MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Hudeček

Symetrie a separace na příkladě Laplaceova operátoru v nízkých dimenzích

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Děkuji doc. RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph.D., za přínosné rady, trpělivé čtení a ochotu při vedení.

Název práce: Symetrie a separace na příkladě Laplaceova operátoru v nízkých dimenzích

Autor: Štěpán Hudeček

Ústav: Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: V práci se zabýváme analýzou operátorů symetrií pro parciální diferenciální operátory, zejména pro operátor Laplace a Helmholtze v dimenzi dva a tři. Důležitým objektem je v obou případech Lieova algebra Eukleidovy grupy. Separované řešení pro parciální diferenciálni operátory je definováno a ilustrováno na příkladech obou výše zmíněných operátorů a jsou uvedeny příklady souřadných systémů, v kterých se řešení separuje.

Klíčová slova: Helmholtzův a Laplaceův operátor, Eukleidova grupa, operátory symetrie, separace řešení

Title: Symmetry and separation in the case of Laplace operator in low dimensions

Author: Štěpán Hudeček

Institute: The Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In this thesis we analyze symmetry operators for partial differential operators, in particular for Laplace and Helmholtz operators in dimension two and three. In both cases an important object is the Lie algebra of the Euclidean group. Separated solutions for partial differential operators are defined and illustrated for both of the mentioned operators. Examples of coordinate systems are listed, in which the solution separates.

Keywords: Helmholtz and Laplace operator, Euclidean group, symmetry operators, separate solution

Obsah

Úvod

Budeme se zabývat pojmem separace parciálních diferenciálních rovnic. Principem této techniky je rozdělit příslušnou parciální diferenciální rovnici na více jednodušších diferenciálních rovnic, potažmo dokonce rozdělit rovnici až na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Tímto způsobem obecně nenalezneme všechna řešení zadané rovnice, ale jen tzv. separovaná řešení.

Uvažme například rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Jedná se o tzv. Laplaceovu rovnici ve 2 dimenzích. Předpokládejme, že chceme najít řešení ve tvaru $f = g(x)h(y)$, kde zápisem $g(x)$, resp. $h(y)$ myslíme, že g je nezávislá na y, resp. h je nezávislá na x. Přesné zavedení těchto termínů provedeme v Kapitole 3. Dosazením do rovnice výše vznikne

$$\frac{\partial^2 g(x)h(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x)h(y)}{\partial y^2} = h(y)\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} = 0.$$

Vidíme, že pro její platnost jsou *postačující* podmínkou následující vztahy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Tím získáme například separované řešení $f = xy$. Můžeme však do rovnice přidat libovolnou konstantu k^2, kde $k \in \mathbb{R}$ a rovnici upravit následujícím způsobem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 f - k^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Po provedení stejných úprav jako výše dostaneme následující postačující podmínky pro řešení Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + k^2 g = 0 \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - k^2 h = 0.$$

Tyto rovnice mají za řešení (mimo jiné) $g = \sin(kx)$, resp. $h = e^{ky}$. Tedy jiné separované řešení Laplaceovy rovnice je $f(x, y) = \sin(kx)e^{ky}$, což už nemusí být řešení, které je na první pohled patrné. Rozhodně však tato funkce není řešením soustavy 1.

Naše práce je inspirována knihou W. Millera (Miller, 1984), v níž je studován Helmholtzův a Laplaceův operátor včetně souřadnic, v nichž se separují. Fundamentálním nástrojem pro určení těchto souřadnic je pojem operátorů symetrie. Snažili jsme se dodat nezbytné definice, které umožňují formulovat a dokázat některá tvrzení v knize jako věty. V tomto shledáváme jeden z podstatných přínosů práce.

V Kapitole 1 vybudujeme základní aparát teorie diferenciálních operátorů na hladkých varietách. Zjistíme, že hledání řešení některých parciálních rovnic (jako třeba již zmíněné Laplaceovy rovnice) je vlastně hledáním jádra příslušného diferenciálního operátoru (u Laplaceovy rovnice to je operátor $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$). Ukážeme, že můžeme na $\mathbb{R}^2$ nebo obecně na hladké varietě zavést jiné souřadnice. V těchto jiných souřadnicích „vypadají“ diferenciální operátory jinak (například Laplaceův operátor v polárních souřadnicích má tvar $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$).

V Kapitole 2 studujeme Eukleidovu grupu a některé její reprezentace v rámci teorie maticových Lieových grup.

V jiných souřadnicích lze nalézt jiná separovaná řešení. Proto je klíčové studium operátorů symetrií, kterými se zabýváme v Kapitole 3. V této kapitole také určíme algebru symetrií prvního a druhého řádu pro Helmholtzovu a Laplaceovu rovnici ve dvou a třech dimenzích.

V Kapitole 4 této práce budeme také hledat různé souřadné systémy, ve kterých se separuje Laplaceova a Helmholtzova rovnice ve dvou a ve třech dimenzích. Ukážeme (Věta 15), že souřadné soustavy souvisí s tzv. operátory symetrií prvních a druhých řádů a že homogenní diferenciální operátory symetrií přímo indukují některé souřadné systémy, v nichž se zmíněné rovnice separují.

1. Diferenciální operátory

Nejprve vybudujeme aparát pro diferenciální operátory vhodný k analýze některých parciálních diferenciálních rovnic, jako například Laplaceovy či Helmholtzovy rovnice.

1.1 Základní pojmy a definice

Definice 1 (Multiindex)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená množina.* Multiindexem *délky n rozumíme $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.* Velikostí *multiindexu rozumíme $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Dále definujeme pro hladkou $f : U \to \mathbb{C}$ (tyto funkce budeme značit jen $C^\infty(U)$)*

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(t^1)^{\alpha_1} \dots \partial(t^n)^{\alpha_n}} f,$$

kde symboly $\partial(t^i)^0$ vynecháváme.

Značení. V tomto textu budeme někdy používat úspornější značení pro parciální derivace. Pokud $n = 2$, značíme proměnné x, y a místo $\partial^{(2,0)}$ budeme používat ∂_{xx} nebo například ∂_{xyx} místo $\partial^{(1,1)}\partial^{(1,0)}$. Rovněž parciální derivace funkce f budeme značit $\frac{\partial}{\partial x} f = f_x$ apod.

Definice 2 (Diferenciální operátor)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}_0$.* Diferenciálním operátorem *na U řádu nejvýše k myslíme každé zobrazení $L : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dané předpisem*

$$L(f) = \sum_{|\alpha| \le k} g_\alpha \partial^\alpha f,$$

kde g_α a f jsou libovolné funkce z $C^\infty(U)$ a všechny multiindexy v sumě mají délku n. Nejmenšímu takovému číslu k se říká řád diferenciálního operátoru. *Prostor všech diferenciálních operátorů definovaných na U budeme značit $DO(U)$. Pokud parciální diferenciální operátor L splňuje $L = \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha \partial^\alpha f$, nazýváme jej* homogenní.

Poznámka. Každý parciální diferenciální operátor je lineárním zobrazením.

Podotkněme, že ∂_{xyx} je ve výše uvedeném smyslu rovněž diferenciální operátor, neboť u hladkých funkcí platí záměnnost parciálních derivací, tedy $\partial_{xyx} = \partial_{xxy} = \partial^{(2,1)}$.

Rovněž v našem smyslu je i násobení funkcí (zleva) diferenciální operátor, a sice diferenciální operátor řádu 0.

Rovností dvou operátorů $L = K$ myslíme, že pro všechna $f \in C^\infty(U)$ je $L(f) = K(f)$.

Pokud $L = \sum_{|\alpha| \le k} g_\alpha \partial^\alpha = 0$, potom z toho, že U je otevřená množina snadno plyne, že $g_\alpha = 0$ pro všechny multiindexy α. Proto $L = K$, právě tehdy když koeficienty u příslušných parciálních derivací jsou si rovny (uvažujeme jen operátory ve tvaru uvedeném v Definici 2).

Příklad. Typickým příkladem diferenciálního operátoru je *Laplaceův operátor* v n dimenzích $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \partial_{t^i t^i}$ nebo *Helmholtzův operátor* v n dimenzích $\Delta_n + \omega^2$, kde ω je kladné reálné číslo.

Poznámka. $DO(U)$ je *vektorový prostor.* Všimněme si, že prostor všech diferenciálních operátorů $DO(U)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$. (Násobí se zleva a sčítá se pro každý multiindex zvlášť takto $f\partial^\alpha + g\partial^\alpha = (f+g)\partial^\alpha$. Je zřejmé, že takto definované sčítání je konzistentní s aplikací diferenciálního operátoru tedy $(L+K)(f) = L(f) + K(f)$ pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(U)$ a $L, K \in DO(U)$).

Ukážeme, že lze přirozeně dodefinovat operaci násobení diferenciálních operátorů tak, že prostor bude algebrou.

Definice 3 (Součin diferenciálních operátorů)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a nechť máme dva diferenciální operátory L a K na $C^\infty(U)$. Definujeme*

$$L \cdot K = L \circ K,$$

tj. $(L \cdot K)(f) = L(K(f))$, kde f je libovolná funkce z $C^\infty(U)$.

Poznámka. V praxi často symbol $\cdot$ vynecháváme, tak jako vynecháváme symbol $\cdot$ pro násobení.

Připomeňme následující definici. O vektorovém prostoru V řekneme, že je to *asociativní algebra*, pokud je na něm definovaná asociativní bilineární operace, tzv. násobení.

Tvrzení 1. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Potom násobení operátorů je korektně definované a prostor $DO(U)$ tvoří nekomutativní asociativní algebru nad tělesem $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Nejdříve ukážeme korektnost Definice 3, tj. že pro libovolné operátory L, K je jejich součin $L \cdot K$ rovněž diferenciální operátor. Nechť K je diferenciální operátor tvaru $K = g\partial^\alpha$, kde α je multiindex délky n.
(i) Nejprve volme L diferenciální operátor řádu 0, tedy $L = h$. Potom pro libovolné $f \in C^\infty(U)$

$$(LK)(f) = L(K(f)) = hg\partial^\alpha(f),$$

tedy $L \cdot K = hg\partial^\alpha$.
(ii) Dále volme $L = \partial_{t^i}$, potom

$$(LK)(f) = \partial_{t^i}(g\partial^\alpha(f)) = g_{t^i}\partial^\alpha(f) + g\partial^{\alpha+(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}(f),$$

kde multiindexy se sčítají po složkách a v posledním multiindexu v poslední rovnosti je 1 na i-tém místě. Rovnost výše platí díky Leibnizově vzorci pro aplikaci derivace na součin. Z rovnosti plyne, že potom $LK = g_{t^i}\partial^\alpha + g\partial^{\alpha+(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}$.
(iii) Z definice násobení plyne následující vztah

$$\partial^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \underbrace{\partial^{(1,0,\dots,0)} \cdot \ldots \cdot \partial^{(1,0,\dots,0)}}_{\alpha_1\text{-krát}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\partial^{(0,\dots,0,1)} \cdot \ldots \cdot \partial^{(0,\dots,0,1)}}_{\alpha_n\text{-krát}}.$$

Z tohoto vztahu a opakovaným použitím předchozích rovností vyplývá, že pro $L = h\partial^\beta$, kde β je multiindex délky n, rovněž platí, že $LK \in DO(U)$.
(iv) Konečně pro obecné $L, K \in DO(U)$ platí, že $LK \in DO(U)$ díky linearitě a výše uvedeným vztahům.
Nyní ukážeme, že $DO(U)$ tvoří algebru nad komplexními čísly. Již víme, že

$DO(U)$ je vektorový prostor. Stačí tedy, ukážeme-li asociativitu násobení a bilinearitu, tedy platnost následujících rovností

$$\begin{aligned} L(K + cJ) &= LK + cLJ \\ (K + cJ)L &= KL + cJL, \end{aligned}$$

kde $L, K, J \in DO(U)$ a $c \in \mathbb{C}$. Asociativita plyne z toho, že skládání zobrazení je asociativní a my jsme definovali násobení jako skládání. Z výše uvedených rovností dokážeme pouze tu první (druhá se dokáže analogicky). Nechť $f \in C^\infty(U)$, pak

$$\begin{aligned} (L(K + cJ))(f) = L((K + cJ)(f)) = L(K(f) + cJ(f)) = \\ = (LK)(f) + L(cJ(f)) = (LK + cLJ)(f), \end{aligned}$$

kde třetí rovnost plyne z linearity L a čtvrtá z linearity parciálních derivací a komutativity násobení v $\mathbb{C}$.
Nekomutativní je proto, že například platí $(f\partial_x)\partial_x = f\partial_{xx} \neq f_x\partial_x + f\partial_{xx} = \partial_x(f\partial_x)$. Tím je tvrzení dokázáno.

□

Příklad. Ukázka násobení ve 2 dimenzích ($n = 2$), která se nám později bude hodit, je

$$\partial_{xx} f\partial_y = \partial_x(f_x\partial_y + f\partial_{xy}) = f_{xx}\partial_y + 2f_x\partial_{xy} + f\partial_{xxy}$$

Poznámka. Platí dokonce analogie binomické věty v n dimenzích pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\partial^{(k,\,0,\ldots,\,0)} f\partial^\alpha = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\partial^{(i,\,0,\ldots,\,0)} f)\partial^{\alpha+(k-i,\,0,\ldots,\,0)}.$$

Představíme si každé „přiložení“ operátoru ∂_{t^1} tak, že se nám (opět díky Leibnizově vzorci) každý člen v operátoru rozdělí na dva podle toho, co bylo operátorem ∂_{t^1} zderivováno. Potom můžeme každý člen identifikovat s posloupností nul a jedniček podle toho, který činitel byl zderivován v i-tém kroku. Jenže členy se stejným počtem jedniček jsou tytéž. Otázka koeficientu u daného členu se reformuluje na otázku, kolik různých posloupností nul a jedniček délky k obsahuje právě i jedniček. Na tuto otázku je odpověď zjevná, a sice $\binom{k}{i}$.

Definice 4 (Lieova algebra)**.** *Nechť $\mathfrak{g}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Řekneme, že $\mathfrak{g}$ je* Lieova algebra*, pokud je na $\mathfrak{g}$ definovaná bilineární operace $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ splňující následující vlastnosti*

(i) antikomutativitu, pro všechna $x, y \in \mathfrak{g}$
$[x, y] = -[y, x]$

(ii) bilinearitu, pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a pro všechna $x, y, z \in \mathfrak{g}$
$[\alpha x + y, z] = \alpha[x, z] + [y, z]$
$[x, y + \alpha z] = [x, y] + \alpha[x, z]$

(iii) Jacobiho identitu pro všechna $x, y, z \in \mathfrak{g}$
$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Poznámka. Bilineární operace příslušná Lieově algebře $\mathfrak{g}$ se označuje jako *Lieova závorka.*

Definice 5. *Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. Pak $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ spolu se závorkou $[\cdot,\cdot]$ definovanou na homogenních elementech*

$$[X \otimes z, Y] = z[X, Y]$$
$$[X, Y \otimes z] = z[X, Y]$$

se nazývá komplexifikace Lieovy algebry. Na pravé straně jsou Lieovy závorky v Lieově algebře $\mathfrak{g}$.

Tvrzení 2. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Množina všech diferenciálních operátorů na U spolu s operací $[\cdot,\cdot]$ definovanou následujícím vztahem*

$$[L, K] = LK - KL$$

tvoří Lieovu algebru.

Důkaz. Z Tvrzení 1 víme, že $DO(U)$ je vektorový prostor, a tak pouze přímočaře ověříme podmínky z Definice 4.

Antikomutativita je zjevná, neboť stačí vytknout mínus.

Bilinearita plyne z následujícího výpočtu pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a L, K, J diferenciální operátory.

$$\begin{aligned}[aL + K, J] = (aL + K)J - J(aL + K) = aLJ + KJ - aJL - JK = \\ = a(LJ - JL) + (KJ - JK) = a[L, J] + [K, J],\end{aligned}$$

kde druhá rovnost platí, neboť diferenciální operátory tvoří algebru.

Nakonec ověříme Jacobiho identitu. Nechť L, K, J jsou libovolné diferenciální operátory. Pak

$$\begin{aligned}&[L, [K, J]] + [K, [J, L]] + [J, [L, K]] = L(KJ - JK) - (KJ - JK)L+ \\ &+ K(JL - LJ) - (JL - LJ)K + J(LK - KL) - (LK - KL)J = \\ &= LKJ - LJK - KJL + JKL + KJL - KLJ - JLK+ \\ &+ LJK + JLK - JKL - LKJ + KLJ = 0.\end{aligned}$$

□

Poznámka. 1. Závorka definovaná v Tvrzení 2 se zpravidla nazývá *komutátor.*

2. Povšimněme si, že jsme nepoužili žádnou speciální vlastnost diferenciálních operátorů, ale jen to, že tvoří asociativní algebru. Je tedy zjevné, že důkaz je možné vést stejně pro libovolnou algebru s komutátorem jakožto Lieovou závorkou.

3. Pokud uvážíme libovolný vektorový podprostor prostoru všech diferenciálních operátorů, tak nemusí nutně být Lieovou algebrou. Příklad takového podprostoru ve 2 dimenzích je podprostor generovaný prvky ∂_{xx} a $x^2\partial_{yy}$. Děje se tak z toho důvodu, že tento podprostor není uzavřený na komutátor. Platí $[\partial_{xx}, x^2\partial_{yy}] = 2\partial_{yy} + 4x\partial_{xyy} + x^2\partial_{xxyy} - x^2\partial_{xxyy} = 2\partial_{yy} + 4x\partial_{xyy}$ (ve výpočtu jsme využili analogii binomické věty zmíněnou výše). Zde vidíme, že v původním prostoru není výsledný operátor, tedy náš podprostor není uzavřen na komutátory. Dokonce je výsledný operátor vyššího řádu než byly původní dva.

1.2 Souřadnice a vektorová pole

V tomto oddílu definujeme souřadnicové funkce pro obecnou hladkou varietu a pokusíme se zobecnit pojem diferenciálního operátoru z $\mathbb{R}^n$ na obecnou hladkou varietu. Ukážeme souvislost těchto diferenciálních operátorů s vektorovými poli na varietě. Nakonec dokážeme, že každé nenulové vektorové pole je lokálně souřadnicové pole (pro vhodné souřadnice).

Definice 6 (Souřadnicové funkce)**.** *Nechť M je n-dimenzionální hladká varieta a (U, φ) nějaká její mapa. Pro $i = 1, \ldots, n$ definujme*

$$x^i = \pi^i \circ \varphi,$$

kde π^i značí přirozenou projekci na i-tou souřadnici v $\mathbb{R}^n$. Říkáme, že $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou souřadnicové funkce *(*souřadnice*) příslušné mapě (U, φ).*

Poznámka. Pokud je $f : M \to \mathbb{C}$ funkce na varietě, (U, φ) mapa, $(t^1, \ldots, t^n) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, tak výrazem $f(t^1, \ldots, t^n)$ myslíme $f(\varphi^{-1}(t^1, \ldots, t^n))$, tj. hodnotu funkce f v bodě $m \in M$ se souřadnicovými funkcemi $x^i(m) = t^i$.

Příklad. 1. Pro varietu $\mathbb{R}^n$ a identickou mapu definovanou na celém $\mathbb{R}^n$ jsou souřadnicové funkce právě souřadnice takové, jaké je známe. Tyto souřadnice se někdy označují jako *kartézské souřadnice.*

2. Pro varietu $\mathbb{R}^2$ a mapu prvního kvadrantu roviny ($x > 0$ a $y > 0$) definovanou vztahem $(\theta, r) = (\arctan(\frac{y}{x}), \sqrt{x^2 + y^2})$ nazýváme její souřadnice *polární souřadnice roviny.* Body v prvním kvadrantu jsou identifikovány úhlem, který svírá spojnice bodu a počátku s kladnou poloosou osy x,, a vzdáleností od počátku. Poznamenejme ještě, že tyto souřadnice lze definovat na větší množině, a sice na celém $\mathbb{R}^2$ mimo libovolnou polopřímku. Tyto souřadnice lze obdobně zobecnit na sférické souřadnice v n dimenzích.

Nyní přistupme k již zmíněnému zobecnění diferenciálního operátoru na hladkou varietu. Připomeňme, že je-li M n-dimenzionální hladká varieta a (U, φ) její mapa okolo $m \in M$ (tím myslíme, že $m \in U \subseteq M$), pak pro $i = 1, \ldots, n$ je $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ vektor z tečného prostoru $T_m M$ definovaný jako $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m f = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)_{\varphi(m)} (f \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}(f \circ \varphi^{-1})\right)(\varphi(m))$. Z posledního vyjádření je vidět, jak budeme definovat příslušný diferenciální operátor na U.

Definice 7 (Diferenciální operátor pro mapu na varietě)**.** *Nechť $n, i \in \mathbb{N}$, že $1 \leq i \leq n$, M je n-dimenzionální hladká varieta a (U, φ) nějaká její mapa. Nejprve definujme zobrazení $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ předpisem*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}(f \circ \varphi^{-1})\right) \circ \varphi, \qquad \text{kde } f \in C^\infty(U) \tag{1.1}$$

Dále nechť V je otevřená podmnožina U a $k \in \mathbb{N}_0$. Diferenciálním operátorem *na V řádu nejvýše k myslíme lineární zobrazení $L : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ dané předpisem*

$$L(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} g_\alpha \partial^\alpha f,$$

kde g_α a f jsou libovolné funkce z $C^\infty(V)$, α jsou multiindexy mající délku n a operátor ∂^α je definován obdobně jako v Definici 1 (tedy opakovaným aplikováním operátorů typu 1.1 podle multiindexu α). Analogicky jako v $\mathbb{R}^n$ definujeme řád diferenciálního operátoru a homogenní diferenciální operátory řádu k.

Poznámka. Povšimněme si, že operátory typu 1.1 navzájem komutují, neboť

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) f &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t^i}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi\right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^j}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t^i}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^j}\frac{\partial}{\partial t^i}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}\frac{\partial}{\partial t^j}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi = \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) f,\end{aligned} \tag{1.2}$$

kde poslední rovnost plyne analogicky jako první tři rovnosti jen aplikovány v opačném pořadí. Tedy i na varietách platí „záměnnost parciálních derivací“.

Násobení diferenciálních operátorů se definuje stejně jako v prvním oddílu. Analogicky by se dokázalo, že toto násobení má stejné vlastnosti, tj. tvoří asociativní algebru.

Přirozená otázka je následující. Co když uvažujeme různé souřadnice, ale zajímá nás stejný diferenciální operátor? Ukážeme explicitně metodu, jak se dá operátor „přepsat“ do libovolných jiných souřadnic. Nejprve si uvědomme, že stačí definovat přepis do jiných souřadnic pro operátory typu 1.1 a pro funkce. Potom již skládáním a linearitou budeme umět přepis všech diferenciálních operátorů.

Pro obyčejné funkce není co definovat, protože ty na zvolené mapě nezávisí. Dále nechť (U,φ) a (V,ψ) jsou dvě mapy na n-dimenzionální hladké varietě M se souřadnicovými funkcemi $(x^1,\dots,x^n)$ a $(y^1,\dots,y^n)$. Pak si pro operátory typu 1.1 uvědomíme, že pro libovolnou funkci $f\in C^\infty(U\cap V)$ a pro $i=1,\dots,n$ platí

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}(f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial t^i}(\psi\circ\varphi^{-1})^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial t^j}(f\circ\psi^{-1})\right)\circ\psi\circ\varphi^{-1}\right)\circ\varphi = \\ &= \sum_{j=1}^n\left(\left(\frac{\partial}{\partial t^i}(\psi\circ\varphi^{-1})^j\right)\circ\varphi\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}f\right),\end{aligned} \tag{1.3}$$

kde třetí rovnost plyne z řetízkového pravidla. Vidíme, že poslední výraz je roven součtu operátorů vyjádřených v souřadnicích mapy ψ. Odtud plyne, že platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\psi^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

na $C^\infty(U\cap V)$. Vše si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad. Najdeme vyjádření Laplaceova operátoru na $\mathbb{R}^2$ v polárních souřadnicích z příkladu za Definicí 6. Označíme si přechodové funkce $x=f(\theta,r)=r\cos(\theta)$ a

$y = g(\theta, r) = r\sin(\theta)$. Dále označme φ mapu polárních souřadnic a ψ identickou mapu (tedy mapu kartézských souřadnic). Přímou aplikací vzorečku dostáváme vztah

$$\partial_\theta = (f_\theta \circ \varphi)\partial_x + (g_\theta \circ \varphi)\partial_y.$$

Následným aplikováním operátoru ∂_θ zleva máme

$$\partial_{\theta\theta} = (f_{\theta\theta} \circ \varphi)\partial_x + (f_\theta \circ \varphi)\partial_\theta\partial_x + (g_{\theta\theta} \circ \varphi)\partial_y + (g_\theta \circ \varphi)\partial_\theta\partial_y.$$

Nyní dosazením za ∂_θ z předchozí rovnice dostáváme vztah

$$\partial_{\theta\theta} = (f_{\theta\theta} \circ \varphi)\partial_x + (f_\theta \circ \varphi)^2\partial_{xx} + 2(f_\theta \circ \varphi)(g_\theta \circ \varphi)\partial_{xy} + (g_{\theta\theta} \circ \varphi)\partial_y + (g_\theta \circ \varphi)^2\partial_{yy}.$$

Při výpočtu se někdy vynechávají symboly „$\circ\, \varphi$“, a místo toho se píší symboly označující souřadnice v dané mapě, tj. v našem případě (θ, r). V takových případech je důležité dávat pozor na to, ve kterých souřadnicích máme vyjádřenou funkci, na níž chceme operátor aplikovat, protože už nepracujeme na varietě, ale v konkrétní mapě. Přepsáním do zmíněného značení bude námi získaná rovnice vypadat následovně

$$\partial_{\theta\theta} = -r\cos(\theta)\partial_x + r^2\sin^2(\theta)\partial_{xx} - 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_{xy} - r\sin(\theta)\partial_y + r^2\cos^2(\theta)\partial_{yy}.$$

Je třeba si ale uvědomit, že symboly r a θ na pravé straně rovnice chápeme jako funkce proměnných x a y. Analogicky se odvodí vyjádření následujících operátorů

$$\begin{aligned}\partial_r &= \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y\\ \partial_{rr} &= \cos^2(\theta)\partial_{xx} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\partial_{xy} + \sin^2(\theta)\partial_{yy}.\end{aligned}$$

Nyní vidíme, že platí $r\partial_r + r^2\partial_{rr} + \partial_{\theta\theta} = r^2\Delta_2$. Jelikož víme, že $r \neq 0$ pro všechny body, kde jsou polární souřadnice definované, tak můžeme celou rovnici vydělit r^2. Tedy Laplaceův operátor Δ_2 se přepíše do polárních souřadnic následovně

$$\Delta_2 = \partial_{rr} + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Připomeňme ještě, že vyjádření výše platí pouze na $\mathbb{R}^2$ bez příslušné (námi zvolené) polopřímky.
Dále poznamenejme, že je možné analogicky přímo najít vyjádření operátoru ∂_{xx} a ∂_{yy} tak, že zvolíme přechodové funkce v opačném směru, tedy $\theta = f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}) + c$ a $r = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, kde c je konstanta vhodně volená v závislosti na tom, v jakém kvadrantu se nacházíme (jelikož všude bude f alespoň jednou zderivovaná, tak tato konstanta neovlivní výsledné vyjádření). Takto jsme definovali přechodové funkce jen mimo souřadné osy, na kterých je třeba definovat tyto souřadnice jinak. Následně obdobným způsobem jako výše dopočítáme koeficienty u jednotlivých diferenciálních operátorů a obě vyjádření sečteme.

Uvažme M hladkou n-dimenzionální varietu a na ní mapu (U,φ) okolo $m \in M$. Vektory $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$, pro $i = 1, \ldots, n$, tvoří kanonickou bázi tečného prostoru T_mM. Pokud máme libovolné hladké vektorové pole X na M, pak v každém bodě $m \in U$ lze vektor X_m vyjádřit vůči kanonické bázi, tedy

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m.$$

Označme $f^1, \ldots, f^n$ funkce definované na U, pro které platí

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} f^i(m) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m \qquad \forall m \in U.$$

Z faktu, že vektorové pole X je hladké, dostáváme, že příslušné funkce $f^1, \ldots,$ f^n jsou rovněž hladké. Výraz v poslední rovnici napravo lze o přirozeně chápat jako diferenciální operátor na U v souřadnicích mapy (U, φ). Naopak zvolíme-li libovolných n hladkých funkcí $f^1, \ldots, f^n$ na U, potom zobrazení definované vztahem výše je hladké vektorové pole na $U \subseteq M$. Právě jsme tedy ukázali, že homogenní diferenciální operátory řádu jedna jsou hladkými vektorovými poli na U. Z přepisu do jiných souřadnic (viz 1.3) je patrné, že pokud je operátor homogenní, tak je homogenní ve všech různých souřadnicích.

Speciální případy jsou tzv. *souřadnicová* vektorová pole, čímž myslíme vektorová pole definovaná jako diferenciální operátor $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ pro $i = 1, \ldots, n$, kde $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou souřadnicové funkce pro mapu (U, φ). Následující věta ukazuje, že všechna hladká vektorová pole jsou souřadnicová pro vhodnou mapu (U, φ). Důkaz je pouze detailnější verzí důkazu převzatého z (Warner, 1983).

Věta 3. *Nechť M je n-dimenzionální hladká varieta, X je hladké vektorové pole na M, $m \in M$ a $X_m \neq 0$. Potom existuje mapa (U, φ) kolem bodu m se souřadnicovými funkcemi $(x^1, \ldots, x^n)$, že*

$$X|_U = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_U. \tag{1.4}$$

Důkaz. Nejprve najdeme mapu (V, τ) okolo bodu m se souřadnicovými funkcemi $(y^1, \ldots, y^n)$ takovou, že bude platit $\tau(m) = 0$ a navíc $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_m = X_m$.
Víme, že existuje mapa (G, η), že $m \in G$. Definujeme mapu (G, ψ) tak, že $\psi = \eta - \eta(m)$. Díky kompatibilitě s η náleží ψ opět hladkému atlasu variety a platí, že $\psi(m) = 0$. Nyní vyjádříme vektor X_m vůči kanonické bázi indukované ψ, $0 \neq X_m = \sum_{k=1}^{n} a^j \left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)_m$, kde z^k pro $k = 1, \ldots, n$ jsou souřadnicové funkce ψ. Dále definujeme zobrazení τ předpisem $\tau = \rho^{-1} \circ \psi$, kde $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, jehož matice vůči standardní bázi má v prvním sloupci hodnoty $(a^1, \ldots, a^n)$ a ostatní složky jsou definovány libovolně, ale tak, aby ρ bylo regulární. Takové ρ je lineární bijekce, a tedy existuje inverzní hladké zobrazení a to na celém $H = \mathbb{R}^n$. Označme $V = \psi^{-1}(\rho(H))$. Nyní ukážeme, že platí pro y^j, $j = 1, \ldots, n$, souřadnicové funkce příslušné mapy (V, τ), která je opět z hladkého atlasu variety, že

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_m = X_m. \tag{1.5}$$

Pro libovolnou funkci $f : M \to \mathbb{R}$ totiž platí

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_m f &= \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_{\tau(m)} (f \circ \tau^{-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_{\tau(m)} (f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \tau^{-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t^k}\right)_{\psi(m)} (f \circ \psi^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_{\tau(m)} (\psi \circ \tau^{-1})^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)_m f \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_0 \rho^k = \sum_{k=1}^{n} a^k \left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)_m f = X_m(f).
\end{aligned}$$

Tedy platí vztah 1.5.

Z vyjádření $X_{|V} = \sum_{j=1}^{n} f^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ máme na V hladké funkce $f^1, \ldots, f^n$. Uvažme soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dt}\gamma^i(\tilde{t}) = f^i \circ \tau^{-1}(\gamma^1(\tilde{t}), \ldots, \gamma^n(\tilde{t})) \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Nyní využijeme větu z teorie obyčejných diferenciálních rovnic (viz str. 29, Theorem 7, Hurewicz, 1958), ze které dostaneme, že existuje $\epsilon > 0$ a okolí $W \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu 0 takové, že pro všechna $x_0 \in W$ existují $\gamma^1_{x_0}, \ldots, \gamma^n_{x_0} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ třídy C^∞, které řeší předchozí soustavu a navíc splňují následující vztah (počáteční podmínky)

$$\gamma^j_{x_0}(0) = x^j_0 \qquad \text{pro všecna } j = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Nyní definujme zobrazení σ předpisem

$$\sigma(\tilde{t}, a_2, \ \ldots, a_n) = \tau^{-1}(\gamma^1_{(0,\, a_2, \ldots,\, a_n)}(\tilde{t}), \ldots, \gamma^n_{(0,\, a_2, \ldots,\, a_n)}(\tilde{t}))$$

pro $\tilde{t} \in (-\epsilon, \epsilon)$ a $(0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Důležitý výsledek teorie obyčejných diferenciálních rovnic (viz str. 29, Theorem 9, Hurewicz, 1958) říká,že zobrazení σ je C^∞. Ukažme, že zobrazení $d\sigma$ je regulární v bodě $(0, 0, \ldots, 0)$. Konkrétně ukážeme, že platí

$$d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_m \qquad \text{pro všechna} i = 1, \ldots, n.$$

Nejprve uvažujeme případ, kdy $i = 1$. Zvolme g libovolnou funkci na M

$$\begin{aligned}
&\left(d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_0\right) g = \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_0 (g \circ \sigma) = \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_0 (g \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t^k}\right)_0 (g \circ \tau^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_0 (\tau \circ \sigma)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_m g \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (\gamma^k_{(0,\ldots,\, 0)}(\tilde{t})) = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_m g,
\end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z 1.6 a 1.5 (neboť $f^i(m) = \delta^{i1}$ z 1.5). Nyní uvažme $1 < i \leq n$.

$$\begin{aligned}
&\left(d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)_0\right) g = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t^k}\right)_0 (g \circ \tau^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)_0 (\tau \circ \sigma)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_m g \lim_{t^i \to 0} \frac{\gamma^k_{(0,\ldots,\, t^i, \ldots,\, 0)}(0) - \gamma^k_{(0,\ldots,\, 0)}(0)}{t^i} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_m g \lim_{t^i \to 0} \frac{t^i \delta^{ki} - 0}{t^i} = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_m g,
\end{aligned}$$

kde první rovnost plyne stejně jako v případě, pro $i = 1$. Druhá je definicí derivace a třetí vyplývá ze vztahu 1.7. Ve třetím výrazu je t^i na i-tém místě v závorce. Máme tedy dokázanou regulárnost $d\sigma$. Z věty o inverzním zobrazení pro hladké variety (viz Kowalski, 2001) dostáváme existenci $\varphi = \sigma^{-1}$ na nějakém okolí U

bodu m. Nyní jen dokážeme, že toto (U, φ) je námi hledaná mapa. Označíme-li $x^1, \ldots, x^n$ její souřadnicové funkce, pak pro každé $p \in U$ a pro každou hladkou funkci $g \in C^\infty(U)$ platí

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p g = \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_{\varphi(p)} (g \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_{\varphi(p)} (g \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p g \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right)_{\varphi(p)} (\tau \circ \sigma)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p g \left(\frac{d}{dt}\right)_{\varphi^1(p)} \gamma^k_{(0,\, \varphi^2(p), \ldots,\, \varphi^n(p))}(\tilde{t}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p (g) f^k(\sigma(\varphi(p))) = X_p(g).
\end{aligned}$$

Tedy platí vztah 1.4 a tvrzení je tím dokázáno.

$\square$

Poznámka. Předchozí tvrzení je prvním krokem důkazu Frobeniovy věty o involutivních systémech viz (Warner, 1983). Všimneme si, že komutování je nutnou podmínkou pro souřadnicovost vektorových polí vůči jedné zvolené mapě (viz 1.2). Lze ukázat, že je i podmínkou postačující. Přesněji, pokud $(X_1, \ldots, X_n)$ jsou lineárně nezávislá vektorová pole pak existuje mapa (U,φ), že $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, kde x^i jsou souřadnicové funkce mapy φ (viz str. 243, Theorem 9.3, Frankel, 2007).

2. Eukleidova grupa

Zde definujeme maticovou Lieovu grupu a Lieovu algebru příslušnou této grupě a ukážeme si některé reprezentace Eukleidovy grupy.

Definice 8 (Maticová Lieova grupa)**.** *Řekneme, že G je* maticová Lieova grupa*, pokud je to uzavřená podgrupa grupy $GL(n, \mathbb{R})$, pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.*

Poznámka. Podotkněme, že uzavřenost v definici maticové Lieovy grupy je myšlena v $GL(n, \mathbb{R})$ a v libovolné normě na $\mathbb{R}^{n^2}$.

Lze definovat i obecnou Lieovu grupu tak, že Lieova grupa je n-dimenzionální varieta a zároveň topologická grupa taková, že operace $\cdot : G \times G \to G$ a $^{-1} : G \to G$ splňují axiomy grupy a zároveň jsou C^∞. Dá se ukázat, že maticová Lieova grupa je Lieova grupa ve výše uvedeném smyslu.

Příklad. Uveďme několik základních příkladů Lieových grup.

1. *Grupa ortogonálních transformací $O(n)$.* Jedná se o grupu ortogonálních matic $n \times n$, tedy matic splňujících $A^T A = I_n$. Díky této vlastnosti se jedná o maticovou Lieovu grupu, neboť pro libovolnou posloupnost matic $A_k \to A$, kde $A \in GL(n, \mathbb{R})$, platí ze spojitosti násobení a transpozice, že $I_n = (A_k)^T A_k \to A^T A$, tedy nutně $A^T A = I_n$, z čehož již vyplývá, že $A \in O(n)$. Grupa $O(n)$ obsahuje všechny ortogonální transformace prostoru $\mathbb{R}^n$, tedy lineární izometrie.

2. *Grupa vlastních ortogonálních transformací $SO(n)$.* Jedná se o podgrupu $O(n)$ splňující navíc, že pro všechna $A \in SO(n)$ je $\det A = 1$. Opět se jedná o maticovou Lieovu grupu, neboť je to vzor $\{1\}$ (uzavřené množiny) při zobrazení *det*, které je spojité (dokonce polynomiální). Grupa $SO(n)$ reprezentuje všechny vlastní lineární izometrie $\mathbb{R}^n$.

3. *Grupa všech translací* v $\mathbb{R}^n$ je abelovská maticová Lieova grupa. Jsou to matice blokového tvaru

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & \boldsymbol{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{kde } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Jelikož konvergence v $GL(n+1,\mathbb{R})$ je konvergence po složkách je zjevné, že grupa translací je uzavřená.

Definice 9 (Eukleidova grupa)**.** Eukleidova grupa $E(n)$*. Jedná se o podgrupu $GL(n+1, \mathbb{R})$ všech matic splňujících následující blokové schéma*

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \textit{kde } A \in O(n), \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Zřejmě se jedná o maticovou Lieovu grupu (v jednotlivých blocích jsou uzavřené množiny příslušně rozměrných matic). Eukleidova grupa působí na vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ takto. Uvažme vektor $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ definovaný

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \hline 1 \end{array}\right).$$

Poté libovolnou matici $B \in E(n)$, kde B je tvaru jako v 2.2, aplikujeme na $\tilde{\boldsymbol{u}}$, načež uvážíme projekci na prvních n složek. Je snadné ověřit, že výsledný vektor bude tvaru $A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. Jedná se tedy o ortogonální transformaci složenou s translací podle vektoru $\boldsymbol{v}$. Eukleidova grupa ve skutečnosti obsahuje všechny izometrie roviny (izometrií myslíme zobrazení zachovávající vzdálenost pro každou dvojici bodů).

Definice 10 (Lieova algebra Lieovy grupy)**.** *Nechť $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ je maticová Lieova grupa. Množině všech $X \in M(n,\mathbb{R})$ takových, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je $e^{tX} \in G$, se říká* Lieova algebra grupy G.

Poznámka. Prvku e^{tX} se říká maticová exponenciála.

Lze přímočaře ověřit, že takto definovaná Lieova algebra je skutečně Lieova algebra ve smyslu Definice 4, kde jako Lieovu závorku volíme komutátor matic. Ověřme například, že je takto definovaná struktura uzavřená na komutátor. Nechť $X, Y \in \mathfrak{g}$. Potom z definice maticové exponenciály lze odvodit

$$e^{tAXA^{-1}} = Ae^{tX}A^{-1} \in G \qquad\qquad \text{pro } A \in G, t \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne, že pro všechna $A \in G$ je $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$. Po dosazení za $A = e^{tY}$ dostaneme výraz, jehož derivací v nule máme

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 e^{tY}Xe^{-tY} = \left(Ye^{ty}Xe^{-tY} - e^{tY}XYe^{-tY}\right)\Big|_{t=0} = -[X,Y],$$

což je prvek Lieovy algebry, neboť Lieova algebra Lieovy grupy je konečně rozměrný vektorový prostor, tedy i uzavřený, a proto

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 e^{tY}Xe^{-tY} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{tY}Xe^{-tY} - X}{t} \in \mathfrak{g}.$$

V celém textu budeme používat fakt, že $e^X e^Y = e^{X+Y}$, pokud $[X,Y] = 0$. To je důsledek přímo definice maticové exponenciály. Poznamenejme, že odtud plyne $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.

Příklad. Spočítáme Lieovu algebru Eukleidovy grupy. Hledáme všechny matice $X \in M(n+1,\mathbb{R})$ takové, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je $e^{tX} \in E(n)$. Matici X budeme hledat v blokovém tvaru, v jakém jsme uváděli matice Eukleidovy grupy 2.2, tedy ve tvaru

$$X = \left(\begin{array}{c|c} Y & \boldsymbol{z} \\ \hline \boldsymbol{u}^T & a \end{array}\right), \qquad\qquad \text{kde } Y \in M(n,\mathbb{R}), \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}.$$

Má platit

$$e^{tX} = \left(\begin{array}{c|c} A(t) & \boldsymbol{v}(t) \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

kde $A(t)$ a $\boldsymbol{v}(t)$ značí funkce jedné reálné proměnné. Z derivace tohoto vztahu v nule a srovnáním s předpisem pro X dostáváme

$$X = \left(\begin{array}{c|c} Y & Z \\ \hline \boldsymbol{u}^T & a \end{array}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 e^{tX} = \left(\begin{array}{c|c} A'(0) & \boldsymbol{v}'(0) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud plyne, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ a $a = 0$. Nyní rozepsáním exponenciály pro tuto matici dostáváme

$$e^{tX} = \left(\begin{array}{c|c} e^{tY} & \boldsymbol{v}(t) \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Z toho, že v prvním bloku musí být ortogonální matice, dostáváme, že

$$e^{tY} = A(t) = (A^T)^{-1}(t) = (e^{tY^T})^{-1} = e^{-tY^T}.$$

Následným zderivováním tohoto vztahu v 0 dostáváme, že $Y = -Y^T$ tedy, že Y je antisymetrická matice.
Obráceně, pokud X je tohoto tvaru, tak platí

$$e^{tX} = e^{t\left(\begin{array}{c|c} Y & \boldsymbol{z} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{tY} & \boldsymbol{v}(t) \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in G.$$

Lieovu algebru Eukleidovy grupy $\mathfrak{E}(n)$ tak tvoří blokové matice tvaru

$$X = \left(\begin{array}{c|c} Y & \boldsymbol{z} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \text{kde } Y = -Y^T \text{a } \boldsymbol{z} \text{ je libovolné.}$$

Speciálně pro $n = 2$ tvoří bázi $\mathfrak{E}(2)$ matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

s komutátory

$$[M, P_1] = -P_2 \qquad [M, P_2] = P_1 \qquad [P_1, P_2] = 0.$$

Definice 11 (Reprezentace Lieovy grupy)**.** *Nechť G je Lieova grupa.* Reprezentací *G rozumíme homomorfismus $\pi : G \to GL(V)$, kde V je nějaký vektorový prostor.*

Poznámka. V teorii reprezentací se obvykle předpokládá, že V je topologický vektorový prostor a zobrazení $G \times V \to V$, $(g, \boldsymbol{v}) \mapsto \pi(g)\boldsymbol{v}$ je spojité. Tuto restrikci na reprezentace uvažovat nebudeme.

Příklad. 1. $E(n)$ má přirozenou reprezentaci na $\mathbb{R}^{n+1}$, a sice $\lambda(g)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$, kde $g \in E(n)$. Jedná se o homomorfismus, protože násobení na Lieově grupě $E(n)$ je maticové násobení, které je asociativní.

2. Jiná reprezentace $E(n)$ existuje na funkcích $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Označíme-li $g_{A,\boldsymbol{v}}$ prvek $E(n)$ jako ve vyjádření 2.2, potom pro $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ položíme

$$(\pi(g_{A,\boldsymbol{v}})f)(\boldsymbol{x}) = f(A^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})).$$

Ověříme, že se jedná o homomorfismus. Nechť $g_{A,\boldsymbol{v}}, g_{B,\boldsymbol{u}} \in E(n)$. Nejprve si uvědomme, že platí $g_{A,\boldsymbol{v}} g_{B,\boldsymbol{u}} = g_{AB,A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}$. Přímým výpočtem dostáváme pro $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&(\pi(g_{A,\boldsymbol{v}})(\pi(g_{B,\boldsymbol{u}})f))(\boldsymbol{x}) = (\pi(g_{B,\boldsymbol{u}})f)(A^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})) = \\ &= f\left(B^{-1}\left(A^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}\right)\right) = f((AB)^{-1}(\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})) = (\pi(g_{AB,A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}})f)(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Každá akce $\tau : G \to Bij(\mathbb{R}^n)$ Lieovy grupy G indukuje reprezentaci $\rho : G \to \operatorname{Aut}(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ předpisem

$$(\rho(g)f)(\boldsymbol{x}) = f(\tau(g^{-1})\boldsymbol{x}).$$

Definice 12 (Invariantnost operátoru vůči grupě)**.** *Nechť L je diferenciální operátor. Řekneme, že L je* invariantní vůči G, *pokud pro každou $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a každý prvek $g \in E(n)$ platí*

$$L(\rho(g)))f) = \rho(g)(L(f)), \tag{2.3}$$

kde ρ je definováno výše.

Tvrzení 4. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak Laplaceův i Helmholtzův operátor jsou invariantní vůči $E(n)$ (pro akci jako v bodu 4 příkladu za Definicí 8).*

Důkaz. Uvažme libovolnou funkci $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a libovolný prvek $g_{A,\boldsymbol{v}} \in E(n)$. Pro každé $i = 1, \dots, n$ platí

$$\begin{aligned}
(\partial_{x^i x^i}(\pi(g_{A,\boldsymbol{v}})f))(x) &= \partial_{x^i x^i}\Big(f(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))\Big) = \\
&= \partial_{x^i}\left(\sum_{j=1}^n f_{x^j}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))(A^{-1})_{ji}\right) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n f_{x^j x^k}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))(A^{-1})_{ki}(A^{-1})_{ji}.
\end{aligned}$$

Sečteme-li právě vypočítané výrazy přes všechna i, dostáváme

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,\,k=1}^n f_{x^j x^k}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))\sum_{i=1}^n(A^{-1})_{ki}(A^{-1})_{ji} = \sum_{j,\,k=1}^n f_{x^j x^k}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))\delta^{jk} = \\
&= \sum_{i=1}^n f_{x^i x^i}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v})).
\end{aligned}$$

Předposlední rovnost plyne z toho, že A je ortogonální matice, tedy $A^{-1} = A^T$, a že výraz v sumě je standardní skalární součin řádků A^{-1}, tedy řádků původní matice A. Odtud už přímo plyne, že

$$(\Delta_n(\pi(g_{A,\boldsymbol{v}})f))(\boldsymbol{x}) + \omega^2 f = \sum_{i=1}^n f_{x^i x^i}(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v})) + \omega^2 f = (\pi(g_{A,\boldsymbol{v}}(\Delta_n f + \omega^2 f))(\boldsymbol{x}).$$

Jelikož rovnice výše platí, pro ω kladné i nulové, tak jsme tímto dokázali invarianci jak pro Laplaceův, tak pro Helmholtzův operátor.

□

Poznámka. Dokonce můžeme $E(n)$ reprezentovat i na diferenciálních operátorech na $\mathbb{R}^n$, a to konjugacemi. Nechť L je diferenciální operátor na $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $g \in E(n)$, pak definujeme L^g jako operátor na $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ následovně

$$L^g = \pi(g) \circ L \circ \pi(g^{-1}).$$

Z výpočtu v důkazu tvrzení výše lze vidět, že pro operátor $L = h\partial^\alpha$ je vyjádření následovné

$$(L^{g_{A,\boldsymbol{v}}}(f))(\boldsymbol{x}) = h(A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{|\alpha|}=1}^n (A^T)_{i_1 j_1} \dots (A^T)_{i_{|\alpha|} j_{|\alpha|}} f_{x^{i_1} \dots x^{i_{|\alpha|}}}(\boldsymbol{x}), \tag{2.4}$$

kde $j_1, \dots, j_{|\alpha|}$ jsou indexy jednotlivých proměnných odpovídající multiindexu α. Z vyjádření vidíme, že se jedná o diferenciální operátor. Navíc z výpočtu před Definicí 12 vyplývá, že je to homomorfismus. Tedy reprezentace je takto korektně definována. Další užitečné pozorování pro tuto reprezentaci je, že zavedeme-li si novou mapu definovanou $\varphi : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$, pak v souřadnicích této nové mapy náš operátor vypadá následovně $h(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))\partial^{\alpha}$. Tato konjugace tak zachovává předpis operátoru (až na funkce, které zobrazuje posunuté a otočené). Jedná se o vyjádření v souřadnicích transformovaných aplikovaním prvku grupy $E(n)$.

Poznámka. Pokud operátor L komutuje např. s Laplaceovým operátorem Δ_n, tedy $[L, \Delta_n] = 0$, tak potom i operátor L^g komutuje s Laplecovým operátorem pro každé $g \in E(n)$. To plyne z invariance Laplaceova operátoru vůči $E(n)$, kterou jsme výše dokázali a z následujícího výpočtu

$$[\pi(g) \circ L \circ \pi^{-1}(g), \Delta_n] = \pi(g) \circ L \circ \pi^{-1}(g) \circ \Delta_n - \Delta_n \circ \pi(g) \circ L \circ \pi^{-1}(g) =$$
$$\pi(g) \circ L \circ \Delta_n \circ \pi^{-1}(g) - \pi(g) \circ \Delta_n \circ L \circ \pi^{-1}(g) = \pi(g) \circ [L, \Delta_n] \circ \pi^{-1}(g) = 0.$$

Obdobně to platí i pro Helmholtzův operátor.

3. Symetrie diferenciálních operátorů

V této kapitole budeme definovat pojem operátoru symetrie a s pomocí „drobných lemmat“ spočítáme Lieovu algebru operátorů symetrie příslušnou Laplaceově resp. Helmholtzově rovnici, tj. rovnici $\Delta_n(f) = 0$ resp. $\Delta_n(f) + \omega^2 = 0$, $\omega > 0$.

3.1 Základní vlastnosti operátorů symetrie

Definice 13 (Řešení diferenciálního operátoru)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá podmnožina a L diferenciální operátor na $C^\infty(U)$. Řekneme, že $f \in C^\infty(U)$ je* řešením *L, pokud $L(f) = 0$, a tedy f je v jádru L. Jádro operátoru L a značíme $\mathcal{F}_L$.*

Poznámka. Díky linearitě L vidíme, že jádro operátoru L je komplexní vektorový prostor.

Definice 14 (Operátor symetrie)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá množina, L je diferenciální operátor na $C^\infty(U)$ a $n \in \mathbb{N}$.* Operátorem symetrie *řádu nejvýše n příslušným rovnici $L(f) = 0$ rozumíme každý operátor $K \in DO(U)$ řádu nejvýše n takový, že*

$$[K, L] = RL,$$

kde $R \in DO(U)$ a je řádu nejvýše $n - 1$.
Řekneme, že K je jednoduchý operátor symetrie*, jedná-li se o homogenní operátor symetrie prvního řádu pro $L(f) = 0$, který navíc komutuje s L.*

Tvrzení 5. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá množina, $L, K \in DO(U)$ a K je operátor symetrie rovnice $L(f) = 0$. Potom K zobrazuje jádro operátoru L do sebe, tedy $K(\mathcal{F}_L) \subseteq \mathcal{F}_L$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{F}_L$. Potom přímo z definicie operátoru symetrie máme $(LK)(f)$ $= (KL)(f) - (RL)(f) = K(0) - R(0) = 0$, kde druhá rovnost plyne z toho, že $f \in \mathcal{F}_L$.

□

Poznámka. V knize Millera (Miller, 1984) se píše (str. 3), že pro Helmholtzův operátor a operátory řádu 1 a 2 je snadno dokazatelná i opačná implikace tedy, že pokud operátor zachovává jádro, jedná se o operátor symetrie, avšak její důkaz neuvádí.

Tvrzení 6. *Operátory symetrie prvního řádu rovnice $L(f) = 0$ tvoří Lieovu algebru.*

Důkaz. Nechť K_1, K_2 jsou operátory symetrie řádu 1. Platí tedy $[K_1, L] = R_1 L$ a $[K_2, L] = R_2 L$. Všimneme si, že jelikož se jedná o operátory řádu 1, jsou R_1 a R_2 hladké funkce.

Potom $[c_1K_1 + K_2, L] = c_1[K_1, L] + [K_2, L] = c_1R_1L + R_2L = (c_1R_1 + R_2)L$, kde první rovnost plyne z bilinearity Lieovy závorky.

Rovněž platí

$$\begin{aligned}
[[K_1, K_2], L] &= K_1K_2L - LK_1K_2 - K_2K_1L + LK_2K_1 = K_1R_2L + K_1LK_2 + \\
&+ R_1LK_2 - K_1LK_2 - K_2R_1L - K_2LK_1 + K_2LK_1 - R_2LK_1 = \\
&= K_1R_2L + R_1LK_2 - K_2R_1L - R_2LK_1 = K_1R_2L - K_2R_1L + \\
&+ R_1K_2L - R_1R_2L - R_2K_1L + R_2R_1L = (\tilde{K}_1(R_2) - \tilde{K}_2(R_1))L,
\end{aligned}$$

kde $K_i = \tilde{K}_i + f_i$, $\tilde{K}_i$ je homogenní operátor pvního řádu a f_i je operátor nultého řádu a výraz $\tilde{K}_i(R_j)$ je aplikace diferenciálního operátoru $\tilde{K}_i$ na funkci R_j.

□

Poznámka. Obdobně lze dokázat, že jednoduché operátory symetrie taktéž tvoří Lieovu algebru.

Definice 15 (Nezávislost na souřadnicích)**.** *Nechť $n, i \in \mathbb{N}$ taková, že $1 \le i \le n$, M je n-dimenzionální hladká varieta a $(U\ \varphi)$ její mapa. Řekneme, že funkce $f : U \to \mathbb{C}$* nezávisí na souřadnicích $x^1, \ldots, x^i$, *pokud pro všechna*

$$\begin{aligned}
(t_1^1, \ldots, t_1^i, t^{i+1}, \ldots, t^n), (t_2^1, \ldots, t_2^i, t^{i+1}, \ldots, t^n) \in \varphi(U) \ \textit{platí} \\
f(t_1^1, \ldots, t_1^i, t^{i+1}, \ldots, t^n) = f(t_2^1, \ldots, t_2^i, t^{i+1}, \ldots, t^n).
\end{aligned}$$

Někdy píšeme, že $f = f(x^{i+1}, \ldots, x^n)$.

Poznámka. Pokud funkce nezávisí na $x^1, \ldots, x^n$, pak se zřejmě jedná o konstantní funkci.

Analogicky definujeme nezávislost na souřadnicích $x^{i_1}, \ldots, x^{i_j}$ pro $i_1, \ldots, i_j = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, n$

Nyní dokážeme dvě pomocná lemmata pro výpočet operátorů symetrie pro konkrétní rovnice.

Lemma 7. *Nechť $n, k, l \in \mathbb{N}$ takové, že $k + l = n$ a $k, l \ge 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá množina a $f, g : U \to \mathbb{C}$ jsou funkce. Označme $x^1, \ldots, x^k$, $y^1, \ldots, y^l$ souřadnice $\mathbb{R}^n$ příslušné identické mapě. Nechť současně platí*

(i) f nezávisí na souřadnicích $x^1, \ldots, x^k$,

(ii) g nezávisí na souřadnicích $y^1, \ldots, y^l$,

(iii) $f = g$ na U.

Potom $f = c$ na U, kde c je konstanta.

Důkaz. Ať U, f, g jsou jako v předpokladech. Ukážeme, že $f = c$ pro nějaké konstantní c na libovolném otevřeném kvádru v U.
Mějme otevřený kvádr $H = (a^1, b^1) \times \ldots \times (a^n, b^n) \subseteq U$.
Pak pro všechna $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) = (x_1^1, \ldots, x_1^k, y_1^1, \ldots, y_1^l)$, a
$(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}) = (x_2^1, \ldots, x_2^k, y_2^1, \ldots, y_2^l) \in H$ platí

$$c = f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) = f(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1}) = g(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1}) = g(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}) = f(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$$

Z toho plyne, že $f = c$ na H, kde rovnosti plynou postupně z vlastností (i), (iii), (ii), (iii).

Nyní dokážeme sporem, že funkce f nabývá v každém bodě U stejné hodnoty. Nechť tedy pro spor existuje $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) = (x_1^1, \dots, x_1^k, y_1^1, \dots, y_1^l)$ a $(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}) = (x_2^1, \dots, x_2^k, y_2^1, \dots, y_2^l) \in U$, že $f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) \neq f(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$. Jelikož U je souvislá a otevřená, tak je i křivkově souvislá. Uvažujme tedy křivku $\varphi : [0,1] \to U$ takovou, že $\varphi(0) = (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})$ a $\varphi(1) = (\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2})$. Označme $t_0 = \sup\{t | f(\varphi(t)) = f(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})\}$. Z otevřenosti U najdeme $\epsilon > 0$ takové, že $B(\varphi(t_0), \epsilon) \subseteq U$. Předpokládejme, že $t_0 \neq 0{,}1$. Najdeme $\delta > 0$ (ze spojitosti φ) tak, že $\varphi([t_0-\delta, t_0+\delta]) \subseteq B(\varphi(t_0), \epsilon/4) \& [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq [0, 1]$. Dále označme $\boldsymbol{z_0} = \varphi(t_0)$. Pak jistě $\varphi([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \subseteq Q$, kde Q je otevřený kvádr s hranou délky ϵ a středem v bodě $\boldsymbol{z_0}$. Pak ale z definice suprema existuje $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, že $f(\varphi(t)) = f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$. Jelikož funkce $f = c$ na každém otevřeném kvádru, pak $f(\varphi(t_0 + \delta)) = f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ což je spor s definicí suprema.

Zbývají případy, kdy $t_0 = 1$ a $t_0 = 0$. Pokud $t_0 = 0$, pak volíme $\delta > 0$, že $\varphi([0, \delta]) \subseteq B(\varphi(0), \epsilon/4)$ a dostáváme obdobný spor. Pokud $t_0 = 1$, pak volíme $\delta > 0$ tak, že $\varphi([1 - \delta, 1]) \subseteq B(1, \epsilon/4)$ a dostáváme, že $f(\varphi(1)) = f(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}) = f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ což je ve sporu s předpokladem, že $f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) \neq f(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$. V každém případě dostáváme spor, a tudíž tvrzení platí.

□

Poznámka. Předchozí lemma tedy říká, že pokud funkce na otevřené souvislé množině nezávisí na $x^1, \dots, x^k$ a na $x^{k+1}, \dots, x^{k+l}$, pak nezávisí na $x^1, \dots, x^{k+l}$. Bez předpokladu souvislosti zmíněné lemma neplatí. Například pro funkci v rovině na 2 otevřených čtvercích $(0, 1)^2$ a $(2, 3)^2$ může být rovna 2 různým konstantám. Taková funkce nezávisí na x a nezávisí na y, ale nelze říct, že je nezávislá na x a y současně.

Lemma 8. *Nechť $n, k, l \in \mathbb{N}$ takové, že $k + l \leq n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená konvexní množina, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{C}$ a $C, K : U \to \mathbb{C}$. Označme prvních $k + l$ souřadnic identické mapy jako $x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l$ a ostatní jako $z^1, \dots, z^m$ pro $m = n - k - l$. Nechť dále platí, že*

(i) C nezávisí na $x^1, \dots, x^k$,

(ii) K nezávisí na $y^1, \dots, y^l$,

(iii) Pro všechna $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l, z^1, \dots, z^m) \in U$ položme $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}) + C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{y}) + K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

Potom platí, že $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y}) + L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, kde $L : U \to \mathbb{C}$ funkce, která nezávisí na prvních $k + l$ souřadnicích.
Speciálně pokud $A(x, y) = f(x) + C(y) = g(y) + K(x)$, tj. $n = 2$, tak $A = f(x) + g(y) + \alpha$ pro nějakou konstantu α.

Důkaz. Povšimneme si, že funkce f a g můžeme chápat jako funkce na U nezávisející na souřadnicích $y^1, \dots, y^l, z^1, \dots, z^m$, resp. na $x^1, \dots, x^k, z^1, \dots, z^m$.
Nejprve dokážeme lemma pro $k + l = n$. Víme, že na U platí, že $f + C = g + K$, tedy ekvivalentně $C - g = K - f$. Nyní si povšimneme, že na pravé straně rovnice je funkce, která nezávisí na souřadnicích $x^1, \dots, x^k$, zatímco na levé je

funkce, která nezávisí na souřadnicích $y^1, \dots, y^l$. Nyní použijeme Lemma 7 a dostaneme, že $C - g = K - f = \alpha$, pro nějakou konstantu $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom zjevně $A = f + C = f + (C - g) + g = f + \alpha + g = f + (K - f) + g = K + g = A$. Tedy $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in U : A = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y}) + \alpha$ a tvrzení platí.
Pokud $k + l < n$, pak stačí označit $L(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l, z^1, \dots, z^m)$, kde pro každou m-tici $z^1, \dots, z^m$ platí, že $A = f + g + L$. Taková funkce existuje, díky předchozí části důkazu a díky konvexitě, neboť potom je každý řez (řezem myslíme všechny body s nějakou konstantní m-ticí) rovněž souvislý. Zřejmě potom funkce L nezávisí na $x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l$.

□

Poznámka. Předpoklad konvexity není nutný, lemma je možné naprosto stejně dokázat i pouze za předpokladu toho, že řez v každé m-tici $z^1, \dots, z^m$ je souvislá množina. Pro obecnou otevřenou souvislou množinu v $\mathbb{R}^n$ Lemma 8 neplatí.

3.2 Příklady operátorů symetrie

Nyní spočítáme jednoduché operátory symetrie a obecné operátory symetrie řádu 1 a 2 Laplaceovy a Helmholtzovy rovnice v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

3.2.1 Operátory symetrie prvního řádu pro Helmholtzovu rovnici ve 2 dimenzích

Nechť $L = A\partial_x + B\partial_y + C$, kde $A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nejprve rozepíšeme komutátor pomocí bilinearity. Dostáváme

$$\begin{aligned}[L, \Delta_2 + \omega^2] = [A\partial_x, \partial_{xx}] + [A\partial_x, \partial_{yy}] + [A\partial_x, \omega^2] + [B\partial_y, \partial_{xx}] + [B\partial_y, \partial_{yy}] + \\ + [B\partial_y, \omega^2] + [C, \partial_{xx}] + [C, \partial_{yy}] + [C, \omega^2].\end{aligned}$$

Rozepíšeme jednotlivé komutátory a položíme je rovny operátoru $R\Delta_2 + R\omega^2$.

$$\begin{aligned}-(2A_x\partial_{xx} + 2B_y\partial_{yy} + (2A_y + 2B_x)\partial_{xy} + (A_{xx} + A_{yy} + 2C_x)\partial_x + \\ + (B_{xx} + B_{yy} + 2C_y)\partial_y + C_{xx} + C_{yy}) = R\partial_{xx} + R\partial_{yy} + R\omega^2\end{aligned}$$

Dva operátory jsou si rovny právě tehdy, když jsou si rovny jejich koeficienty u příslušných parciálních derivací. Z této úvahy dostáváme sadu diferenciálních rovnic.

$$-2A_x = R = -2B_y \qquad 2A_y + 2B_x = 0 \tag{3.1}$$

$$0 = A_{xx} + A_{yy} + 2C_x \qquad B_{xx} + B_{yy} + 2C_y = 0 \tag{3.2}$$

$$R\omega^2 = C_{xx} + C_{yy}. \tag{3.3}$$

Z rovnic 3.1 dostáváme, že $A_x - B_y = 0$ a $A_y + B_x = 0$. Zderivováním první rovnice dle x, druhé dle y a následným sečtením obdržíme vztah $A_{xx} + A_{yy} = 0$ a obdobně pro B. Dosazením do rovnic 3.2 máme $C_x = C_y = 0$, tedy že C je konstantní. Z rovnice 3.3 dostáváme, že $R\omega^2 = 0$, z čehož plyne $R = 0$. To znamená, že všechny operátory symetrie přímo komutují s Helmholtzovým operátorem. Opětovným dosazením do první rovnice 3.1 máme, že A nezávisí na x a že B nezávisí na y, tedy i derivace A_y nezávisí na x a B_x nezávisí na y. Z Lemmatu 7 plyne, že

$A_y = -B_x = \alpha$, kde α je nějaká konstanta. Následným integrováním obdržíme výsledné rovnice

$$A = \alpha y + \beta \qquad B = -\alpha x + \gamma \qquad C = \delta.$$

Obecný operátor je tedy $L = (\alpha y + \beta)\partial_x + (\gamma - \alpha x)\partial_y + \delta$. Bázi tohoto podprostoru tvoří tyto prvky (dosadíme vždy za jeden parametr jedničku a za ostatní nulu)

$$P_1 = \partial_x \qquad P_2 = \partial_y \qquad M = y\partial_x - x\partial_y \qquad E = 1$$

s komutačními vztahy

$$[M, P_1] = -P_2 \qquad [M, P_2] = P_1 \qquad [P_1, P_2] = 0$$

a s E komutuje každý operátor. Prvek M bývá označován jako *generátor rotace*. Vidíme, že pro jednoduché operátory symetrie jsme dostali stejné komutující vztahy jako má $\mathfrak{E}(2)$.

Dokázali jsme následující tvrzení.

Tvrzení 9. *Operátory symetrie prvního řádu pro Helmholtzovu rovnici ve 2 dimenzích tvoří čtyřdimenzionální Lieovu algebru s bází M, P_1, P_2, E jako vektorového prostoru.*
Jednoduché operátory symetrie pro Helmholtzovu rovnici ve 2 dimenzích tvoří třídimenzionální Lieovu algebru s bází M, P_1, P_2 izomorfní $\mathfrak{E}(2)^{\mathbb{C}}$.

3.2.2 Operátory symetrie prvního řádu pro Laplaceovu rovnici ve 2 dimenzích

Protože Laplaceův operátor se od Helmholtzova liší pouze členem ω^2, dostáváme stejné rovnice jako výše, tedy 3.1 a 3.2 a místo 3.3 dostáváme rovnici

$$0 = C_{xx} + C_{yy}.$$

Hledáme-li pouze jednoduché operátory symetrie ($R = 0$), pak dostaneme zřejmě tytéž operátory jako pro Helmholtzovu rovnici, tedy lineární obal P_1, P_2, M. Platí proto následující tvrzení.

Tvrzení 10. *Jednoduché operátory symetrie pro Laplaceovu rovnici tvoří Lieovu algebru s bází M, P_1, P_2 izomorfní s $\mathfrak{E}(2)^{\mathbb{C}}$.*

Všech operátorů symetrie prvního řádu je mnohem více, dokonce více než holomorfních funkcí na $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, jak ukážeme. Všimněme si, že rovnice 3.1 jsou Cauchy–Remannovy rovnice pro $f = A + iB$. Jelikož f je hladká, dává 3.1 ekvivalenci s holomorfností. Ukažme, že každý operátor $L = A\partial_x + B\partial_y$, kde $A + iB$ je holomorfní, je operátor symetrie. Označíme-li $D = A_x = B_y$, pak dostáváme

$$\begin{aligned}[A\partial_x + B\partial_y, \Delta_2] = {} & -2A_x\partial_{xx} - 2B_y\partial_{yy} - (2A_y + 2B_x)\partial_{xy} - \\ & - (A_{xx} + A_{yy})\partial_x - (B_{xx} + B_{yy})\partial_y = -4D\Delta_2,\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí díky Cauchy–Riemannovým podmínkám a tomu, že reálné a imaginární složky holomorfní funkce jsou harmonické ($A_y + B_x = 0, A_{xx} + A_{yy} = 0, B_{xx} + B_{yy} = 0$).

3.2.3 Operátory symetrie prvního řádu pro Laplaceovu rovnici ve 3 dimenzích

Nechť $L = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + D$, kde $A, B, C, D \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nejprve rozepíšeme komutátor pomocí bilinearity a dostaneme

$$\begin{aligned}[L, \Delta_3] =& [A\partial_x, \partial_{xx}] + [A\partial_x, \partial_{yy}] + [A\partial_x, \partial_{zz}] + [B\partial_y, \partial_{xx}] + [B\partial_y, \partial_{yy}] + \\ &+ [B\partial_y, \partial_{zz}] + [C\partial_z, \partial_{xx}] + [C\partial_z, \partial_{yy}] + [C\partial_z, \partial_{zz}].\end{aligned}$$

Následným dosazením Δ_3 do rovnice $[L, \Delta_3] = R\Delta_3$ a za užití odvozeného vztahu získáme

$$\begin{aligned}&-(2A_x\partial_{xx} + 2B_y\partial_{yy} + 2C_z\partial_{zz} + (2A_y + 2B_x)\partial_{xy} + (2A_z + 2C_x)\partial_{xz} + \\ &+ (2B_z + 2C_y)\partial_{yz} + (A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} + 2D_x)\partial_x + (B_{xx} + B_{yy} + B_{zz} + 2D_y)\partial_y + \\ &+ (C_{xx} + C_{yy} + C_{zz} + 2D_z)\partial_z + D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) = R\partial_{xx} + R\partial_{yy} + R\partial_{zz}.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých operátorů ($\partial_{xx}, \partial_{yy}$ atd.) dostaneme, že

$$-2A_x = R \qquad -2B_y = R \qquad -2C_z = R \tag{3.4}$$

$$-2A_y - 2B_x = 0 \qquad -2A_z - 2C_x = 0 \qquad -2B_z - 2C_y = 0 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}-A_{xx} - A_{yy} - A_{zz} - 2D_x &= 0 \\ -B_{xx} - B_{yy} - B_{zz} - 2D_y &= 0 \\ -C_{xx} - C_{yy} - C_{zz} - 2D_z &= 0\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$-D_{xx} - D_{yy} - D_{zz} = 0. \tag{3.7}$$

Z rovnic 3.4 obdržíme, že $A_x = B_y = C_z$, a z rovnic 3.5 máme, že $A_y = -B_x$, $A_z = -C_x$ a $B_z = -C_y$. Z derivování právě získaného a ze záměnosti parciálních derivací pro hladké funkce pro A, B, C přímo plyne, že $A_{yz} = -C_{xy} = B_{xz} = -A_{yz} = C_{xy} = -B_{xz}$. Z tohoto pozorování máme

$$A_{yz} = 0 \qquad B_{xz} = 0 \qquad C_{xy} = 0. \tag{3.8}$$

Derivováním vztahu $A_x = B_y$ podle x a vztahu $A_y = -B_x$ podle y a následným sečtením dostaneme rovnici

$$A_{xx} + A_{yy} = 0.$$

Analogicky opět z 3.4 a 3.5, ale pro jiné závislé proměnné, získáme

$$\begin{aligned}&A_{xx} + A_{zz} = 0 \qquad B_{xx} + B_{yy} = 0 \qquad B_{zz} + B_{yy} = 0 \\ &C_{zz} + C_{xx} = 0 \qquad C_{zz} + C_{yy} = 0.\end{aligned}$$

Z nich bezprostředně plyne, že

$$\begin{aligned}A_{xx} &= -A_{yy} = -A_{zz} \\ B_{yy} &= -B_{xx} = -B_{zz} \\ C_{zz} &= -C_{xx} = -C_{yy}.\end{aligned}$$

Zkombinováním první rovnice z předchozího odstavce a první rovnice z 3.6 dostaneme následující rovnost

$$2D_x = A_{xx} = -A_{yy} = -A_{zz} \tag{3.9}$$

a obdobně pro další dvě

$$2D_y = B_{yy} = -B_{xx} = -B_{zz} \tag{3.10}$$
$$2D_z = C_{zz} = -C_{xx} = -C_{yy}. \tag{3.11}$$

Přepsáním rovnice 3.7, dosazením do rovnic 3.9, 3.10, 3.11, zderivovaných po řadě podle x, y a z a s použitím vztahů odvozených předtím, a sice že $A_y = -B_x$ a $A_z = -C_x$, máme

$$-D_{xx} = D_{yy} + D_{zz} = -\frac{1}{2}B_{xxy} - \frac{1}{2}C_{xxz} = \frac{1}{2}A_{xyy} + \frac{1}{2}A_{xzz} = 2D_{xx}.$$

Z toho plyne, že $D_{xx} = 0$. Derivováním první rovnice v 3.8 podle y a dosazením do zderivované 3.9 podle z dostaneme, že $D_{xz} = 0$. Analogicky derivováním podle z, resp. podle y máme $D_{xy} = 0$. Z toho plyne, že $D_x = \alpha$, kde α je nějaká konstanta. Obdobně dostaneme, že $D_y = \beta$ a $D_z = \gamma$, pro $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Integrovaním podle příslušné proměnné máme rovnosti $D = \alpha x + C_1(y,z) = \beta y + C_2(x,z) = \gamma z + C_3(x,y)$. Díky Lemmatu 8 obdržíme rovnost

$$D = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$

kde δ je nějaká konstana. Nyní zpětně integrujeme a aplikujeme Lemma 8.
Máme z 3.9 $A_{xx} = 2\alpha$, z 3.10 $2\beta = -B_{xx} = A_{xy}$ a z 3.11 $2\gamma = -C_{xx} = A_{xz}$. Podobně jako výše získáme $A_x = 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \xi$ pro nějakou konstantu ξ. Analogicky dostaneme $A_y = -2\alpha y + 2\beta x + \epsilon$, $A_z = -2\alpha z + 2\gamma x + \varphi$ a $B_z = -2\gamma y + 2\beta z + \tau$. Odtud stejným postupem obdržíme

$$A = \alpha x^2 + 2\beta yx + 2\gamma zx + \xi x - \alpha y^2 + \epsilon y - \alpha z^2 + \varphi z + \theta, \qquad \text{kde } \theta \in \mathbb{C}.$$

Analogicky získáme i B a C (s využitím $A_x = B_y = C_z$, $A_y = -B_x$, $A_z = -C_x$ a $B_z = -C_y$), a sice platí

$$\begin{aligned} B &= 2\alpha xy - \beta x^2 - \epsilon x + 2\gamma yz - \beta z^2 - \tau z + \beta y^2 + \xi y + \iota \\ C &= -\gamma y^2 + 2\beta zy + \tau y + 2\alpha xz - \gamma x^2 - \varphi x - \gamma z^2 + \xi z + \kappa, \quad \text{kde } \kappa, \iota \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme, že operátor L je tvaru

$$\begin{aligned} L =& (\alpha x^2 + 2\beta yx + 2\gamma zx + \xi x - \alpha y^2 + \epsilon y - \alpha z^2 + \varphi z + \theta)\partial_x + \\ & (2\alpha xy - \beta x^2 - \epsilon x + 2\gamma yz - \beta z^2 - \tau z + \beta y^2 + \xi y + \iota)\partial_y + \\ & (-\gamma y^2 + 2\beta zy + \tau y + 2\alpha xz - \gamma x^2 - \varphi x + \gamma z^2 + \xi z + \kappa)\partial_z + \\ & \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta. \end{aligned}$$

Za bázové prvky algebry operátorů symetrie prvního řádu pro Laplaceovu rovnici můžeme zvolit $E = 1$ a dále

$$\begin{aligned} &P_1 = \partial_x && P_2 = \partial_y && P_3 = \partial_z \\ &J_1 = z\partial_x - x\partial_z && J_2 = y\partial_x - x\partial_y && J_3 = y\partial_z - z\partial_y. \end{aligned}$$

Všechny jednoduché operátory symetrie tvoří právě lineární obal operátorů výše (bez E). Pro komutační vztahy v této algebře (viz Miller, 1984) platí, že jsou stejné jako v Lieově algebře $\mathfrak{E}(3)$. Obdobným výpočtem jako výše se dá ukázat, že pro Helmholtzovu rovnici ve 3 dimenzích tvoří lineární obal operátorů E, P_1, P_2, P_3, J_1, J_2, J_3 všechny operátory symetrie prvního řádu (Miller, 1984). Ostatní bázové prvky algebry pro Laplaceovu rovnici jsou

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2} + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \\
K_1 &= (x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z + x \\
K_2 &= (y^2 - x^2 - z^2)\partial_y + 2xy\partial_x + 2yz\partial_z + y \\
K_3 &= (z^2 - x^2 - y^2)\partial_z + 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + z,
\end{aligned}$$

kde D se nazýva generátor dilatace a K_1, K_2, K_3 jsou tzv. speciální konformní transformace.

Shrneme-li předchozí výpočty dostáváme tvrzení.

Tvrzení 11. *Operátory symetrie prvního řádu pro Laplaceovu rovnici ve 3 dimenzích tvoří Lieovu algebru s bází E, P_1, P_2, P_3, J_1, J_2, J_3, D, K_1, K_2, K_3 jako vektorového prostoru.*
Jednoduché operátory symetrie pro Laplaceovu i pro Helmholtzovu rovnici ve 3 dimenzích tvoří Lieovu algebru s bází P_1, P_2, P_3, J_1, J_2, J_3 izomorfní $\mathfrak{E}(3)^{\mathbb{C}}$.

Poznámka. Symetrie lze formulovat pomocí $\mathcal{U}(\mathfrak{f})$ pro vhodnou algebru $\mathfrak{f} \supseteq \mathfrak{E}(n)$ (viz Eastwood, 2005), přesahující rámec naší práce.

3.2.4 Operátory symetrie druhého řádu pro Helmholtzovu rovnici ve 2 dimenzích

Operátory nejvýše druhého řádu obecně netvoří Lieovu algebru, neboť komutátor dvou operátorů druhého řádu nemusí být druhého řádu (například $[\partial_{xx},\partial_{xx} + x(\Delta_2 + \omega^2)] = -2\partial_{xxx} - 2\partial_{xyy} - 2\omega^2\partial_x$. Lze ukázat, že oba tyto operátory jsou operátory symetrie druhého řádu pro Helmholtzovu rovnici, ale očividně jejich komutátor není (není to ani diferenciálni operátor řádu 2)).

Mezi všemi operátory symetrie nejvýše druhého řádu jsou i tzv. triviální symetrie Helmholtzovy rovnice. Tím myslíme operátory symetrie tvaru $Q(\Delta_n + \omega^2)$, pro $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ty jsou zjevně operátory symetrie řádu dva, neboť podmínka na komutační vztah platí pro operátor prvního řádu $R = [Q, \Delta_n + \omega^2]$, jak se lze snadno přesvědčit. Z důvodu snazšího výpočtu budeme hledat operátory symetrie druhého řádu modulo právě tyto operátory.

Definice 16. *Označme $\mathcal{S}_2$ prostor všech operátorů symetrie nejvýše druhého řádu. Definujme* vektorový prostor redukovaných operátorů symetrie *nejvýše druhého řádu pro Helmholtzovu rovnici jako $\mathcal{S}_2/\mathcal{Q}$, kde $Q = \{Q(\Delta_n + \omega^2) | Q \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.*

Zřejmě platí, že třídy této ekvivalence lze chápat opět jako symetrie, neboť pro libovolnou funkci $Q \in C^\infty(R^n)$ a libovolný operátor symetrie nejvýše druhého řádu pro Helmholtzovu rovnici platí

$$[A + Q\Delta_n + \omega^2, \Delta_n + \omega^2] = [A, \Delta_n + \omega^2] + [Q\Delta_n + \omega^2, \Delta_n + \omega^2] = (K + L)(\Delta_2 + \omega^2),$$

kde K, L jsou příslušné operátory prvního řádu.

Pro $S \in \mathcal{S}_2$ označme $[S]$ jeho třídu ekvivalence v podílu $\mathcal{S}_2/\mathcal{Q}$.

Navíc je-li $S = A_{11}\partial_{xx} + A_{12}\partial_{xy} + A_{22}\partial_{yy} + B_1\partial_x + B_2\partial_y + C$, kde A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, B_2, $C \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, operátor symetrie druhého řádu a položíme-li $S' = S - A_{22}(\Delta_2 + \omega^2)$, pak ve vektorovém prostoru redukovaných operátorů symetrie platí rovnost $[S'] = [S]$, ale navíc S' má nulový koeficient u členu s ∂_{yy}.
Můžeme tedy BÚNO hledat operátory s tímto členem nulovým.

Hledáme tedy S tak, aby platilo

$$[S, \Delta_2 + \omega^2] = U(\Delta_2 + \omega^2).$$

Označme si $U = H_1\partial_x + H_2\partial_y + J$, kde $H_1, H_2, J \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Obdobně jako výše upravíme komutátory pomocí bilinearity, roznásobíme a porovnáme koeficienty u jednotlivých parciálních derivací. Dostaneme následující soustavu rovnic

$$-2A_{11x} = H_1 \qquad -2A_{12y} = H_1 \tag{3.12}$$
$$-2A_{11y} - 2A_{12x} = H_2 \qquad 0 = H_2 \tag{3.13}$$
$$-A_{11xx} - A_{11yy} - 2B_{1x} = J \qquad -2B_{2y} = J \tag{3.14}$$
$$-A_{12xx} - A_{12yy} - 2B_{1y} - 2B_{2x} = 0 \tag{3.15}$$
$$-B_{1xx} - B_{1yy} - 2C_x = H_1\omega^2 \tag{3.16}$$
$$-B_{2xx} - B_{2yy} - 2C_y = H_2\omega^2 \tag{3.17}$$
$$-C_{xx} - C_{yy} = J\omega^2. \tag{3.18}$$

Z rovnic 3.12 dostáváme, že $A_{11x} = A_{12y}$. Současně z rovnice 3.13 (dosazením za $H_2 = 0$) dostáváme $A_{11y} = -A_{12x}$. Derivací první rovnice podle x a druhé podle y (resp. naopak) a následným sečtením dostaneme, že $A_{11xx} + A_{11yy} = 0$ (resp. $A_{12xx} + A_{12yy} = 0$).

Obdobně dostaneme z rovnice 3.14 a právě získaného, že $B_{1x} = B_{2y}$, a z rovnice 3.15, že $B_{1y} = -B_{2x}$. Opět derivováním první rovnice dle x, druhé dle y (resp. naopak) a následným sečtením dostaneme, že $B_{1xx} + B_{1yy} = 0$ (resp. $B_{2xx} + B_{2yy}$). Z právě získaného s použitím $H_2 = 0$ a rovnice 3.17 přímo plyne, že $C_y = 0$, a tedy i $C_{yy} = C_{xy} = C_{xxy} = 0$ (neboť C je C^∞). Z rovnic 3.16 a 3.18 pak dostáváme, že $H_{1y} = J_y = 0$, neboť ω je kladná konstanta.

Tedy díky druhé rovnici v 3.12 je $A_{12yy} = 0$ a z předešlého také $A_{12xx} = 0$. Odtud přímo plyne, že A_{12y} nezávisí na y a obdobně že A_{12x} nezávisí na x. Zjevně i jejich derivace mají tutéž vlastnost, a tak dostáváme, že A_{12xy} nezávisí na x a na y díky Lemmatu 7. Jinými slovy $A_{12xy} = \alpha$, kde α je libovolná konstanta. Integrovaním podle x dostaneme, že $A_{12y} = \alpha x + P(y)$, kde P je libovolná funkce nezávislá na x. Z faktu, že A_{12y} nezávisí na y plyne, že P je konstanta. Označíme ji γ. Analogicky označme pro A_{12x} tuto konstantu β. Celkově s dosazením prvních rovnic v 3.12 a 3.13 máme

$$A_{12x} = \alpha y + \beta \qquad A_{12y} = \alpha x + \gamma \tag{3.19}$$
$$A_{11x} = \alpha x + \gamma \qquad A_{11y} = -\alpha y - \beta. \tag{3.20}$$

Naprosto stejně z rovnic 3.14 a 3.15 a toho, že $J_y = 0$, dopočítáme hodnoty $B_{2x}, B_{2y}, B_{1x}, B_{1y}$. Dostáváme

$$B_{2x} = \delta y + \epsilon \qquad B_{2y} = \delta y + \phi \tag{3.21}$$
$$B_{1x} = \delta y + \phi \qquad B_{1y} = -\delta y - \epsilon. \tag{3.22}$$

Dosazením do rovnice 3.16 z první rovnice v 3.12 spolu s předešlým vyjádřením A_{11x} získáme

$$C_x = \omega^2(\alpha x + \gamma) \tag{3.23}$$

a po zderivování dle x

$$C_{xx} = \omega^2\alpha.$$

Z 3.18 a druhé rovnice v 3.14 pak plyne

$$\omega^2\alpha = \omega^2(2\delta x + 2\phi),$$

z čehož ihned máme $\delta = 0$ a $\alpha = 2\phi$. Dosazením do rovnic 3.22 a následným integrovaním podle x (resp. podle y) zjistíme, že $\phi x + P(y) = B_1 = -\epsilon y - R(x)$, kde P (resp. R) je funkce nezávislá na x (resp. na y). Z toho se snadno nahlédne, že

$$B_1 = \phi x - \epsilon y + \psi,$$

kde ψ je libovolná konstanta. Obdobně získáme

$$B_2 = \epsilon x + \phi y + \tau,$$

kde τ je konstanta. Podobně dostaneme z 3.19, že $\alpha = 2\phi$, a následným integrovaním, že $2\phi yx + \beta x + P(y) = A_{12} = 2\phi xy + \gamma y + R(x)$. Obdobně pro A_{11} získáme

$$\begin{aligned} A_{11} &= \phi x^2 + \gamma x - \phi y^2 - \beta y + \mu \\ A_{12} &= 2\phi xy + \beta x + \gamma y + \nu, \end{aligned}$$

kde μ, ν jsou libovolné konstanty. Nakonec integrovaním 3.23 a z toho, že víme že C nezávisí na y, obdržíme

$$C = \omega^2(\phi x^2 + \gamma x + \xi),$$

kde ξ je libovolná konstanta. Celkově tedy operátor S vypadá takto

$$\begin{aligned} S =&(\phi x^2 + \gamma x - \phi y^2 - \beta y + \mu)\partial_{xx} + \\ &(2\phi xy + \beta x + \gamma y + \nu)\partial_{xy} + \\ &(\phi x - \epsilon y + \psi)\partial_x + (\epsilon x + \phi y + \tau)\partial_y + \\ &\omega^2(\phi x^2 + \gamma x + \xi). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Jelikož počítáme „modulo $Q(\Delta_2 + \omega^2)$“, kde Q je libovolná funkce z $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, můžeme k S přičíst $(-\phi x^2 - \gamma x)(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2)$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} S =&(-\phi y^2 - \beta y + \mu)\partial_{xx} + \\ &(2\phi xy + \beta x + \gamma y + \nu)\partial_{xy} + (-\phi x^2 - \gamma x)\partial_{yy} + \\ &(\phi x - \epsilon y + \psi)\partial_x + (\epsilon x + \phi y + \tau)\partial_y + \omega^2\xi. \end{aligned}$$

Po drobných upravách lze dostat například tuto bázi

$$\begin{aligned} &P_1, P_2, M, E \\ &P_1^2, P_1P_2, M^2, \{M,P_1\}, \{M,P_2\}, \end{aligned}$$

kde P_1, P_2, M, E označují stejné operátory jako v předchozí části při výpočtu operátorů symetrie prvního řádu pro Helmholtzův operátor a $\{\cdot, \cdot\}$ značí tzv. *antikomutátor*, tj. $\{M, P_2\} = MP_2 + P_2M$.

Získáváme náslledující tvrzení.

Tvrzení 12. *Báze vektorového prostoru redukovaných symetrií nejvýše druhého řádu pro Helmholtzovu rovnici je například* E, P_1, P_2, M, P_1^2, P_1P_2, M^2, $\{M,P_1\}$, $\{M,P_2\}$.

4. Separace proměnných

Začneme následujícími dvěma definicemi.

Definice 17 (Invariantnost operátoru vůči funkci a mapě)**.** *Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ splňující $1 \leq k < n$, M je n-dimenzionální hladká varieta, (U, φ) její mapa se souřadnicovými funkcemi $x^1, \ldots, x^n$, $f \in C^\infty(U)$ nezávislá na $x^1, \ldots, x^k$ a L diferenciální operátor na U. Řekneme, že L je* invariantní vůči funkci f a mapě φ, *pokud pro každou $g \in C^\infty(U)$ nezávislou na $x^{k+1}, \ldots, x^n$ platí, že $L(fg) = fL'(g)$, kde L' je nějaký diferenciální operátor a $L'(g)$ nezávisí na $x^{k+1}, \ldots, x^n$.*

Definice 18 (Separace operátoru mapou)**.** *Nechť M je n-dimenzionální hladká varieta, (U, φ) její mapa a L diferenciální operátor na U. Řekneme, že φ* separuje *L, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, že $1 \leq k < n$, L_1 a L_2 diferenciální operátory na U a $f, g \in C^\infty(U)$, kde f nezávisí na $x^1, \ldots, x^k$ a g nezávisí na $x^{k+1}, \ldots, x^n$ tak, že L_1 je invariantní vůči f a φ, L_2 je invariantní vůči g a φ a zároveň $L = L_1 + L_2$.*

Řekneme, že pro rovnici $L(h) = 0$ existuje separované řešení *v mapě (U, φ), pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, že $1 \leq k < n$, a funkce $f \in C^\infty(U)$ nezávislá na $x^1, \ldots, x^k$ a $g \in C^\infty(U)$ nezávislá na $x^{k+1}, \ldots, x^n$ tak, že $h = fg$ řeší rovnici $L(h) = 0$. Někdy také říkáme, že rovnice $L(h) = 0$ je separovaná v souřadnicích $x^1, \ldots, x^n$.*

Poznámka. Všimeme si, že pro kadou rovnici tvaru $L(h) = 0$ existuje v každé mapě separované řešení, a sice řešení nulové. My však budeme hledat nenulová, dokonce nekonstantní separovaná řešení.

Tvrzení 13. *Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ splňující $1 \leq k < n$, M je n-dimenzionální hladká varieta, (U, φ) její mapa a L diferenciální operátor na U. Pokud φ separuje L a existují funkce $f \in C^\infty(U)$ nezávislá na $x^1, \ldots, x^k$ a $g \in C^\infty(U)$ nezávislá na $x^{k+1}, \ldots, x^n$ tak, že L_1 je invariantní vůči f a φ, L_2 je invariantní vůči g a φ a zároveň f je v jádru příslušného L'_2 a g je v jádru příslušného L'_1. Pak existuje separované řešení rovnice $L(h) = 0$ v mapě (U, φ).*

Důkaz. Ať jsou L, φ jako v předpokladech. Označme f resp. g funkce invariantní vůči L_1 resp. L_2, které jsou v jádru L'_2 resp. L'_1. Potom platí

$$L(fg) = (L_1 + L_2)(fg) = L_1(fg) + L_2(fg) = fL'_1(g) + gL'_2(f) = 0 + 0 = 0,$$

kde třetí rovnost plyne z invariance operátorů L_1 a L_2 vůči f a φ, resp. g a φ. □

Poznámka. Jak jsme zmínili již v Úvodu, spočívá separace v tom, že místo jedné rovnice ve více proměnných můžeme řešit více jednodušších rovnic v méně proměnných. Například pro případ $n = 2$ nám separace otázku řešení jedné parciální diferenciální rovnice reformuluje na řešení dvou obyčejných diferenciálních rovnic a kompatibilní podmínku (tj. příslušná řešení jsou v jádrech čárkovaných operátorů).

Někdy je možné najít separaci tak, že operátor je invariantní vůči všem funkcím nezávislým na daných souřadnicích. Poté řešíme skutečně jen obyčejné diferenciální rovnice, jak ilustruje následující příklad.

Příklad. Ukážeme separaci Helmoltzovy rovnice ve 2 dimenzích v kartézských souřadnicích (tedy separace identickou mapou). Je zjevné, že se Helmholtzův operátor separuje například tímto způsobem

$$\Delta_2 + \omega^2 = (\partial_{xx} + k^2) + (-k^2 + \partial_{yy} + \omega^2),$$

kde k je libovolná, tzv. separační, konstanta. Všimněme si, že v tomto případě je operátor $\partial_{xx} + k^2$ invariantní vůči libovolné funkci nezávislé na x a naopak operátor $\partial_{yy} + \omega^2 - k^2$ je invariantní vůči libovolné funkci nezávislé na y. Místo Helmholtzovy rovnice tedy řešíme následující dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} &\partial_{xx} f + k^2 f = 0 \\ &\partial_{yy} g + (\omega^2 - k^2) g = 0. \end{aligned}$$

Řešení těchto dvou rovnic je například $f(x, y) = e^{ikx}$ a $g(x, y) = e^{i\sqrt{\omega^2 - k^2}y}$. Helmholtzova rovnice ve dvou dimenzích má tedy například nekonstantní separované řešení $e^{ikx + i\sqrt{\omega^2-k^2}y}$.

Definice 19 (Nevlastní jednoduchý operátor symetrie)**.** *Nechť L je diferenciální operátor na $U \subseteq M$ a K je nějaký jednoduchý operátor symetrie L. Řekneme, že K je* nevlastní jednoduchý operátor symetrie*, pokud neexistuje $m \in \mathbb{N}$ a $f_i \in C^\infty(U)$ tak, že by platilo*

$$L = \sum_{i=0}^{m} f_i K^i. \tag{4.1}$$

Ukážeme, že ve dvou dimenzích každému nevlastnímu jednoduchému operátoru symetrie příslušejícímu nekonstantnímu operátoru L, odpovídá nějaké nekonstantní separované řešení.

Lemma 14. *Nechť M je n-dimenzionální hladká varieta, (U, φ) její mapa se souřadnicovými funkcemi $(x^1, \dots, x^n)$ a L diferenciální operátor na U tvaru*

$$\sum_{|\alpha| \le k} f_\alpha \partial^\alpha,$$

kde pro každý multiindex α funkce f_α nezávisí na souřadnici x^1. Potom je tento operátor invariantní vůči funkci $\mathrm{e}^{\lambda x^1}$ a φ, kde λ je libovolná konstanta z $\mathbb{C}$.

Důkaz. Ukážeme pouze invariantnost pro operátor $f_\alpha \partial^\alpha$ pro libovolný multiindex α. Zbytek tvrzení plyne z linearity diferenciálních operátorů. Ať $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je multiindex, $f_\alpha \in C^\infty(U)$ funkce nezávislé na x^1 a $h \in C^\infty(U)$ libovolná hladká funkce nezávislá na x^1. Je vidět, že funkce $\mathrm{e}^{\lambda x^1}$ nezávisí na proměnných $x^2, \dots, x^n$. Platí

$$\begin{aligned} f_\alpha \partial^\alpha(\mathrm{e}^{\lambda x^1} h) &= f_\alpha \underbrace{\partial_{x^1} \dots \partial_{x^1}}_{\alpha_1\text{-krát}} \partial^{\alpha - (\alpha_1, 0, \dots, 0)}(\mathrm{e}^{\lambda x^1} h) = \\ &= f_\alpha \underbrace{\partial_{x^1} \dots \partial_{x^1}}_{\alpha_1\text{-krát}} (\mathrm{e}^{\lambda x^1} \partial^{\alpha - (\alpha_1, 0, \dots, 0)}(h)) = \\ &= f_\alpha \lambda^{\alpha_1} \mathrm{e}^{\lambda x^1} \partial^{\alpha - (\alpha_1, 0, \dots, 0)}(h) = \mathrm{e}^{\lambda x^1} \lambda^{\alpha_1} f_\alpha \partial^{\alpha - (\alpha_1, 0, \dots, 0)}(h). \end{aligned}$$

Rovnosti plynou z derivování exponenciály a nezávislosti na příslušných souřadnicích. Je vidět, že funkce $\lambda^{\alpha_1} f_\alpha \partial^\alpha(h)$ nezávisí na souřadnici x^1.

$\square$

Připomeňme, že jednoduché operátory symetrie lze chápat jako vektorová pole. *Hodnotou* jednoduchého operátoru symetrie K v bodě $m \in M$ myslíme hodnotu příslušného vektorového pole v tomto bodě (srovnej 1.2).

Věta 15. *Nechť M je dvoudimenzionální hladká varieta, $U \subseteq M$ její otevřená podmnožina obsahující bod $m \in U$ a L je diferenciální operátor řádu alespoň 1 na U. Potom pro každý nevlastní jednoduchý operátor symetrie K příslušný operátoru L, který je v m nenulový (ve smyslu odstavce nad větou), existuje mapa (V, φ) taková, že rovnice $L(h) = 0$ má nekonstantní separované řešení v mapě (V, φ).*

Důkaz. Podle Věty 3 a nenulovosti K v m existuje mapa (V', φ) okolo m se souřadnicovými funkcemi (x^1, x^2) taková, že K je souřadnicové vektorové pole, tj. že $K = \partial_{x^1}$.

Vyjádříme operátor L v mapě (V', φ). Dostáváme

$$L = \sum_{(a,\,b),\,|(a,\,b)|\leq l} f_{(a,\,b)} \partial^{(a,\,b)}.$$

Funkce f_α nezávisí na x^1, neboť

$$0 = [K, L] = [\partial_{x^1}, \sum_{|\alpha|\leq l} f_\alpha \partial^\alpha] = \sum_{|\alpha|\leq l} \partial_{x^1}(f_\alpha)\partial^\alpha.$$

Z porovnání koeficientů u jednotlivých operátorů dostáváme, že funkce f_α mají nulovou derivaci podle souřadnice x^1. To znamená, že existuje okolí $V'' \subseteq V'$, na kterém jsou funkce f_α opravdu nezávislé na této souřadnici.

Zvolme $k \in \mathbb{C}$. Pak operátor L separujeme následovně

$$L = (L - \partial_{x^1 x^1} - k^2) + (\partial_{x^1 x^1} + k^2) = L_1 + L_2.$$

Pro φ chceme najít f a g jako v předpokladech Tvrzení 13.
Volme funkci $f = e^{ikx^1}$, která je zjevně v jádru operátoru $L_2 = \partial_{x^1 x^1} + k^2$. Operátor L_1 je invariantní vůči f a mapě φ díky Lemmatu 14. Uvažujme funkci g nezávislou na x^1 jako řešení rovnice $L_1'(g) = 0$, kde L_1' je operátor získaný opět z Lemmatu 14 konstrukcí z důkazu (pro L_1). Tato funkce g existuje, například nulová. Operátor $\partial_{x^1 x^1} + k^2$ je zřejmě invariantní vůči g a mapě φ. Ukážeme, že vždy lze volit takové nenulové k, aby L_1' bylo alespoň prvního řádu. Z důkazu Lemmatu 14 je vidět, že L_1' rozložený do homogenních částí vypadá následovně

$$L_1' = \left(\sum_{j=0}^{l} (ik)^j f_{(j,\,0)}\right) + \left(\sum_{j=0}^{l-1} (ik)^j f_{(j,\,1)}\right) \partial_{x^2} + \ldots + (ik)^l f_{(0,\,l)} \partial^{(0,\,l)}. \tag{4.2}$$

Jak jsme zjistili funkce $f_{(a,\,b)}$, kde $a, b \in \mathbb{N}_0$ a $a + b \leq l$, nezávisí na souřadnici x^1. Zvolíme p největší takové, aby existovalo j_0 takové, že $f_{(j_0,\,p)} \neq 0$. Toto p existuje, neboť původní operátor L je nenulový. Protože K je nevlastní jednoduchý operátor symetrie a je roven ∂_{x^1}, vyjádření L v mapě φ obsahuje derivace i podle x^2, proto je p nenulové.

Pokud by platilo, že pro každé $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je operátor L'_1 nultého řádu, tak by speciálně pro všechna $q \in V''$ platilo, že $\sum_{j=0}^{l-p} (ik)^j f_{(j,p)}(q) = 0$. Toto by byl ale polynom v k s nekonečně mnoha řešeními (pro každé nenulové k), tedy všechny jeho koeficienty by byly nulové, tj. pro $0 \leq j \leq l-p$ by platilo $f_{(j,p)}(q) = 0$. Toto lze provést pro každé $q \in V''$. Odtud plyne, že speciálně funkce $f_{(j_0,\,p)}$ by byla nulová na V'', což je ale spor s volbou p. Dostáváme tedy, že rovnice L'_1 je alespoň prvního řádu. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že pak existuje na (případně menší) $V \subseteq V''$ řešení g rovnice $L'_1(g) = 0$, které je nenulové.

Dostáváme tak v této mapě nekonstantní separované řešení tvaru $e^{ikx^1}g$.

$\square$

Poznámka. V důkazu jsme využili toho, že operátor, jehož řešení je exponenciála, je invariantním vůči všem funkcím nezávislým na první proměnné.

Předpoklad 2 dimenzí slouží k tomu, abychom získali řešení. V tomto případě je totiž L'_1 reprezentace obyčejné diferenciální rovnice.

Libovolné souřadnice získané z věty výše budeme nazývat *souřadnice indukované operátorem K.*

Definice 20 (Ekvivalentní souřadnice)**.** *Řekneme, že dva jednoduché symetrické operátory K_1,K_2 příslušné Laplaceově nebo Helmholtzově operátoru indukují* ekvivalentní souřadný systém *(*ekvivalentní souřadnice*), pokud $cK_1^g = K_2$ pro nějaké $g \in E(n)$ a $c \in \mathbb{R}$.*

Poznámka. Díky poznámce na konci Kapitoly 2 víme, že konjugace a vynásobení konstantou zobrazuje jednoduché symetrické operátory do sebe.

V Kapitole 3 jsme spočítali, že homogenní operátory prvního řádu komutující s Helmholtzovým (Laplaceovým) operátorem ve 2 dimenzích (tj. jednoduché operátory symetrie), mají stejné komutační vztahy jako Lieova algebra $\mathfrak{E}(2)^{\mathbb{C}}$. Omezíme-li se na reálné homogenní operátory, dostaneme $\mathfrak{E}(2)$.

Tvrzení 16. *Reálné jednoduché operátory symetrie příslušné Laplaceově resp. Helmholtzově rovnici ve 2 dimenzích indukují právě 2 souřadné systémy, které nejsou ekvivalentní.*

Důkaz. Je zřejmé, že operátory P_1 a P_2, tj. operátory ∂_x a ∂_y, indukují ekvivalentní souřadnice. Jedná se totiž v obou případech přímo o kartézské souřadnice (tj. souřadnice příslušné identické mapě) jen se zaměněnými souřadnicemi a záměna souřadnic je transformace roviny z Eukleidovy grupy, tedy

$$P_1 = P_2^{g_{H_0,\,\mathbf{0}}}, \qquad \text{kde } H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že P_1 a M neindukují ekvivalentní souřadnice. Pro

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, dostáváme

$$P_1^{g_{A,\,\boldsymbol{v}}} = P_1^{g_{A,\,\mathbf{0}}} = \cos(\alpha)\partial_x - \sin(\alpha)\partial_y = \cos(\alpha)P_1 - \sin(\alpha)P_2,$$

kde ve výpočtu využíváme vzorec 2.4. Každý element z $E(2)$ se dá vyjádřit translací o $\boldsymbol{v}$ a aplikací speciální ortogonální matice A nebo aplikací ortogonální matice H_0A. Výpočet jsme provedli pro matici A. Pro matici H_0A je výpočet obdobný, jen se zamění P_1 na P_2. Výpočet tedy ukazuje, že $cP_1^g \neq M$ (generátor rotací) pro všechna $g \in E(2)$ a pro všechna $c \in \mathbb{R}$. Tj. M a P_1 neindukují ekvivalentní souřadnice.

Nyní ukážeme, že libovolný nenulový operátor z $\mathfrak{E}(2)$ indukuje ekvivalentní souřadnice jako P_1 nebo jako M. Využijeme toho, že platí (opět ze vztahu 2.4)

$$M^{g_{I_2},\boldsymbol{u}} = (y-b)\partial_x - (x-a)\partial_y = M - bP_1 + aP_2, \qquad \text{kde } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Uvažujme dále $0 \neq L = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3M \in \mathfrak{E}(2)$, kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Potom pro c_3 nenulové dostáváme

$$c_3 M^{g_{I_2},\boldsymbol{u}} = L, \qquad \text{pro } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} c_2/c_3 \\ -c_1/c_3 \end{pmatrix}.$$

Tedy pokud $c_3 \neq 0$ získáváme, že L indukuje ekvivalentní souřadnice jako M. Pro c_3 nulové volíme α tak, aby platilo, že

$$\cos(\alpha) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{-c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},$$

to lze vždy, neboť $c_1^2 + c_2^2 > 0$. Potom platí, že

$$(\sqrt{c_1^2 + c_2^2})P_1^{g_A,\mathbf{0}} = (\sqrt{c_1^2 + c_2^2})(\cos(\alpha)P_1 - \sin(\alpha)P_2) = L.$$

Tedy L indukuje ekvivalentní souřadnice jako P_1.

□

Nalezneme nekonstantní separovaná řešení Laplaceovy a Helmholtzovy rovnice pro některé souřadnice indukované jejich jednoduchými operátory.

Příklad. 1. *Najdeme souřadnice indukované generátorem rotací*, tj. operátorem $M = y\partial_x - x\partial_y$. Pro polární souřadnice (θ, r) zavedené v Kapitole 1 dostáváme, že

$$\begin{aligned} \partial_\theta &= ((r\cos\theta)_\theta \circ \varphi)\partial_x + ((r\sin\theta)_\theta \circ \varphi)\partial_y = \\ &= ((-r\sin\theta)\circ\varphi)\partial_x + ((r\cos\theta)\circ\varphi)\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y = -M. \end{aligned}$$

Vidíme, že tyto polární souřadnice jsou souřadnice hledané v důkazu Věty 15. Helmholtzův operátor ve dvou dimenzích má tedy například následující separaci

$$\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \omega^2 = (\partial_{\theta\theta} + k^2) + \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\partial_{\theta\theta} + \omega^2 - k^2\right).$$

Příslušné diferenciální rovnice (po dosazení $e^{ik\theta}$) jsou

$$\begin{aligned} \partial_{\theta\theta} f + k^2 f &= 0 \\ \partial_{rr} g + \frac{1}{r}\partial_r g + \left(\omega^2 - \frac{k^2}{r^2}\right) g &= 0. \end{aligned}$$

Jedno z řešení první rovnice známe přímo z Věty 15 a sice $f = e^{ik\theta}$. Řešení druhé rovnice je komplikovanější. Jedná se o pozměněnou Besselovu rovnici. Besselova rovnice je rovnice

$$\partial_{rr} g + \frac{1}{r}\partial_r g + \left(1 - \frac{k^2}{r^2}\right) g = 0.$$

Pro $k \in \mathbb{N}_0$ má za řešení Besselovy funkce $\mathbb{J}_k(r)$ (viz str. 98, Lebedev, 1972).

Besselovy funkce jsou definovány

$$\mathbb{J}_k(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (r/2)^{k+2i}}{i!(k+i)!} \qquad \text{pro } r \in \mathbb{R}.$$

Přímočarým výpočtem lze ověřit, že naše rovnice má za řešení $\mathbb{J}_k(\omega r)$, pro $k \in \mathbb{N}_0$. Celkově tedy dostáváme, že Helmholtzova rovnice ve 2 dimenzích se separuje pro polární souřadnice a její nekonstantní separované řešení je například $e^{ik\theta}\mathbb{J}_k(\omega r)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

2. *Souřadnice separující Laplaceův operátor ve 2 dimenzích.* Víme, že jednoduché symetrické operátory příslušné Laplaceově rovnici ve 2 dimenzích jsou stejné jako ty pro Helmholtzovu, tj. indukují polární a kartézské souřadnice. Ukážeme separovaná řešení pro tyto souřadnice.

Pro kartézské souřadnice dostáváme 2 obyčejné diferenciální rovnice podobné výše zmíněným rovnicím

$$(\partial_{xx} + k^2)f = 0 \qquad\qquad (\partial_{yy} - k^2)g = 0,$$

které mají řešení například $f = e^{ikx}$ a $g = e^{ky}$, tedy nekonstantní separované řešení Laplaceovy rovnice v kartézských souřadnicích je $fg = e^{k(ix+y)}$. (Pro $k = 0$ je ale separované řešení i xy.)

Pro polární souřadnice ukážeme jinou separaci než získanou z Věty 15. Separujme Laplaceův operátor následovně

$$\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} = (\partial_{\theta\theta}) + \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\partial_{\theta\theta}\right).$$

V jádru operátoru $\partial_{\theta\theta}$ je například funkce θ. Druhý operátor je vůči této funkci invariantní pro čárkovaný operátor $\partial_{rr} + 1/r\partial_r$. V jádru tohoto operátoru je například funkce $\ln(r)$. Tedy nekonstantní separované řešení v polárních souřadnicích pro Laplaceův operátor ve 2 dimenzích je například $\theta \ln(r)$.

Na závěr ukážeme separaci pro Laplaceův operátor ve 3 dimenzích.

Příklad. Je zřejmé, že v kartézských souřadnicích má Laplaceova rovnice separované řesení například xyz. Můžeme ale separovat i takto

$$\Delta_3 = (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2) + (\partial_{zz} - \omega^2).$$

Opět jsou oba operátory invariantní vůči všem funkcím nezávislým na příslušných souřadnicích. Laplaceova rovnice ve 3 dimenzích se tedy rozpadá na řešení Helmholtzovy rovnice ve 2 dimenzích a rovnice $\partial_{zz}f - \omega^2 f = 0$, která má za řešení například $f = e^{\omega z}$. Díky příkladu výše pro separaci Helmholtzovy rovnice ve 2 dimenzích v polárních souřadnicích dostáváme separované řešení v polárních souřadnicích $e^{ik\theta}\mathbb{J}_k(\omega r)$. Tato řešení odpovídají separaci v tzv. cylindrických souřadnicích, které indukuje operátor J_2 z oddílu 3.2.3. Geometricky odpovídají tomu, že jednu kartézskou souřadnici necháme pevnou a zbylé dvě transformujeme do polárních souřadnic. V těchto souřadnicích vypadá Laplaceova rovnice následovně

$$\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \partial_{zz}$$

a má za nekonstantní separované řešení $f = e^{\omega z}e^{ik\theta}\mathbb{J}_k(\omega r)$.

Poznámka. Poznamenejme, že neuvádíme všechny souřadnice, ve kterých lze příslušné rovnice separovat. Tyto souřadnice lze nalézt podrobnější analýzou symetrických operátorů druhého řádu, jak je uvedeno v (Miller, 1984).
Helmholtzova rovnice ve 2 dimenzích se dále separuje v tzv. parabolických a eliptických souřadnicích. Například v parabolických souřadnicích, které jsou dány těmito vztahy

$$x = 1/2(\xi^2 - \eta^2) \qquad y = \xi\eta, \qquad \text{pro } \xi \in \mathbb{R}^+, \eta \in \mathbb{R},$$

vypadá Helmholtzova rovnice takto

$$(\partial_{\xi\xi} + \partial_{\eta\eta} + \omega^2(\xi^2 + \eta^2))f = 0.$$

Tento operátor se jednoduše separuje

$$\partial_{\xi\xi} + \partial_{\eta\eta} + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) = (\partial_{\xi\xi} + \xi^2\omega^2 + k^2) + (\partial_{\eta\eta} + \eta^2\omega^2 - k^2).$$

Oba výše uvedené operátory jsou opět invariantní vůči všem hladkým funkcím nezávislým na η resp. na ξ. Proto můžeme řešit následující 2 obyčejné diferenciální rovnice

$$(\partial_{\xi\xi} + \xi^2\omega^2 + k^2)f = 0 \qquad (\partial_{\eta\eta} + \eta^2\omega^2 - k^2)g = 0,$$

jejichž řešením jsou tzv. cylindrické parabolické funkce (viz Miller, 1984).

Seznam použité literatury

EASTWOOD, M. (2005). Higher symmetriess of laplacian. *Annals of Math. (2)*, **161**, 1645–1665.

FRANKEL, T. (2007). *The geometry of physics.* Cambridge University Press. ISBN 978-0-52153927-2.

HUREWICZ, W. (1958). *Lectures on ordinary differential equations.* MIT Press. M.I.T. Press. ISBN 0262580012.

KOWALSKI, O. (2001). *Úvod do Riemannovy geometrie.* Druhé vydání. Karolinum. ISBN 80-246-0377-2.

LEBEDEV, N. N. (1972). *Special Functions and Their Applications.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Inc. ISBN 0-486-60624-4.

MILLER, W. (1984). *Symmetry and Separation of Variables.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press. ISBN 0521177391.

WARNER, F. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York. ISBN 978-0-387-90894-6.

Seznam použitých zkratek

δ^{ij}	Kroneckerovo delta
I_n	identita na $\mathbb{R}$
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla s 0
$\mathbb{N}$	přirozená čísla
$M(n, \mathbb{R}^n)$	vektorový prostor všech reálných matic $n \times n$
$\mathrm{Aut}(V)$	množina všech linearních bijekcí vektorového prostoru V
$GL(n,\mathbb{R})$	obecná grupa lineárních zobrazení, $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$
$O(n)$	grupa ortogonálních transformací
$SO(n)$	prostor všech vlastních ortogonálních transformací
$E(n)$	Eukleidova grupa
$\mathfrak{E}(n)$	Lieova algebra Eukleidovy grupy v n dimenzích
$\mathrm{Bij}(M)$	množina všech bijektivních zobrazení množiny M
Δ_n	Laplaceův operátor v n dimenzích
$\mathbb{J}_k$	Besselovy funkce