_i.$$

Stačí ukázat, že právě těchto $n$ vektorových polí spolu navzájem komutují a je lineárně nezávislých v každém bodě variety $\mathcal{M}_f$. Z předpokladu víme, že $\{f_i, f_j\} = 0 \;\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Díky vztahu (2.13) máme

$$[\mathbf{X}_{f_i}, \mathbf{X}_{f_j}] = -\mathbf{X}_{\{f_i, f_j\}} = -\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{0},$$

[14] Fakt, že $\Phi$ je difeomorfismus, je obsahem věty o implicitních funkcích. (Viz např. [3].)
[15] Jelikož varieta je charakterizovaná možností zavedení lokálních map.

jelikož pro hamiltonovské vektorové pole konstantně nulové funkce platí

$$i_{\mathbf{X}_0}\omega = \mathbf{0},$$

z čehož díky nedegenerovanosti $\omega$ plyne, že pole $\mathbf{X}_0$ je nulové vektorové pole.

Nakonec díky (2.12) je

$$0 = \{f_i, f_j\} = \mathbf{X}_{f_j} f_i.$$

Jinými slovy, v libovolném bodě variety $\mathcal{M}_f$ určuje vektorové pole $\mathbf{X}_{f_j}$ takový vektor, že derivace každé z funkcí $f_i$ podél tohoto vektoru v daném bodě je nulová. Protože $\mathcal{M}_f$ je definována jako množina, kde jsou $f_i$ konstantní, znamená to, že daný vektor musí být k $\mathcal{M}_f$ v daném bodě tečným vektorem.

Lineární nezávislost plyne ze vztahu (2.6). Tím je dokázána poslední část tvrzení. Q. E. D.

**Lemma 2.** *Mějme $n$ vektorových polí $\mathbf{X}_i$ a jejich toky $\phi_i^{t_i}$ na varietě $\mathcal{M}$ dimenze $n$. Pak*

$$\mathbf{X}_i \circ \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j \circ \mathbf{X}_i \iff \phi_i^{t_i} \circ \phi_j^{t_j} = \phi_j^{t_j} \circ \phi_i^{t_i}, \tag{3.1}$$

*jinak řečeno, vektorová pole spolu komutují, právě tehdy když jejich toky spolu komutují.*

*Náznak důkazu Lemma 2.* Implikaci zprava doleva si ověříme dvojím derivováním, tedy

$$\begin{aligned} \phi_i^{t_i} \circ \phi_j^{t_j} &= \phi_j^{t_j} \circ \phi_i^{t_i} \quad / \frac{d}{dt_i}, \\ \mathbf{X}_i \circ \phi_j^{t_j} &= \phi_j^{t_j} \circ \mathbf{X}_i \quad / \frac{d}{dt_j}, \\ \mathbf{X}_i \circ \mathbf{X}_j &= \mathbf{X}_j \circ \mathbf{X}_i. \end{aligned}$$

Důkaz obrácené implikace čtenář nalezne například v [9]. Q. E. D.

*Důkaz části II.* Označme $\phi_i^{t_i}$ toky polí $\mathcal{X}_{f_i}$ na $\mathcal{M}_f$, představující toky komutujících polí $\mathbf{X}_{f_i}$. Díky kompaktnosti je $\mathcal{M}_f$ úplná (viz 1), a proto definiční obor toku $\phi_i^{t_i}$ je celé $\mathbb{R}$. Můžeme tedy definovat akci komutativní grupy $G = \mathbb{R}^n$ na varietě $\mathcal{M}_f$ (viz Dodatky, Definice 28)

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_f, \qquad \mathbf{t} \cdot m \equiv (\phi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \phi_n^{t_n})(m), \qquad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Platí, že $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{s} \cdot m) = (\mathbf{t} + \mathbf{s}) \cdot m$, o čemž se můžeme přesvědčit díky komutativitě toků polí. Pro libovolný bod $m$ variety $\mathcal{M}_f$ a $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in G$ jako výše je totiž

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} + \mathbf{s}) \cdot m &= \left(\phi_1^{t_1+s_1} \circ \cdots \circ \phi_n^{t_n+s_n}\right)(m) = \left(\phi_1^{t_1} \circ \phi_1^{s_1} \circ \cdots \circ \phi_n^{t_n} \circ \phi_n^{s_n}\right)(m) = \\ &= \left(\phi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \phi_n^{t_n}\right)\left(\left(\phi_1^{s_1} \circ \cdots \circ \phi_n^{s_n}\right)(m)\right) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{s} \cdot m). \end{aligned}$$

Tím jsme ukázali rovnost výše. Zjevně (z vlastnosti toku)

$$\mathbf{0} \cdot m = m,$$

čímž jsme ověřili oba axiomy akce.

Nyní si vezměme pevný bod $m_0 \in \mathcal{M}_f$. Pak můžeme definovat zobrazení

$$\Upsilon : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_f, \qquad \Upsilon(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot m_0.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbb{R}^n$ není kompaktní, zatímco $\mathcal{M}_f$ dle předpokladu ano, nemůže být zobrazení $\Upsilon$ prosté. Proto uvažujme následující definici (viz také Dodatky, Definice 30).

**Definice 21.** Stacionární grupu bodu $m_0$ pro výše uvažovanou akci označme jako $\Gamma$, tj.

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{t} \cdot m_0 = m_0\}.$$

Pro další bude důležité ukázat, že stacionární grupa $\Gamma$ je také diskrétní grupou v $\mathbb{R}^n$ (viz Dodatky, Definice 27). $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s euklidovskou metrikou.

Ještě před tím ale ukažme, že zobrazení $\Upsilon$ je lokálním difeomorfismem. K tomu využijeme větu o inverzní funkci a také toho, že $n$ uvažovaných navzájem komutujících vektorových polí $\mathbf{X}_{f_i}$ je zároveň lineárně nezávislých. V lokální mapě se souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n)$ na $\mathcal{M}_f$, máme

$$\Upsilon(\mathbf{t}) = \Upsilon(t_1, \dots, t_n) = (m^1, \dots, m^n) \equiv (f_1(\mathbf{t}), \dots, f_n(\mathbf{t}))$$

pro vhodné funkce $f_1, \dots, f_n$. Pak platí[16]

$$\left.\frac{\partial \Upsilon}{\partial t_j}\right|_U = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial t_j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i},$$

což lze zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial \Upsilon}{\partial t_1}\right|_U & \cdots & \left.\dfrac{\partial \Upsilon}{\partial t_n}\right|_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Zároveň pro $m \in U$ je

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial t_j}(m) \equiv \Upsilon_* \left( \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t_j} \right)(m) = \mathbf{X}_{f_j}(m).$$

Díky lokální mapě můžeme vyjádřit

$$\mathbf{X}_{f_j}(m) = \sum_i a_i^j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i},$$

takže máme

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}(m) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.3}$$

díky lineární nezávislosti vektorových polí $\mathbf{X}_{f_i}$. Tudíž existuje $V$ okolí bodu $\mathbf{t}$ takové, že $\Upsilon|_V$ je regulární, což s použitím věty o inverzní funkci dává, že $\Upsilon|_V$ je difeomorfismus.

[16] $U$ značí okolí bodu $m_o$

Nyní se již můžeme zaměřit na výše zmíněné tvrzení o stacionární grupě $\Gamma$.

**Lemma 3.** *Stacionární grupa $\Gamma$ je diskrétní grupou.*

*Důkaz Lemma 3.* Mějme $\mathbf{t} \in \Gamma$. Pro pevný bod $m_0 \in \mathcal{M}_f$ je pak $\mathbf{t} \cdot m_0 = m_0$. Předpokládejme, že $\Gamma$ není diskrétní grupa. Potom[17]

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_\varepsilon, \exists \mathbf{t}_\varepsilon \neq \mathbf{t} : \mathbf{t}_\varepsilon \in \Gamma \cap U_\varepsilon : \mathbf{t}_\varepsilon \cdot m_0 = m_0.$$

Jinak řečeno, $\mathbf{t}_\varepsilon$ a $\mathbf{t}$ patří do $\Gamma$ a zároveň jsou si libovolně blízko. To je však ve sporu s tím, že na nějakém okolí bodu $\mathbf{t}$ je zobrazení $\Upsilon$ difeomorfismem.
Q. E. D.

Dále ukážeme, že jakákoliv diskrétní podgrupa $\mathbb{R}^n$ je mříž.

**Lemma 4.** *Každá diskrétní podgrupa $M$ v $\mathbb{R}^n$ je mříž a každá mříž je diskrétní grupou.*

*Důkaz Lemma 4.* (Podle [8].) Začněme implikací „$\Longleftarrow$“. Pak pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ ($K$ značí mříž), kde $\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$ a $\mathbf{y} = \sum_i \beta_i \mathbf{v}_i$ je

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{v}_i \in K, \\ -\mathbf{x} &= \sum_i (-\alpha_i) \mathbf{v}_i \in K, \\ \mathbf{0} &= \sum_i 0\mathbf{v}_i \in K. \end{aligned}$$

Z toho je vidět, že $K$ je podgrupa $\mathbb{R}^n$. Navíc

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \geq \min_{i=1,\dots,n} ||\mathbf{v}_i||,$$

což znamená, že pro $n$ lineárně nezávislých vektorů[18] $\mathbf{v}_i$ je pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ norma jejich rozdílu větší než pevné kladné nenulové číslo. Tím pádem mříž je diskrétní grupou. Nyní k implikaci „ $\Longrightarrow$ “. K tomu ještě definujeme tzv. *rovnoběžnostěn.*

**Definice 22.** Mějme $n$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$. Pak rovnoběžnostěnem nazveme

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

Nechť tedy $M$ je diskrétní grupa. Nyní ukážeme algoritmus, kterým lze v diskrétní grupě vybrat konečnou bázi. Vezměme libovolný vektor $\mathbf{y} \in M$ takový, že již mezi ním a nulou neleží žádný další vektor z grupy. Položme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}$. Iterujme pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Předpokládejme, že jsme již vybrali $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$. Zvolme $\mathbf{y} \notin LO\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$.[19] Nyní vezměme rovnoběžnostěn $\mathcal{R}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \mathbf{y})$. Pak jistě toto $\mathcal{R}$ obsahuje alespoň jeden prvek grupy (konkrétně $\mathbf{y}$) a obsahuje

[17] $U_\varepsilon$ značí nějaké okolí $\mathbf{t}$.

[18] Takže každý z nich je mimo jiné nenulovým vektorem.

[19] $LO$ značí lineární obal vektorů.

konečně mnoho prvků grupy díky kompaktnosti $\mathcal{R}\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \mathbf{y}\right)$. Tudíž můžeme vybrat vektor $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \mathbf{y}) \setminus LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j\}$ takový, že[20]

$$\rho\left(\mathbf{z}, LO\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j\right)\right) \text{ je co nejmenší.}$$

Pak položme $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{z}$.

Nyní ukážeme, že algoritmus popsaný výše dává bázi $\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_n$ grupy. Zjevně $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé díky algoritmu, kterým jsme je vybrali. Zbývá ukázat, že

$$M \subseteq \left\{ \sum_i x_i \mathbf{v}_i \,\middle|\, x_i \in \mathbb{Z} \right\} \equiv K.$$

Nechť $\mathbf{z} = \sum z_i \mathbf{v}_i$ je libovolný prvek grupy $M$, kde $z_i \in \mathbb{R}$. Označme $\mathbf{z}' = \sum \lfloor z_i \rfloor \mathbf{v}_i \in K$. Potom

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}' = \sum_i \left(z_i - \lfloor z_i \rfloor\right) \mathbf{v}_i.$$

Ukažme, že pak musí být $z_i \in \mathbb{Z}$. Vyjádřeme

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}' = \left(z_n - \lfloor z_n \rfloor\right) \mathbf{v}_n + LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}.$$

Jinak řečeno prvek $\mathbf{z} - \mathbf{z}'$ leží v lineárním obalu vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ a vektoru $\mathbf{v}_n$, kde $0 \leq z_i - \lfloor z_i \rfloor < 1$. Dále

$$\rho\left(\mathbf{z} - \mathbf{z}', LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}\right) = \left(z_n - \lfloor z_n \rfloor\right) ||\mathbf{v}_n||,$$

jelikož příslušná vzdálenost je normou orthogonální komponenty $\mathbf{z} - \mathbf{z}'$ vůči $LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$, což je přesně výraz výše. Zároveň

$$\rho\left(\mathbf{v}_n, LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}\right) = ||\mathbf{v}_n||.$$

Pak platí

$$\rho\left(\mathbf{z} - \mathbf{z}', LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}\right) < \rho\left(\mathbf{v}_n, LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}\right).$$

Jenže vektor $\mathbf{v}_n$ byl vybrán jako nejbližší vektor k rovině $LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$, a proto $\mathbf{z} - \mathbf{z}'$ musí být prvkem $LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$. Proto $z_n - \lfloor z_n \rfloor = 0$, a tudíž $z_n \in \mathbb{Z}$. Opakováním výše uvedeného postupu pro $\mathbf{z} \equiv \mathbf{z} - z_i \mathbf{v}_i \in LO\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ pro všechna $1 < i \leq n$ dostaneme, že všechny koeficienty $z_j$ pro $j \in \{1, \ldots, n\}$ jsou celá čísla, tj. $\mathbf{z} \in M$. Q. E. D.

Nyní ukažme, že uvažovaná akce $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_f$ je tranzitivní. Pro to stačí ukázat, že $\Upsilon$ je surjektivní. Nechť $\tilde{m} \in Im\Upsilon$ a $m$ je nějaký vzor bodu $\tilde{m}$. Dle předchozího je $\Upsilon$ lokální difeomorfismus, existuje tedy okolí $U''$, že $\Upsilon_{|U''}$ je difeomorfismus. Speciálně $\Upsilon(U'')$ je okolí $\tilde{m}$. Takže jsme našli otevřené okolí $\tilde{m}$, tudíž $Im\Upsilon$ je otevřený. Protože $\mathcal{M}_f$ je sjednocením orbit (viz Dodatky) a jak jsme nyní dokázali, každá orbita je otevřená, plyne z předpokladu souvislosti $\mathcal{M}_f$, že tato orbita je jediná. Tímto je tranzitivita akce prokázána.

Dle Věty o tranzitivní akci (Dodatky, Věta 6) je $\mathcal{M}_f$ difeomorfní $G/\Gamma$, kde $G = \mathbb{R}^n$ a $\Gamma$ je mříž, jak jsme právě dokázali. To však znamená, že $\mathcal{M}_f$ je difeomorfní toru dimenze $n$.

Q. E. D.

Tím jsme již dokázali první dva body Věty 5. Jsme tak na konci našeho důkazu.

[20] $\rho$ značí vzdálenost, tj. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

# 4. Příklady

## 4.1 Volný pád v homogenním tíhovém poli

Mějme hmotný bod o hmotnosti $m$ v homogenním tíhovém poli. Jako konfigurační prostor budeme brát $\mathbb{R}^2$, tedy naše varieta v tomto případě je $\mathcal{M} = T^*\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ s kartézskými souřadnicemi $(x^1, x^2, p_1, p_2)$. Hamiltonián $H$ tohoto hmotného bodu je pak[21]

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - mgx^2$$

a symplektická forma

$$\omega = \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}p_1 + \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}p_2.$$

Máme tak čtyři stupně volnosti ve fázovém prostoru. Podle Liouvillovy–Arnoldovy věty tak potřebujeme najít dva integrály pohybu. První zachovávající se veličinou je zřejmě samotný Hamiltonián a vzhledem k tomu, že předpokládáme působení tíhy pouze ve směru $x^2$, můžeme předpokládat, že se zachovává $p_1$. Musíme spočítat

$$\{p_1, H\},$$

abychom ověřili, že $p_1$ je skutečně integrálem pohybu hamiltonovského systému $(\mathcal{M}, \omega, H)$. Proto musíme najít vektorová pole příslušející funkcím $p_1$ a $H$, abychom mohli využít vztah (2.10). Díky vztahům (2.7) a (2.8) můžeme hned psát

$$\mathbf{X}_H = \frac{p_1}{m}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1} + \frac{p_2}{m}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^2} + mg\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_2}, \qquad \mathbf{X}_{p_1} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}.$$

Tudíž

$$\{p_1, H\} = \omega\left(\mathbf{X}_{p_1}, \mathbf{X}_H\right) = 0.$$

Nyní, když víme, že $p_1$ je integrálem pohybu hamiltonovského systému $(\mathcal{M}, \omega, H)$, musíme pro splnění Liouvillovy–Arnoldovy věty určit podmínky lineární nezávislosti nalezených zachovávajících se funkcí $p_1$ a $H$. Proto napišme Jacobiho matici

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^1} & \frac{\partial H}{\partial x^2} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \frac{\partial p_1}{\partial x^1} & \frac{\partial p_1}{\partial x^2} & \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -mg & \frac{p_1}{m} & \frac{p_2}{m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ze které je vidět, že pro lineární závislost funkcí $p_1$ a $H$ na $\mathcal{M}$ musí být splněny podmínky

$$p_2 = 0 \text{ a zároveň } g = 0,$$

což je však fyzikálně nezajímavé, neboť bychom neuvažovali gravitační interakci. V našem případě, s nenulovou hmotností hmotného bodu a nenulovou tíhou, jsou tudíž nalezené zachovávající se funkce vždy lineárně nezávislé všude na $\mathcal{M}$.

[21] $x^2$ neznačí druhou mocninu.

Protože jsou výše zmiňované funkce zachovávajícími se veličinami, můžeme si libovolně zvolit jejich konstantní hodnoty

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - mgx^2 \equiv E, \qquad p_1 \equiv p_1^0,$$

jejichž konkrétní hodnoty určují ve fázovém prostoru varietu, která je v tomto případě „parabolickým korytem“ vzhledem k proměnné $x^2$. Poznamenejme, že předpoklad Liouvillovy–Arnoldovy věty (ve znění Věty 5) o kompaktnosti $\mathcal{M}_f$ není splněn. Pro explicitní časovou závislost uvažovaných souřadnic hmotného bodu ve fázovém prostoru díky Hamiltonovým kanonickým rovnicím máme

$$\frac{p_1}{m} = \frac{dx^1}{dt}, \qquad \frac{p_2}{m} = \frac{dx^2}{dt}, \qquad 0 = \frac{dp_1}{dt}, \qquad mg = \frac{dp_2}{dt}.$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^0, \\ p_2(t) &= mgt, \\ x^1(t) &= \frac{p_1^0}{m}t + A, \\ x^2(t) &= \frac{gt^2}{2} + B, \end{aligned}$$

kde $A, B$ jsou konstanty, které lze v konkrétním případě určit z počátečních podmínek. Kromě toho, díky znalosti integrálů pohybu a v daném případě a priori známým konstantám $E, p_1^0$, můžeme určit

$$B = \frac{(p_1^0)^2}{2m^2 g} - \frac{E}{mg}.$$

## 4.2 Dvourozměrný harmonický oscilátor

Uvažujme v tomto případě Hamiltonián ve tvaru

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2((x^1)^2 + (x^2)^2).$$

Konfiguračním prostorem je v tomto případě opět prostor $\mathbb{R}^2$ a fázovým prostorem je varieta $\mathcal{M} = T^*\mathbb{R}^2$. Symplektická forma $\omega$ je stejná jako v předcházejícím případě. Zbývá najít integrály pohybu hamiltonovského systému $(\mathcal{M}, \omega, H)$. Stejně jako u volného pádu stačí najít dvě zachovávající se veličiny. První z nich je opět funkce $H$. Druhou veličinou, kterou vezmeme za kandidáta je moment hybnosti

$$L = x^2 p_1 - x^1 p_2.$$

Analogicky jako v předchozím příkladu platí

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_H &= \frac{p_1}{m}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial}{\partial x^2} - m\Omega^2 x^1 \frac{\partial}{\partial p_1} - m\Omega^2 x^2 \frac{\partial}{\partial p_2}, \\ \mathbf{X}_L &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}. \end{aligned}$$

Díky vlastnostem symplektické formy $\omega$ určíme, že

$$\omega\left(\mathbf{X}_L, \mathbf{X}_H\right) = -x^2 m\Omega^2 x^1 \omega\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_1}\right) + x^1 m\Omega^2 x^2 \omega\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^2}, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_2}\right) = 0.$$

Tím jsme se přesvědčili, že funkce $L$ je integrálem pohybu.

Jacobiho matice příslušející těmto dvěma veličinám je

$$J = \begin{pmatrix} m\Omega^2 x^1 & m\Omega^2 x^2 & \frac{p_1}{m} & \frac{p_2}{m} \\ -p_2 & p_1 & x^2 & -x^1 \end{pmatrix},$$

ze které plynou následující podmínky

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} &= 0, \\ m^2\Omega^2 (x^2)^2 - p_1^2 &= 0, \\ m^2\Omega^2 x^1 x^2 + p_1 p_2 &= 0, \\ m^2\Omega^2 (x^1)^2 - p_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

které musí být všechny zároveň splněny, aby výše zmíněná matice byla singulární, neboli aby funkce $L$ a $H$ byly lineárně závislé. K tomu dochází pokud je $(x^1, x^2, p_1, p_2)$ prvkem podmnožiny, která je průnikem nebo sjednocením nadrovin v $T^*\mathbb{R}^2$. Mimo jiné jde o množinu míry nula na $T^*\mathbb{R}^2$ s Lebesgueovou mírou indukovanou standardním skalárním součinem na tomto prostoru. Její bližší specifikaci se věnovat nebudeme. Předpoklady Liouvillovy–Arnoldovy věty jsou vně této podmnožiny splněny, a tak víme, že pohyb je omezen na varietu difeomorfní toru $T^1$ neboli kružnici. Z Hamiltonových kanonických rovnic pro časový vývoj máme

$$\frac{p_1}{m} = \frac{dx^1}{dt}, \qquad \frac{p_2}{m} = \frac{dx^2}{dt}, \qquad -m\Omega^2 x^1 = \frac{dp_1}{dt}, \qquad -m\Omega^2 x^2 = \frac{dp_2}{dt}.$$

Derivováním prvních dvou rovnic a dosazením do zbývajících dostaneme

$$\ddot{x^1} = -\Omega^2 x^1, \qquad \ddot{x^2} = -\Omega^2 x^2,$$

což jsou rovnice totožné s pohybovou rovnicí jednorozměrného harmonického oscilátoru. Je známo, že její integrací dostaneme trajektorii kružnice.

# 5. Keplerův problém a Rungův–Lenzův vektor

Z klasické mechaniky je známo, že tzv. Rungův–Lenzův vektor [2]

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\frac{\mathbf{x}}{r},$$

kde $\mathbf{p}$ je vektor hybnosti hmotného bodu (planety), $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ jeho moment hybnosti, $m$ hmotnost hmotného bodu, $\mathbf{x}$ polohový vektor hmotného bodu vůči pevnému přitažlivému centru (Slunci), $r = ||\mathbf{x}||$ a $\alpha = GMm$,[22] je zachovávající se veličinou Keplerova problému, tedy oběhu planet kolem Slunce. S vědomím toho, že $\mathbf{F}$ se zachovává, čili je integrálem pohybu, ukážeme, že v takovém případě musí být potenciál gravitační interakce právě Newtonovým potenciálem a také, že z něj již plyne pohyb po kuželosečkách. Postupujeme dle [2], přičemž doplníme více podrobností.

## 5.1 Rungův–Lenzův vektor a Newtonův potenciál

Definujme si Rungův–Lenzův vektor v obecnějším tvaru, konkrétně[23]

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + f(r)\mathbf{x},$$

kde $f$ je vhodná funkce na $(0, \infty)$. Předpokládejme, že Hamiltonián má v tomto případě tvar

$$H = ||\mathbf{p}||^2 + W(r),$$

$W(r)$ je opět vhodná funkce na $(0, \infty)$.

Teď se podívejme na podmínku, kdy $\{\mathbf{F}, H\} = 0$. Jelikož

$$\mathbf{p} \times \mathbf{L} = \mathbf{p} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = ||\mathbf{p}||^2\mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p},$$

chceme tudíž spočítat

$$\{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p} + f(r)\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2 + W(r)\}.$$

Díky bilinearitě Poissonových závorek se tento problém redukuje na výpočet

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & \{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2\}, \\
\text{II.}\quad & \{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x}, W(r)\}, \\
\text{III.}\quad & \{-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p}, ||\mathbf{p}||^2\}, \\
\text{IV.}\quad & \{-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p}, W(r)\}, \\
\text{V.}\quad & \{f(r)\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2\}, \\
\text{VI.}\quad & \{f(r)\mathbf{x}, W(r)\}.
\end{aligned}$$

[22] $G$ je Newtonova gravitační konstanta a $M$ hmotnost Slunce.
[23] V této části vynecháme rozměr hmotnosti.

Postupně nyní vypočítáme tyto závorky, pro ilustraci jak s použitím vlastností Poissonových závorek, tak včetně jejich vyjádření v lokální mapě.

**Ad I.** Nejprve se musíme vypořádat s tím, že v prvním argumentu máme vektor. Pro to užijeme identitu

$$\{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2\} = \sum_{k=1}^{3}\{||\mathbf{p}||^2 x^k, ||\mathbf{p}||^2\}.$$

Takže použitím (2.15) a „fundamentálních“ Poissonových závorek, tj. (2.11), máme

$$\begin{aligned}\{||\mathbf{p}||^2 x^k, ||\mathbf{p}||^2\} &= ||\mathbf{p}||^2\{x^k, ||\mathbf{p}||^2\} + x^k\{||\mathbf{p}||^2, ||\mathbf{p}||^2\} = ||\mathbf{p}||^2\{x^k, ||\mathbf{p}||^2\} = \\ &= \sum_{l=1}^{3}||\mathbf{p}||^2\{x^k, p_l^2\} = \sum_{l=1}^{3}||\mathbf{p}||^2\{x^k, p_l^2\} = 2\sum_{l=1}^{3}||\mathbf{p}||^2 p_l\{x^k, p_l\} = \\ &= -2\sum_{l=1}^{3}||\mathbf{p}||^2 p_l\delta_l^k = -2||\mathbf{p}||^2 p_k,\end{aligned}$$

proto

$$\{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2\} = -2||\mathbf{p}||^2\mathbf{p}.$$

**Ad II.** Stejným postupem bychom samozřejmě mohli dojít k výsledku i v tomto případě, ale pro ukázku jiného postupu a proto, že v tomto případě je snazší, použijeme pro výpočet tvar Poissonových závorek v lokální mapě. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}\{||\mathbf{p}||^2 x^k, W(r)\} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial||\mathbf{p}||^2x^k}{\partial p_i}\frac{\partial W(r)}{\partial x^i} - \frac{\partial||\mathbf{p}||^2x^k}{\partial x^i}\frac{\partial W(r)}{\partial p_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial||\mathbf{p}||^2x^k}{\partial p_i}\frac{\partial W(r)}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial||\mathbf{p}||^2x^k}{\partial p_i}\frac{dW(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial p_j^2x^k}{\partial p_i}\frac{dW(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x^i} = \\ &= 2\sum_{i=1}^{3}p_i x^k\frac{dW(r)}{dr}\frac{x^i}{r} = 2W'(r)x^k\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r}.\end{aligned}$$

Celkově pak

$$\{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x}, W(r)\} = 2W'(r)\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r}\mathbf{x}.$$

**Ad III.** Počítejme

$$\begin{aligned}\{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})p_k, ||\mathbf{p}||^2\} &= -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\sum_j\{p_k, p_jp_j\} + p_k\{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}), ||\mathbf{p}||^2\} = \\ &= -p_k\sum_i\{p_ix^i, ||\mathbf{p}||^2\} = -p_k\sum_{i,j}p_i\{x^i, p_jp_j\} = -2p_k\sum_{i,j}p_ip_j\{x^i, p_j\} = \\ &= 2p_k||\mathbf{p}||^2.\end{aligned}$$

Proto

$$\{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\mathbf{p}, ||\mathbf{p}||^2\} = 2||\mathbf{p}||^2\mathbf{p}.$$

**Ad IV.** Opět počítejme s využitím tvaru Poissonových závorek v lokální mapě.

$$\{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})p_k, W(r)\} = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\{p_k, W(r)\} + p_k\{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}), W(r)\} =$$
$$= -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\sum_i \frac{\partial p_k}{\partial p_i}\frac{\partial W}{\partial x^i} - p_k\sum_{i,j}\frac{\partial p_j x_j}{\partial p_i}\frac{\partial W}{\partial x^i} = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})W'(r)\frac{x^k}{r} - p_k W'(r) r,$$

tudíž

$$\{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\mathbf{p}, W(r)\} = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})W'(r)\frac{\mathbf{x}}{r} - W'(r)r\mathbf{p}.$$

**Ad V.** Analogicky předchozím je

$$\{f(r)x^k, ||\mathbf{p}||^2\} = -\sum_{i,j}\frac{\partial f(r)x^k}{\partial x^i}\frac{\partial p_j p_j}{\partial p_i} = -2\sum_{i,j}\left(f(r)\delta_i^k + x^k\frac{\partial f(r)}{\partial x^i}\right)p_j\frac{\partial p_j}{\partial p_i} =$$
$$= -2\sum_{i,j} f(r)p_j\delta_i^k\delta_j^i - 2\sum_i x^k\frac{df}{dr}\frac{x^i}{r}p_i = -2\sum_j f(r)p_j\delta_j^k - 2f'(r)\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r}x^k =$$
$$= -2f(r)p_k - 2f'(r)\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r}x^k,$$

čili

$$\{f(r)\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2\} = -2\left(f(r)\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r}f'(r)\mathbf{x}\right).$$

**Ad VI.** Z Poissonových závorek v lokální mapě ihned máme

$$\{f(r)\mathbf{x}, W(r)\} = 0.$$

Konečně tak docházíme k rovnosti

$$\{||\mathbf{p}||^2\mathbf{x} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\mathbf{p} + f(r)\mathbf{x}, ||\mathbf{p}||^2 + W(r)\} =$$
$$= \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r}\left(W'(r) - 2f'(r)\right)\mathbf{x} + \left(-rW'(r) - 2f(r)\right)\mathbf{p}.$$

Pokud chceme, aby Rungův–Lenzův vektor byl integrálem pohybu, musí být splněny podmínky

$$W'(r) = 2f'(r), \tag{5.1}$$
$$rW'(r) = -2f(r). \tag{5.2}$$

Jednak vidíme, že pak je $W(r) = 2f(r) + const.$, a když dosadíme z (5.1) do (5.2), tak

$$rf'(r) = -f(r), \tag{5.3}$$

což je Eulerova obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu. Zkusme hledat řešení ve tvaru $f(r) = cr^\alpha$, kde $c, \alpha \in \mathbb{R}$. Dosazením do (5.3) dostaneme

$$\alpha c r^\alpha = -cr^\alpha \implies \alpha = -1.$$

Z toho plyne, že $f(r) = cr^{-1}$ a tudíž pro to, aby byl Rungův–Lenzův vektor zachovávající se veličinou, musí být potenciál gravitační interakce Newtonovým potenciálem, tj. úměrný $r^{-1}$.

## 5.2 Rungův–Lenzův vektor a pohyb po kuželosečkách

V této části už budeme pracovat se zavedením hmotnosti, takže

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\frac{\mathbf{x}}{r},$$
$$H = \frac{||\mathbf{p}||^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

Všimněme si, že

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{L} = \left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\frac{\mathbf{x}}{r}\right) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{p} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p})) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \\ = \left(||\mathbf{p}||^2\mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p}\right) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = 0.$$

To znamená, že $\mathbf{F}$ leží v rovině $\mathbf{x}$.

Ještě určíme

$$||\mathbf{F}||^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{2m\alpha}{r}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x} + m^2\alpha^2. \tag{5.4}$$

Úpravami dostaneme

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \sum_{i,j,k,m,n} \epsilon_{ijk}p_jL_k\epsilon_{imn}p_mL_n = \sum_{i,j,k,m,n} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}p_jL_kp_mL_n = \\ = \sum_{j,k,m,n} (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})p_jL_kp_mL_n = \sum_{j,k} (p_jp_jL_kL_k - p_jL_jp_kL_k) = \\ = ||\mathbf{p}||^2||\mathbf{L}||^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L})^2,$$

tzv. Lagrangeovu identitu. Zároveň, protože víme, že $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ je $\mathbf{p} \cdot \mathbf{L} = 0$. Dále

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{x} \cdot (||\mathbf{p}||^2\mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p}) = ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{p}||^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2.$$

Obdobně jako v případě $||\mathbf{p} \times \mathbf{L}||^2$ dostaneme

$$||\mathbf{L}||^2 = ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{p}||^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2.$$

Dosadíme-li dílčí výsledky do (5.4), získáme

$$||\mathbf{F}||^2 = ||\mathbf{p}||^2||\mathbf{L}||^2 - \frac{2m\alpha}{r}||\mathbf{L}||^2 + m^2\alpha^2 = 2mH||\mathbf{L}||^2 + m^2\alpha^2.$$

Jinými slovy, velikost Rungova–Lenzova vektoru přímo závisí na velikosti vektoru momentu hybnosti a hodnotě Hamiltoniánu.

Nakonec spočtěme

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}\equiv||\mathbf{F}||r\cos\phi=\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L})-m\alpha r=\mathbf{x}\cdot\Big(||\mathbf{p}||^2\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p}\Big)-m\alpha r=$$
$$=||\mathbf{L}||^2-m\alpha r,$$

kde $\phi$ je úhel sevřený Rungovým–Lenzovým vektorem a průvodičem hmotného bodu (planety). Tuto rovnost můžeme přepsat do tvaru

$$r=\frac{\frac{||\mathbf{L}||^2}{m\alpha}}{\frac{||\mathbf{F}||}{m\alpha}\cos\phi+1}, \tag{5.5}$$

což je rovnice kuželosečky v polárních souřadnicích s počátkem v ohnisku.

Označme $\frac{||\mathbf{F}||}{m\alpha}\equiv\varepsilon$. Parametr $\varepsilon$ se nazývá numerická excentricita, jejíž hodnoty udávají výsledný typ kuželosečky. Konkrétně

I. $\varepsilon=0$ : kružnice,

II. $\varepsilon\in(0{,}1)$ : elipsa,

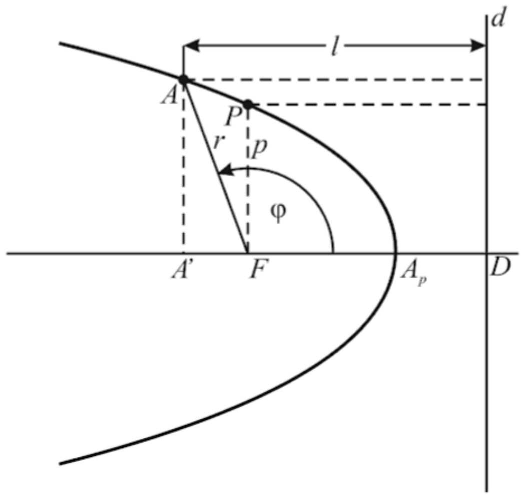
III. $\varepsilon=1$ : parabola,

IV. $\varepsilon>1$ : hyperbola.

**Intermezzo 6.** (Podle [6].) Zde ukážeme způsob, jak odvodit rovnici (5.5). Kuželosečky lze definovat jako rovinné křivky, které mají konstantní poměr vzdálenosti $r$ od daného bodu, neboli ohniska $F$ a vzdálenosti $l$ od tzv. řídící přímky $d$, na níž ohnisko neleží. Tento poměr,

$$\frac{r}{l}=\varepsilon,$$

je právě onou numerickou excentricitou kuželosečky.




Obrázek 5.1: K odvození rovnice (5.5). Převzato z [6], str. 131.

Tak jak je vyznačeno na obrázku 6, můžeme ohniskem vést rovnoběžku s řídící přímkou až do bodu $P$, kde protne danou kuželosečku. Vzdálenost $|FP| \equiv p$ se nazývá fokální parametr kuželosečky. Z obrázku je také zřejmé, že

$$\frac{r}{l} = \frac{p}{|FD|} = \varepsilon.$$

Potom

$$l = |A'F| + |FD| = r\cos(\pi - \varphi) + \frac{p}{\varepsilon}.$$

Zároveň $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, takže

$$r = \varepsilon l = -r\varepsilon\cos\varphi + p,$$

z čehož pro $r$ vychází rovnice

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

# 6. Dodatky

**Definice 23.** Mějme $I$ libovolnou indexovou množinu. Topologií na $M \neq \emptyset$ nazveme libovolný systém $\tau$ podmnožin množiny $M$ takový, že

I. $\emptyset, M \in \tau$

II. $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$

III. Pro každé $i \in I$, $A_i \in \tau \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Prostoru $M$ říkáme topologický prostor.

**Definice 24.** Nechť $Y$ je podmnožina topologického prostoru $X$. Podílovou topologií na $X/Y$ myslíme takovou topologii, v níž je množina $U$ otevřená právě tehdy, když $\pi^{-1}(U)$ je otevřená, kde $\pi : X \to X/Y$ je kanonickou projekcí.

**Definice 25.** Dvojici $(G, \circ)$, kde $G$ je množina a $\circ$ je operace na této množině, nazveme grupou, jestliže[24]

I. $a, b \in G \implies a \circ b \in G$

II. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad a, b, c \in G$

III. $\exists \mathbf{e} \in G : \mathbf{e} \circ a = a \circ \mathbf{e} = a \quad \forall a \in G$

IV. $\exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \mathbf{e} \quad \forall a \in G$

Pokud $G$ je komutativní, tj. $x \circ y = y \circ x$, pak operaci $\circ$ značíme $+$ a inverzní prvek $x^{-1}$ označíme jako $-x$, neutrální prvek $\mathbf{e}$ jako $\mathbf{0}$.

**Definice 26.** Dvojici $(P, \circ)$ nazveme podgrupou grupy $(G, \circ)$, jestliže $P \subset G$ a $(P, \circ)$ je grupa.

**Definice 27.** Nechť $(X, ||\bullet||)$ je normovaný prostor. Podgrupu $(G, +)$ prostoru $X$ nazveme diskrétní grupou, jestliže

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x, y \in G : x \neq y \implies ||x - y|| > \varepsilon.$$

Definice je oprávněná, neboť $X$ je vektorový prostor, který je grupou vůči operaci sčítání.

Pokud $X$ a $Y$ jsou Lieovy grupy a $Y$ je uzavřenou podgrupou $X$, pak na topologickém prostoru $X/Y$ s podílovou topologií lze jednoznačně definovat strukturu hladké variety, viz [9]. Poznamenejme, že Lieovou grupou rozumíme hladkou varietu spolu s operacemi grupy $\circ$ a $^{-1}$, které jsou hladké vzhledem k struktuře variety.

**Definice 28.** Akcí grupy $G$ na neprázdné množině $M$ nazveme zobrazení $\cdot : G \times M \to M$ takové, že

I. $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 \circ g_2) \cdot m$
$\forall g_1, g_2 \in G \quad \forall m \in M$

II. $\mathbf{e} \cdot m = m \quad \forall m \in M$

[24] Zkráceně budeme pro grupu $(G, \circ)$ používat pouze označení $G$.

Pro nás bude důležitý případ, kdy $(G, \circ) \equiv (\mathbb{R}^n, +)$, přičemž pro $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ je

$$\mathbf{t} \cdot m \equiv (t_1, \dots, t_n) \cdot m \equiv \phi_1^{t_1}\left(\dots\left(\phi_n^{t_n}(m)\right)\dots\right),$$

kde jednotlivé $\phi_i^{t_i}$ budou představovat toky hamiltonovských polí $\mathbf{X}_{f_i}$.

**Definice 29.** Mějme grupu $(G, \circ)$. Akci grupy na množině $M$ nazveme tranzitivní, jestliže

$$\exists m_0 \in M,\ \forall m \in M,\ \exists \mathbf{t} \in G : \mathbf{t} \cdot m_0 = m.$$

Množinu $O_{m_0} = \{\mathbf{t} \cdot m_0 | \mathbf{t} \in G\}$ nazveme orbitou (procházející bodem $m_0$).

Pro bod $m \in M$ platí, že $m$ je prvkem $O_m$, neboť $\mathbf{e} \cdot m = m$. Speciálně, $M$ je sjednocením svých orbit. Obdobně snadno lze dokázat, že orbity jsou buď totožné, nebo disjunktní.

**Definice 30.** Stacionární grupou bodu $m_0$ pro akci grupy $G$ na množině $M$ nazýváme množinu $\Gamma$ prvků $\mathbf{t} \in G$, že $\mathbf{t} \cdot m_0 = m_0$.

Nyní ukážeme, že $\Gamma$ tvoří podgrupu $G$. Jelikož $\Gamma \subseteq G$ je operace $\circ$ na $\Gamma$ asociativní. Zbývá ukázat existenci neutrálního a inverzního prvku a uzavřenost vůči $\circ$. Začněme uzavřeností. Pokud máme $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \Gamma$, potom

$$(\mathbf{t} \circ \mathbf{s}) \cdot m_0 = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{s} \cdot m_0) = \mathbf{t} \cdot m_0 = m_0, \text{ tj. } \mathbf{t} \circ \mathbf{s} \in \Gamma.$$

Dále jistě $\mathbf{e} \in \Gamma$, jelikož $\mathbf{e} \cdot m_0 = m_0$. Máme-li $\mathbf{t} \in \Gamma$, tedy $\mathbf{t} \cdot m_0 = m_0$, můžeme na celou tuto rovnost zapůsobit akcí $\mathbf{t}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot m_0 &= m_0 \quad / \cdot \mathbf{t}^{-1} \\ \mathbf{t}^{-1} \cdot (\mathbf{t} \cdot m_0) &= \mathbf{t}^{-1} \cdot m_0, \text{ avšak} \\ \mathbf{t}^{-1} \cdot (\mathbf{t} \cdot m_0) = (\mathbf{t}^{-1} \circ \mathbf{t}) \cdot m_0 &= \mathbf{e} \cdot m_0 = m_0. \end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že $\mathbf{t}^{-1} \in \Gamma$.

Předpokládejme, že $G$ je komutativní. Grupa $\Gamma$ je pak nezávislá na bodu $m_0$, pokud akce $\cdot$ je tranzitivní. Tento výrok ověříme následovně. Mějme $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_f$ a nějaká $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{s}$ tak, že

$$\mathbf{t}_1 \cdot m_1 = m_1, \qquad \mathbf{t}_2 \cdot m_2 = m_2, \qquad \mathbf{s} \cdot m_1 = m_2.$$

Pak ale

$$\mathbf{t}_1 \cdot m_2 = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{s} \cdot m_1) = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{t}_1 \cdot m_1) = \mathbf{s} \cdot m_1 = m_2$$

A obdobně pro $\mathbf{t}_2 \cdot m_1$. Celkem získáváme, že grupa $\Gamma$, která je podgrupou $G$ je nezávislá na zvoleném bodu $m_0$ množiny $M$.

**Věta 6** (O tranzitivní akci)**.** *Mějme Lieovu grupu $(G, \circ)$ a její tranzitivní akci na varietě $M$. Nechť $\Gamma$ je stacionární grupou bodu $m_0 \in M$. Potom $M$ je difeomorfní varietě $G/\Gamma$.*

*Důkaz Tvrzení 3.* Definujme $\sigma : G/\Gamma \to M$ vzorcem $\sigma([\mathbf{t}]) = \mathbf{t} \cdot m_0$. Předpis je korektní, neboť pro $\mathbf{t}_0 \in \Gamma$

$$\sigma([\mathbf{t} \circ \mathbf{t}_0]) = (\mathbf{t} \circ \mathbf{t}_0) \cdot m_0 = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{t}_0 \cdot m_0) = \mathbf{t} \cdot m_0 = \sigma([\mathbf{t}]).$$

Pro injektivitu předpokládejme $\sigma([\mathbf{t}_1]) = \sigma([\mathbf{t}_2])$ pro $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in G$. Potom ale

$$\mathbf{t}_1 \cdot m_0 = \mathbf{t}_2 \cdot m_0,$$

odkud aplikací $\mathbf{t}_2^{-1}$ a použitím definice akce obdržíme

$$(\mathbf{t}_1 \circ \mathbf{t}_2^{-1}) \cdot m_0 = m_0.$$

Odtud z definice stacionární podgrupy $\mathbf{t}_1 \circ \mathbf{t}_2^{-1} \in \Gamma$, tedy $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ se liší o prvek z $\Gamma$, tudíž definují stejný prvek v $G/\Gamma$.

Surjektivita je jen reformulací definice tranzitivity akce.

Pro důkaz difeomorfnosti zobrazení $\sigma$ viz [9], str. 123, Věta 3.62. Q. E. D.

# Závěr

V práci byly čtenáři představeny potřebné matematické partie pro studium Hamiltonovy mechaniky z hlediska diferenciální/symplektické geometrie. Dokázali jsme důležité vlastnosti Poissonových závorek, jež byly také použity v důkazu Liouvillovy–Arnoldovy věty.

Důkaz výše zmíněné věty se držel postupu popsaném v [1], byl však přepsán snad pochopitelnějším způsobem. Mnoho dokazovaných částí bylo oproti původní literatuře podrobněji rozepsáno.

V příkladech byl ilustrován postup výpočtů z hlediska symplektické geometrie a u příkladu volného pádu i explicitní určení konstanty, jinak závislé na počátečních podmínkách, na a priori známým hodnotám integrálů pohybu.

V kapitole o Rungovu–Lenzovu vektoru jsme ukázali explicitně výpočet Newtonova potenciálu z Poissonovy závorky $\{\mathbf{F}, H\}$ a přeformulovali jej z matematicky poměrně náročného textu, [2], do jednodušší podoby. Následně bylo ukázáno, že pouze znalost zachování Rungova–Lenzova vektoru stačí k určení faktu, že planety se pohybují po kuželosečkách.

# Seznam použité literatury


[1] ARNOLD, V. I. (2013). *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media. ISBN 0-387-96890-3.

[2] GUILLEMIN, V. a STERNBERG, S. (1990). *Variations on a Theme by Kepler*, volume 42. American Mathematical Soc. ISBN 0-8218-1042-1.

[3] KOWALSKI, O. (2001). *Úvod do Riemannovy geometrie*. Karolinum. ISBN 8024603772.

[4] PODOLSKÝ, J. (2006). Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie. *Studijní text k" Prosemináři z teoretické fyziky I", MFF UK Praha*.

[5] SILVA, A. C. D. (2008). *Lectures on symplectic geometry*, volume 3575. Springer. ISBN 978-3-540-42195-5.

[6] ŠTOLL, I., TOLAR, J. a JEX, I. (2017). *Klasická teoretická fyzika*. Univerzita Karlova v Praze, Karolinum Press. ISBN 978-80-246-3545-3.

[7] THIRRING, W. (1978). *A course in mathematical physics 1: classical dynamical systems*. Springer Science & Business Media. ISBN 978-3-7091-8528-5.

[8] VAIKUNTANATHAN, V. CSC 2414 Lattices in computer science. [Online]. 2011 [cit. 2019-04-26]. URL `https://people.csail.mit.edu/vinodv/COURSES/CSC2414-F11/L2.pdf`.

[9] WARNER, F. W. (1983). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media. ISBN 0-387-90894-3.