Svazková kohomologie Riemannových ploch: díl 2

Svatopluk Krýsl

11. srpna 2005

1 Definice svazkové kohomologie nezávislé na pokrytí

Rád bych čtenáře upozornil na některé změny v předchozím dílu seriálu; kromě překlepů jsem poopravil příklad 2.

Následující odstavce sekce 1 mohou být vynechány při čtení tím, kdo se rozhodl rozumět svazkovým kohomologiím utilitaristicky, jak byly vysvětleny v závěrečných odstavcích předchozího dílu. Tento čtenář může začít číst text od sekce 2.

Nechť opět X je Riemannova plocha se svazkem $\mathcal{F}$ abelovských grup. Spočetné otevřené pokrytí $\mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$ se nazývá zjemnění spočetného otevřeného pokrytí $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$, pokud pro každé $k \in K$ existuje $i \in I$, že $V_k \subseteq U_i$; tento fakt zapisujeme $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. V případě jemnějšího pokrytí existuje tedy zobrazení mezi indexovými množinami, $\tau : K \to I$, že $V_k \subseteq U_{\tau(k)}$, pro každé $k \in K$.

Definujme zobrazení

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

hodnotou na $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ předpisem

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(f_{ij}) =: (g_{kl}),$$

kde $g_{kl} := f_{\tau k \tau l}|(V_k \cap V_l)$. Poznamenejme, že $|$ značí restrikční homomorfizmus svazku $\mathfrak{V}$ a místo $\tau(K)$ píšeme strucčně τk. Kohranice jsou přenášeny tímto homomorfizmem grup na kohranice, a proto se toto zobrazení přes ně faktorizuje jak na definičním oboru, tak na oboru hodnot, indukujíce takto homomorfizmus svazkových kohomologických grup $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$.

Příklad 3: Pro ilustraci dokažme, že t je dobře definováno a jak indukuje zobrazení na kohomologických grupách. Ukažme, že (g_{kl}) je kocyklus. $g_{kl} = f_{\tau k \tau l} = f_{\tau k s} + f_{s \tau l}$ na $U_{\tau k} \cap U_s \cap U_{\tau l}$, čímž jsem rozepsali kocyklickou podmínku, kterou jste měli odvodit v úkolu 2 předchozího dílu. Jelikož s je libovolný prvek I stačí vzít $s = \tau r$ pro libovolné $r \in K$, a tedy $g_{kl} = g_{kr} + g_{rl}$, což ukazuje korektnost. Ukažme ještě, že 1-kohranice se přenášejí na 1-kohranice pro procvičení si relace kohranice, kterou jste měli vyvodit v úkolu 3 předchozího dílu seriálu. Připomeňme ještě, že každá kohranice je kocyklus, nikoliv naopak. Geometricky lze tento fakt nahlédnout uvážením disku v komplexní rovině a v něm nacházející se koncentrickou kružnici, která je jistě kocyklem, neboť její hranice je nulová, ale není kohranicí, neboť není hranicí žádné "podplochy" (právě díky tomu, že disk není jednoduše souvislý).

Lemma: Homomorfizmus $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ nezávisí na výběru zobrazení τ.

Dokažete toto tvrzení; uvažujte nějaké jiné zobrazení τ' mezi indexovými množinami a ukažte, že podle uvažovaných různých zobrazení mezi indexovanými množinami definované homomorfizmy t, t' se liší o kohranici, když jsou vyčísleny na kocyklu, a proto zadávají stejné homomorfizmy na kohomologiích. Toto lemma potřebujeme ke korektonsti následujících úvah, často totiž budeme hovořit o t zadané pro porkytí a nějaké jeho zjemnění bez reference k pevně zvolenému zobrazení mezi přísl. indexovanými množinami.

Po konzultacích se čtenáři textu jsem se rozhodl toto lemma dokázat.

Důkaz: Nechť $(f_{ij}) \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dokažme, že $t(f_{ij}) - t'(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$, tj. že rozdíl leží v obrazu δ^0. Užívajíce definice zobrazení t, t' dostaneme, že $t(f_{ij}) - t'(f_{ij}) = f_{\tau i \tau j}|_{V_i \cap V_j} - f_{\tau' i \tau' j}|_{V_i \cap V_j} =: (g_{ij}) - (g'_{ij})$. Tj. nyní dokazujeme, že kocykly (g_{ij}) a (g'_{ij}) jsou kohomologické, abychom oprášili jedno staré slovo. Je jistě $f_{\tau i \tau' j} \in U_{\tau i} \cap U_{\tau' j}$, zároveň také existuje $V_k \subseteq U_{\tau k} \cap U_{\tau' k}$, což umožňuje definovat element $h_k := f_{\tau k \tau' k}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k)$. Uvažme na $V_k \cap V_l$ rozdíl $g_{kl} - g'_{kl} = f_{\tau k \tau l} - f_{\tau' k \tau' l} = f_{\tau k \tau l} + f_{\tau l \tau' k} - f_{\tau l \tau' k} - f_{\tau' k \tau' l} = f_{\tau k \tau' k} - f_{\tau l \tau' l} = h_k - h_l$, tedy rozdíl se štěpí a kocykly jsou kohomologické. Pozn. za třetím rovnítkem jsme použili kocyklickou podmínku. $\square$

Následující lemma pro jistotu dokažme, abychom si procvičili Axiomy I a II definice svazku (lib. alg. struktur) na topologických prostorech; při prvním čtení může být jak formulace lemmatu, tak jeho důkaz vynechán - jako ostatně všechny důkazy, příklady a úkoly.

Lemma: $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ je injektivní, pokud $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$.

Důkaz: Máme tedy dokázat, že vzor nuly při $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$, jehož značení budeme zkracovat na t, je nula, což při přechodu od kohomologiím zpět ke kocyklům, jejichž jsou faktory, značí, že stačí ukázat, že vše, co se zobrazí na kohranici, je wieder nur kohranice. Nechť (f_{ij}) je libovolný kocyklus, který t zobrazí na kohranici, tj. je $t(f_{kl}) = g_k - g_l$, což dík definici t implikuje $f_{\tau k \tau l} = g_k - g_l$.

Použijeme-li podmínku kocykličnosti, dostaneme $f_{\tau k \tau l} = f_{\tau k i} + f_{i \tau l}$, což je rovno $f_{i\tau l} - f_{i\tau k}$, kde jsme použili antisymetrii kocyklu v indexech, která plyne již z několikrát zmíněné podm. kocykličnosti. Z výše napsaných rovnic plyne, že $f_{i\tau k} + g_k = f_{i\tau l} + g_l$. Pro každé $i \in I$ zajišťuje Axiom II (existence) definice svazku existenci systému množin $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$, pro který platí, že existují $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$, že $h_i = f_{i\tau k} + g_k$ na $U_i \cap V_k$. Na $U_i \cap U_j \cap V_k$ platí $f_{ij} = f_{i\tau k} + f_{\tau k j} = f_{i\tau k} + g_k - f_{j\tau k} - g_k = h_i - h_j$. Díky tomu, že předchozí relace platí pro libovolné $k \in K$, dovoluje nám axiom I definice svazků (unicita) tvrdit, že $g_{ij} = h_i - h_j$ na $U_i \cap U_j$, tj. vzor je štěpící kocykl neboli kohrancie.

Nyní již můžeme definovat 1. kohomologii pro $(X, \mathcal{F})$. Elementy $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ a $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ nazveme ekvivalentní, existuje-li společné zjemnění, $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ a $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}'$, že $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) = t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta)$. Výše zmíněnou relaci budeme značit $\approx$.

Příklad 4: Ukážeme, že výše definovaná relace je opravdu relací ekvivalence, užijeme při tom předchozího lemmatu a formule

$$t^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}.$$

Řešení úkolu 4. Nechť $\eta \approx \nu$, kde $\eta \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ a $\nu \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$, tj. existuje $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$, že $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\eta) = t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\nu)$. Symetrie je tedy zřejmá. Reflexivita také. Ověřme tranzitivnost. Uvažme $\eta \approx \nu$, kde $\eta \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ a $\nu \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ a $\nu \approx \mu$, kde $\mu \in H^1(\mathfrak{U}'', \mathcal{F})$. Z výše uvedeného plyne, že existují společná zjemnění $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ a $\mathfrak{W} < \mathfrak{U}', \mathfrak{U}''$, že $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\eta) = t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\nu)$ a $t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{W}}(\nu) = t^{\mathfrak{U}''}_{\mathfrak{W}}(\mu)$. Uvažme společné zjemnění $\mathfrak{X} < \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. Chceme ukázat, že $t^{\mathfrak{U}''}_{\mathfrak{X}}(\mu) = t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{X}}(\eta)$. Levou stranu rozepišme jako $t^{\mathfrak{U}''}_{\mathfrak{X}}(\mu) = t^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{X}} t^{\mathfrak{U}''}_{\mathfrak{W}}(\mu)$, což lze přepsat jako $t^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{X}} t^{\mathfrak{U}''}_{\mathfrak{W}}(\mu) = t^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{X}} t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{W}}(\nu) = t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{X}}(\nu) = t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{X}}(\eta)$, c.b.d.

Úkol 4: Dokažte relaci $t^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}$.

Definujme

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \bigcup_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / \approx .$$

Čtenář znající základy teorie kategorií poznává v předchozím induktivní limitu přes pomocí společného zjemnění částečně uspořádaná pokrytí.

2 Exaktní posloupnosti, Bocksteinův homomorfizmus.

Z následující stati bude zřejmé, že existují dva typy exaktnosti pro svazkovou teorii, nebude však příliš jasné ze struktury, proč platí např. abstraktní de Rhamova věta, neboť pro to by bylo třeba provést obecnější úvahy o svazcích, vč. tzv. etální topologie, zavést pojem měkkosti, acykličnosti a koherence svazků, abychom získali větší cit pro a širší přehled o chování svazků vzhledem k přechodu lokální-globální, které se projevuje především v absenci epimorfnosti předposledního morfizmu v krátkých exaktních posloupnostech, byť je tato na stéblech přítomna.

Začněme homomorfizmem svazků. Nechť $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ jsou svazky abelovských grup nad týmž topologickým prostorem X. Homomorfizmus svazků $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je systém homomorfizmů grup $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ pro každou otevřenou $U \subseteq X$ kompatibilní s restrikčními homomorfizmy, tj. násl. soustava diagramů komutuje pro všechny $V \subseteq U$ otevřenou v X.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "restr."] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "restr."] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Příklad 5: Jednoduchým homomorizmem svazků je de Rhamův diferenciál d mezi svazkem hladkých fcí $\mathcal{E}$ a hladkých 1-form $\mathcal{E}^1$, resp. hladkých 1-forem a hladkých 2-forem $\mathcal{E}^2$. Další příklad můžeme zavést dík holomorfní struktuře na uvažované Riemannově ploše. Nechť $a \in X$, potom T_aX je dvoudimenzionální vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Proveďme jeho komplexifikaci, čímž dostaneme dvourozměrný prostor $T_a^{\mathbb{C}}X$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $z : U \to \mathbb{C}$ je nějaká mapa při a. Píšeme-li $z = x + iy$, dostáváme dvě reálné složky mapy, podle nichž lze standardně derivovat, a tak dát smysl symbolům

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

a eo ipso i

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Není těžké si uvědomit, že

$$T_a^{\mathbb{C}}X = \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \oplus \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial z}$$

Úkol 6: Dokažte předchozí rovnost.

Snadno přejdeme k duální verzi. De Rhamův diferenciál diferencovatelné mapy z značme dz a diferencovatelné mapy $\overline{z} := x - iy$ pomocí $d\overline{z}$.

Úkol 7: Dokažte

$$T_a^{\mathbb{C}}X = \mathbb{C}dz \oplus \mathbb{C}d\overline{z}$$

a vztah

$$\begin{aligned} d_a f &= \frac{\partial f}{\partial x} d_a x + \frac{\partial f}{\partial y} d_a y \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} d_a z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d_a \overline{z} \end{aligned}$$

Poznamenejme, že příslušné pojmy lze definovat i ve vyšších dimenzích a jen pro komplexní struktury, které nutně nemusí pocházet z holomorní.

1-formu $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ nazveme typu (1,0) resp. (0,1), pokud $\omega_a \in \mathbb{C} d_a z =: T_a^{1,0} X$ resp. $\omega_a \in \mathbb{C} d_a \overline{z} =: T_a^{0,1} X$. Příslušné symboly jsou $\mathcal{E}^{(1,0)}$ a $\mathcal{E}^{(0,1)}$.

1-formu $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ nazveme holomorfní, pokud $(\forall U \subseteq X)(\exists g \in \mathcal{O}(U))(\omega_{|U} = gdz)$, kde $\mathcal{O}$ je svazek holomorfních funkcí na X. Poznamenejme, že holomorfní funkce jsou právě všechny ty fce mající 1. diferenciál, které jsou v jádru operátoru $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Abychom se vrátili k homomorfizmům svazků, poznamenejme, že operátory $d'_a f := \frac{\partial f}{\partial z} d_a z$ a $d''_a f := \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d_a \overline{z}$ jsou homomorfizmy svazků. Z dalších rovnosti platí $d = d' + d''$ a $\mathcal{O} := \mathrm{Ker} d''$.

Následující lemma představuje analogii Poincarého lemmatu o de Rhamově diferenciálu pro případ komplexní analýzy. Dokazovat jej nebudeme.

Lemma (Dolbeault): $X := \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}, 0 < R \leq \infty$ a $g \in \mathcal{E}(X)$, potom existuje $f \in \mathcal{E}(X)$, že

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g.$$

Abychom mohli definovat rod Riemannovy plochy, poznamenejme, aniž bychom formulovali přísl. větu, že 1. kohomologie kompaktní Riemannovy plochy s hodnotami ve svazku holomorfních funkcí je konečně dimenzionální prostor. Důkaz přísl. věty je důležitý, ale obtížný pro svou technicitu. Nechť tedy X je kompaktní Riemannova plocha, pak dimenzi $H^1(X, \mathcal{O})$ uvažované jako komplexní vektorový prostor nazveme rod X a budeme označovat g.

Nechť $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ jsou svazky abelovských grup na Riemannově ploše X. Jádrem homomorfizmu svazků $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ míníme podsvazek $\mathcal{K}$ svazku $\mathcal{F}$ definovaný

$$\mathcal{K}(U) := \mathrm{Ker}(\mathcal{F}(U) \to^{\alpha_U} \mathcal{G}(U))$$

pro U otevřenou v X.

Pomocí jádra lze definovat následující svazky takto:

$$\mathcal{O} := \mathrm{Ker}(\mathcal{E} \to^{d''} \mathcal{E}^{(0,1)}),$$

$$\Omega := \mathrm{Ker}(\mathcal{E}^{(1,0)} \to^{d} \mathcal{E}^2),$$

$$\mathbb{Z} := \mathrm{Ker}(\mathcal{O} \to^{ex} \mathcal{O}^*),$$

kde $\mathcal{O}^*$ je multiplikativní svazek nikde nulových holomorfních funkcí.

Snad jen poslední dvě rovnosti nejsou zřejmé, a proto je ověříme. 1-formu v $\mathcal{E}^{(1,0)}$ lze lokálně (na U)psát ve tvaru $\omega_{|U} = f dz_{|U}$, kde $f \in \mathcal{E}(U)$. $d\omega = df \wedge dz = (\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}) \wedge dz = 0$, pokud $f \in \mathcal{O}(U)$, cbd.

Exponenciála v posledním příkladu je definována $ex(f) = exp(2\pi i f)$. Nechť U je souvislá otevřená množina..........

Narozdíl od jádra není obraz svazku svazkem. Stačí uvážit právě exponenciálu, aby tento fakt byl demonstrován. Nechť $X = \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$. Dále $U_1 := \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^-$, $U_2 := \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^+$ a $f_k := z_{|U_k}$ pro $k = 1, 2$. Tyto funkce lze logaritmovat (víceznačně), neboť U_k je jednoduše souvislá, tj. $f_k \in \mathrm{Im}(\mathcal{O}(U_k) \to^{ex} \mathcal{O}^*(U_k))$ navíc $f_{1|U_1 \cap U_2} = f_{2|U_1 \cap U_2}$ a $U_1 \cup U_2 = X$, ale přesto neexistuje $f \in \mathcal{O}(X)$, aby $f_{|U_k} = f_k$, to by totiž existoval spojitý logaritmus identity na oblasti, která není jednoduše souvislá, což odporuje zákl. poznatkům z komplexní analýzy (Galoisova grupa univerzálního nakrytí X je $\mathbb{Z}$).

Exaktnost je tedy potřeba definovat bez použití naivního obrazu svazku. Ukazuje se, že stačí na stéblech. Tj. $\mathcal{F} \to^{\alpha} \mathcal{G} \to^{\beta} \mathcal{K}$ se nazývá exaktní, pokud pro každé $x \in X$ je $\mathcal{F}_x \to^{\alpha_x} \mathcal{G}_x \to^{\beta_x} \mathcal{K}_x$.

Poznamenejme, že monomorfnost na stéblech implikuje monomorfnost svazků, ale epimorfnost na stéblech neimplikuje epimornfost na svazcích, jak je vidět na základě příkladu z exponenciálou. Platí

Lemma: Nechť $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ je exaktní, potom je exaktní $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{K}(U)$.

Důkaz vynecháme. Uveďme příklady krátkých exaktních posloupností svazků.

1. $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \to^{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$ Injektivita první šipky je zřejmá, jedná se o identitu. Ker = Im jsme uvedli již výše. Stačí epimorfnost na stéblech pro d''. Tj. řešit $d''f = g d\overline{z}$ pro spojitě diferencovatelnou g. f existuje lokálně díky Dolbeaultově lemmatu.

2. Označíme-li uzavřené 1-formy pomocí $\mathcal{Z}$, tj. $\mathcal{Z} := \mathrm{Ker}(\mathcal{E}^1 \to^d \mathcal{E}^2)$, potom $0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E}^1 \to \mathcal{Z} \to 0$. První šipka je opět zřejmá: tvrdí injektivitu druhé. $df = 0$ implikuje $f = const.$ alespoň lokálně, tj. Im = Ker. Epimorfnost třetí šipky je dána Poincarého lemmatem, neboť každou uzavřenou formu mohu napsat jako diferenciál funkce.

3. $0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \to \Omega \to 0$. Tato posloupnost je jakousi holomorfní analogií předchozí. Stačí Im = Ker a epimorfnost. Im = Ker je zřejmé, neboť konstanty de Rhamův diferenciál vynuluje a to co vynuluje, jsou lokálně konstanty. Pro epimorfnost uvažme lib. $g \in \mathcal{O}$ a hledejme $f \in \mathcal{O}$, aby $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = g dz$, tj.

Nyní uveďme analogii věty o dlouhé exaktní posloupnosti obecně známé z homologické algebry popř. z nějaké topologičtější verze (ko)homologie.

Věta (o Bocksteinově homomorfizmu:) Nechť $0 \to \mathcal{F} \to^{\alpha} \mathcal{G} \to^{\beta} \mathcal{K} \to 0$ je krátká exaktní polsoupnost, potom existuje homomorfizmus δ^*a příslušná indukovanaá posloupnost na kohomologiích $0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{K}) \to^{\delta^*} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{K})$ je exaktní.

Pozn. Zobrazení δ^* se nazývá Bocksteinův spojovací homomorfizmus. Pokud jste si všimli, že se ve větě vyskytují jakési dosud nedefinované objekty, jste pozorní. Tyto objekty se definují z jistých důvodů následovně $H^0(X,\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$. Poznamenejme, že je oprávněné nazývat tyto objekty kohomologiemi - viz přísl. literaturu.

Násl. věta je známa pod názvem abstraktní deRhamův teorém

Věta (abstraktní de Rhamův teorém): Nechť $0 \to \mathcal{F} \to^{\alpha} \mathcal{G} \to^{\beta} \mathcal{K} \to 0$ je krátká exaktní polsoupnost a $H^1(X,\mathcal{G}) = 0$, potom $H^1(X,\mathcal{F}) \simeq \mathcal{K}(X)/\beta\mathcal{G}(X)$.

Důkaz proveďte sami pomocí předchozí věty o Bocksteinově homomorfizmu - je jednoduchý.

Aplikací abstraktní de Rhamovy věty je Dolbeaultova a de Rhamova věta.

Věta (Dolbeault):

$$H^1(X,\mathcal{O}) \simeq \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X)$$

$$H^1(X,\Omega) \simeq \mathcal{E}2(X)/d\mathcal{E}^{(1,0)}(X).$$

Věta (deRham):

$$H^1(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ker} d_{|\mathcal{E}^1(X)}/\mathrm{Im} d_{|\mathcal{E}(X)}.$$

V příštím díle věty dokážeme - většinu práce za nás odbyde abstraktní de Rhamova věta a zbytek dokončí citace příkladů exaktních posloupností výše, tj. implicitně Poincarého a Dolbeaultovu lemma.

Poznamnejme, že Riemann-Rochova věta má mnoho inkarnací zrovna tak jako mnohorkrát reinkarnovaný pojem monodromie.