Svazková kohomologie Riemannových ploch: díl 1

Svatopluk Krýsl

11. srpna 2005

1 Svazková kohomologie Riemannovy plochy definovaná pomocí pokrytí

Nechť X je Riemannova plocha, tj. holomorfní varieta komplexní dimenze 1. Někdy bývá zvykem definovat Riemannovu plochu jako reálnou varietu dimenze 2 s mapami, jejichž přechodové funkce, uvažované jako komplexní funkce komplexní proměnné, jsou holomorfní, tj. splňují Cauchy-Riemannovy podmínky (existence prvního diferenciálu je zaručena automaticky, neboť přechodové funkce jsou nekonečně diferencovatelné, tedy spc. jejich parciální derivace jsou spojité - jen pro takové totiž bývá zvykem parciální derivace definovat). Nechť $\mathcal{F}$ je svazek abelovských grup na topologickém prostoru X. Dále uvažme $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ spočetné otevřené pokrytí plochy X (zápis indexové množiny I budeme často potlačovat, jak praví klasik). Takové pokrytí existuje, neboť X je (lokálně kompaktní) se spočetnou bází lokálně homeomorfní pevně zadanému eukleidovskému prostoru. Poznamenejme, že ve všech aplikacích, které zmíníme, bude I konečná, tj. netřeba si pro další mohutnost I představovat za horizontem, jak praví druhý klasik. Nejdříve budeme svazkové kohomologie definovat pro pokrytí, později uvážíme jakýsi typ induktivní limity přes subordinovaná pokrytí, který bude definovat svazkovou kohomologii nezávislou na pokrytí.

Pro $q = 0, 1, \ldots$ definujme q-tou kořetězcovou grupu $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ pro $(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ pomocí kartézského součinu

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}),$$

tj. nějaký q-kořetězec je souhrn $(f_{i_0\ldots i_q})_{(i_0\ldots,i_q)\in I^{q+1}}$, pro který $f_{i_0\ldots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q})$. Abelovská struktura grupy je dána sčítáním po složkách za užití abelovské struktury přísl. svazku.

Příklad 1: Nechť pro jednoduchost je $X = \mathbb{C}$, $U_1 = \{x \in \mathbb{C}; \Re x > -1\}$, $U_2 = \{x \in \mathbb{C}; \Re x < 1\}$, $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$, tj. mj. $I = \{1,2\}$ a $\mathcal{F} := \mathcal{C}^\infty$ [1]. V tomto případě je tedy $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}^\infty) = \mathcal{C}^\infty(U_1) \times \mathcal{C}^\infty(U_2)$, $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{C}^\infty) = \mathcal{C}^\infty(U_1) \times \mathcal{C}^\infty(U_1 \cap U_2) \times \mathcal{C}^\infty(U_2 \cap U_1) \times \mathcal{C}^\infty(U_2)$. Každý 2-kořetězec je tedy 4-ice $(f_{ij})_{(i,j)\in\{1,2\}^2} = (d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22})$, kde d_{ii} je hladká fce na U_i, $i = 1, 2$, a d_{12}, d_{21} jsou funkce na $U_1 \cap U_2$. V dalším se ukáže, že pro představování si jsou d_{ii} nepodstatná, neboť jsou obsažena v $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}^\infty)$. V tomto později vyjasněném smyslu již $C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ nepřispívá k žádné nové informaci. Obecně, informace poskytnutá v q-té kořetězcové grupě souvisí s mohutností I, přesněji s maximálním počtem různých množin v pokrytí, jejichž vzájemný průnik je neprázdný.

Nyní pokračujme v budování obecné teorie. Definujme tzv. kohraniční operátory

$$\delta^0 : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}),$$

$$\delta^1 : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

následovně:

pro $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ nechť $\delta^0(f_i)_{i\in I} := (g_{ij})_{(i,j)\in I^2}$, kde

$$g_{ij} := f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j),$$

f_j, f_i brány restringovány na $U_i \cap U_j$ a teprve potom odečteny;

pro $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ nechť $\delta^1(f_{ij})_{(i,j)\in I^2} := (g_{ijk})_{(i,j,k)\in I^3}$, kde

$$g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k),$$

f_{ij}, f_{ik}, f_{jk} brány restringovány na $U_i \cap U_j \cap U_k$ a teprve potom odečteny.

Pomocí těchto homomorfizmů definujme podgrupy:

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{X}) := \text{Ker } \delta^1$$
$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{X}) := \text{Im } \delta^0.$$

Elementy první nazýváme 1-kocykly, elementy druhé 1-kohranice; mnemotechnickou pomůckou pro zapamatovaní přísl. názvů může být představa cyklů jako uzavřených křivek, tj. jako prvků jádra operátoru, který přiřazuje ploše s okrajem její hranici; hranic jako obrazů ploch s okrajem při témže zobrazení. Čtenáře asi nepoleká vypouštění předpony ko- při zavádění pomůcky, očekávaje analogii dualit známých z beztorzních případů simpliciální

[1] Později se dohodneme na značení často užívaných svazků.

či jiné "topologičtější" verze (ko)homologie. Poznamenejme, že mnozí se jistě ještě učili definici hlavních popř. vektorově fíbrovaných bandlů pomocí tzv. kocyklické podmínky, pomocí níž byly bandly dříve definovávány, a proto je, vedeni opačným úhlem pohledu než ostatní, neudivuje fakt pravící, že (např.) Eduard Čech ukázal, jak právě svazkové kohomologie souvisí s přímkovými (abelovskost oboru hodnot přechodových map bandlu) bandly na topologických prostorech.

Definujme tedy 1. svazkovou kohomologii pro pokrytí

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Snadno se přesvědčíte, že kohranice jsou skutečně kocykly, a je tedy možné dělení provést. Pro ty, kteří si výše uvedené pojmy představují geometricky, resp. zjistili, že si je konzistentně s definicemi geometricky představovat lze, je tento fakt asi tak jednoduchý jako ten, který říká, že hranice hranice koule je prázdná množina, protože sféra je bez okraje.

Úkol 1: Spočtete 1. kohomologii pro případ uvedený v příkladu.

Úkol 2: Napište rovnici pro 1-kocykl, spc. zjistěte f_{ii} a určete vztah f_{ij} a f_{ji}.

Úkol 3: Ukažte, že pro 1-kohranici lze psát $g_{ij} = f_i - f_j$, abyste zjistili, proč se 1-kohranici také říká štepící 1-kocyklus; přičemž připomeňme, že fakt říkající, že 1-kohranice je 1-kocyklus, jsme již zmínili.

Úkol 4: Ukažte, jak z definice variety plyne existence spočetného otevřeného pokrytí, připomeňte si pojmy. Připomeňte si definici svazku - oba axiomy.

2 Svazková kohomologie Riemannovy plochy nezávislá na pokrytí

Čistě utilitaristicky vzato je možné místo definice 1. kohomologie nezávislé na pokrytí pouze uvést větu, která ukazuje, jak se taková kohomologie spočítá, což také učiníme, abychom pragmaticky orientované čtenáře dlouho nenapínali.

Věta (Leray - slabší verze) 1: Nechť X je Riemannova plocha, $\mathcal{F}$ svazek abelovských grup na X a $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ buď spočetné otevřené pokrytí takové, že $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$, $i \in I$. Potom

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{F}).$$

Všimněte si, že stále nevíme, jak zjistit, zda $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$, neboť jsme kohomologie přímo topologických prostorů nedefinovali. Stále postupujme účelově a uveďme pouze větu:

Věta 2: Nechť X je jednoduše souvislá Riemannova plocha $\mathcal{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{Z}\}$, pak

$$H^1(X, \mathcal{F}) = 0,$$

nechť X je libovolná (ne nutně jednoduše souvislá) Riemannova plocha, potom

$$H^1(X, \mathcal{E}) = 0.$$

Připomeňme, že $\mathcal{E}$ stojí pro svazek diferencovatelných funkcí na Riemannově ploše, uvažované nyní jako varietě reálné dimenze 2; svazky $\mathbb{C}$ a $\mathbb{Z}$ jsou tzv. konstatní svazky, dané ovšem pomocí lokální konstantnosti, jinak by byly obecně pouze předsvazky - připomeňte si pojmy v nějaké učebnici teorie svazků.

Příklad 2: Nechť $X = \mathbb{C} - \{0\} =: \mathbb{C}^*$. Nechť $U_1 := \{x \in \mathbb{C}; \Im x = 0 \Rightarrow \Re x > 0\}$ a $U_2 := \{x \in \mathbb{C}; \Im x = 0 \Rightarrow \Re x < 0\}$, potom U_i jsou jednoduše souvislé, neboť jsou mj. paprskové, a proto $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ podle věty 2 pro $i = 1, 2$ a $\mathcal{F} \in \{\mathcal{E}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}\}$. Stačí tedy spočítat kohomologii pro pokrytí $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$. Popišme nejdříve 1-kocykly. Pro ně platí, že jsou alternující (viz úkol 2), tj. $a_{ii} = 0$ a $a_{ij} = -a_{ji}$, tj. jsou určeny elementem a_{12}, a proto $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \{(0, a, -a, 0), a \in \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)\}$. Protože průnik prvků pokrytí má dvě komponenty souvislosti, je lokálně konstatní svazek $\mathbb{Z}$ na tomto průniku roven kartézskému součinu, $\mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, viz definici konstantního svazku. Celkem tedy $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \{(0, (a, b), (-a, -b), 0), a, b \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Určeme nyní obraz nultého kohraničního operátoru, tj. jak vypadají kohranice. Víme, že $C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1) \times \mathbb{Z}(U_2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a proto $\delta^0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Kodiferenciál je dán $\delta^0(b_1, b_2) := (0, (b_1 - b_2, b_1 - b_2), (b_2 - b_1, b_2 - b_1), 0)$, $b_i \in \mathbb{Z}(U_i) = \mathbb{Z}$, tj. $\mathrm{Im}\, \delta^0 = \{(0, (a, a), (-a, -a), 0), a \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}$. Zjistili jsme tedy, že 1. kohomologie je izomorfní $\mathbb{Z}$. Pro přátele fyziky tento izomorfizmus ψ definujme explicitně: $\psi((0, (a, b), (-a, -b), 0) \mathrm{mod}\, B^1) := a - b$. Definice je regulérní, neboť $\psi(0, (a+c, b+c), (-a-c, -b-c), 0)) = (a+c)-(b+c) = a-b$. ψ je monomorfizmus, neboť $a - b = 0$ iff $a = b$, což implikuje, že přísl. prvek je kohranice, tj. 0 v kohomologii. Epimorfnost je zřejmá.

Úkol 5 Určete 1. kohomologii $\mathbb{C} - \{p_1, \ldots, p_g\}$, kde $g \in \mathbb{N}$ a $p_i \neq p_j$ if $i \neq j$ pro $i, j = 1, \ldots, g$. Později nám bude dimenze jisté 1. kohomologie definovat tzv. geometrický rod Riemannovy plochy.

V dalším dílu seriálu se dozvíme, jak je kohomologie definována bez závislosti na pokrytí neutilitaristicky.