MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dominik Stejskal

Moufangové rovina a spinové grupy

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji doc. RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost a vstřícnost při vedení této práce. Děkuji mým rodičům a Mirce za nedocenitelnou podporu. Konečně děkuji Bohu, který mě provází každodenním životem.

Název práce: Moufangové rovina a spinové grupy

Autor: Dominik Stejskal

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Tato práce se zabývá působením výjimečné jednoduché Lieovy grupy F_4 na tzv. (reálné) Moufangové rovině $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Cílem práce je podat co nejúplnější důkaz tranzitivnosti tohoto působení. Nejprve jsou definovány související pojmy, jako jsou Cliffordovy algebry, grupy $\mathrm{Pin}(r, s)$ a $\mathrm{Spin}(r, s)$ a algebra oktonionů $\mathbb{O}$, a jsou dokázány jejich základní vlastnosti. Grupu F_4 definujeme jako grupu automorfismů algebry $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$ hermitovských oktonionových matic řádu tři. Moufangové rovinu definujeme jako vhodnou podmnožinu $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$. V grupě F_4 nalezneme izomorfní kopie grup $\mathrm{Spin}(0, 8)$ a $\mathrm{Spin}(0, 9)$. Pomocí vhodných výsledků z předchozích kapitol dospějeme ke kýženému důkazu tranzitivnosti působení F_4 na $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$.

Klíčová slova: spinové grupy, nedesargueovské roviny, tranzitivní akce, Jordanovy algebry

Title: Moufang plane and Spin groups

Author: Dominik Stejskal

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In this thesis we consider the action of the exceptional simple Lie group F_4 on the so called (real) Moufang plane $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. The goal of this thesis is to present a proof of the transitivity of this action, which is as complete as possible. We first define related concepts such as Clifford algebras, the groups $\mathrm{Pin}(r, s)$ and $\mathrm{Spin}(r, s)$ and the algebra of octonions $\mathbb{O}$, and we prove their basic properties. The group F_4 is defined as the automorphism group of the algebra $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$ of hermitian octonionic matrices of order three. The Moufang plane is defined as a suitable subset of $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$. In the group F_4 we find isomorphic copies of the groups $\mathrm{Spin}(0, 8)$ and $\mathrm{Spin}(0, 9)$. By applying certain auxilliary results from the previous chapters we obtain the desired proof of the transitivity of the action of F_4 on $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$.

Keywords: Spin groups, non-desarguesian planes, transitive actions, Jordan algebras

Obsah

Úvod

Reálná projektivní rovina $\mathbb{RP}^2$ je rozšířením euklidovské roviny $\mathbb{R}^2$ o „body v nekonečnu“, ve kterých se protínají rovnoběžky. Platí v ní, že každé dvě různé přímky se protínají v jednom bodě a každé dva různé body jednoznačně určují přímku. Přidáme-li k těmto vlastnostem vhodný požadavek na existenci bodů a přímek „v obecné poloze“, dostaneme definici projektivní roviny. V $\mathbb{RP}^2$ platí *Desarguesův axiom*, který zjednodušeně řečeno říká, že dva trojúhelníky jsou „perspektivní z bodu“, právě tehdy když jsou „perspektivní z přímky“. Existují ovšem projektivní roviny, ve kterých Desarguesův axiom neplatí, nazývané *nedesarguesovské*. Příkladem takové roviny je *(reálná) Moufangové rovina* $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Pro více informací viz [1, Section 3] nebo [9].

Na Moufangové rovině působí přirozeným způsobem tzv. výjimečná jednoduchá Lieova grupa F_4. Toto působení je tranzitivní a stabilizátor v každém bodu je izomorfní tzv. *Spin grupě* $\mathrm{Spin}(0,9)$. Moufangové rovinu lze tedy v jistém smyslu ztotožnit s faktorem $F_4/\mathrm{Spin}(0,9)$ (viz [1, Section 4.2]).

Cílem této práce je dospět k důkazu tranzitivnosti působení grupy F_4 na $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Nejprve je ovšem potřeba definovat související pojmy a dokázat jejich základní vlastnosti. Uvedená tvrzení a jejich důkazy jsou převážně převzaté z literatury. Mnohé důkazy jsou však doplněny o chybějící podrobnosti, zejména pak vynechané výpočty.

V první kapitole vycházíme především z [2, Chapter 3] a [5, Chapter 1]. Definujeme pojem Cliffordovy algebry $C(V,Q)$ pro kvadratickou formu (V,Q). Jedná se o přirozené zobecnění komplexních čísel, kvaternionů a například vnější algebry vektorového prostoru. Dokážeme existenci a jednoznačnost Cliffordovy algebry a popíšeme její bázi. Pomocí rekurentních vztahů popíšeme reálné Cliffordovy algebry $C(r,s)$ pro nedegenerovanou kvadratickou formu obecné signatury (r,s). Důležitou roli ve zbytku práce budou hrát zejména algebry $C(0,8)$ a $C(0,9)$.

Ve druhé kapitole čerpáme hlavně z [5, Section 1.4] a [7, Kapitola 3]. Definujeme zde Pin grupu $\mathrm{Pin}(r,s)$ a Spin grupu $\mathrm{Spin}(r,s)$ jako jisté podmnožiny $C(r,s)$. Uvedeme grupový homomorfismus $\lambda_{r,s}\colon \mathrm{Pin}(r,s) \to \mathrm{O}(r,s)$ mezi Pin grupou a zobecněnou ortogonální grupou. Pro signaturu $(0,n)$ dokážeme surjektivitu $\lambda_{0,n}$ a fakt, že vzorem speciální ortogonální grupy $\mathrm{SO}(n)$ při zobrazení $\lambda_{0,n}$ je grupa $\mathrm{Spin}(0,n)$. Tím bude přirozeně definované působení grupy $\mathrm{Spin}(0,9)$ na sféře $S^8 \subset \mathbb{R}^9$ a dokázána jeho tranzitivnost, kterou budeme dále potřebovat.

Hlavními zdroji pro třetí kapitolu jsou [6, Chapter 6] a [3, Kapitola 2]. V této kapitole se zabýváme normovanými algebrami. Jde o zobecnění komplexních čísel a kvaternionů jiného druhu než Cliffordovy algebry. Ze základní vlastnosti $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ („norma respektuje násobení“) odvodíme vícero vlastností normovaných algeber, zejména Artinovu větu a Moufangové identity. Pomocí tzv. Cayleyho–Dicksonova procesu definujeme normovanou algebru oktonionů $\mathbb{O}$ jako rozšíření algebry kvaternionů $\mathbb{H}$.

Ve čtvrté, stěžejní kapitole vycházíme především z [4] a [6, Chapter 14]. Nejprve definujeme Jordanovu algebru $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$ hermitovských oktonionových matic řádu 3. Grupa jejích automorfismů je výše zmíněná F_4. Moufangové rovina je definována jako vhodná podmnožina $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$. Ukážeme, že působení F_4 lze zúžit na $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. V grupě F_4 najdeme izomorfní kopie grup $\mathrm{Spin}(0,8)$ a $\mathrm{Spin}(0,9)$ a vhodně do F_4 zobrazíme ortogonální grupu O(3). Tím dokážeme, že F_4 je „dostatečně velká“ a její působení na $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$ je tranzitivní.

1. Cliffordovy algebry

V první kapitole se budeme věnovat pojmu Cliffordovy algebry pro kvadratickou formu. Jde o společné zobecnění komplexních čísel, kvaternionů a například vnější algebry vektorového prostoru. Jedním ze zdrojů je [5, Chapter 1]. V této monografii lze už v úvodu nalézt fyzikální motivaci pro Cliffordovy algebry. Pro důkazy některých klíčových vlastností Cliffordovy algebry musíme také nahlédnout do [2, Chapter 3].

Začneme techničtější sekcí o tenzorovém součinu vektorových prostorů a algeber.

1.1 Tenzorový součin

Definice 1.1. *Algebrou nad tělesem* $\mathbb{K}$ rozumíme vektorový prostor A nad $\mathbb{K}$ s bilineárním násobením $m\colon A \times A \to A$. *Algebrou s jednotkou* rozumíme algebru A obsahující prvek $1 \in A$ (*jednotku*), který splňuje

$$\forall a \in A\colon m(1, a) = a = m(a, 1).$$

Součin $m(a, b)$ prvků $a, b \in A$ budeme pro jednoduchost značit ab. Jednotku v algebře A budeme někdy pro zdůraznění značit 1_A. Při zápisu skalárního násobku jednotky budeme naopak symbol 1 někdy vynechávat.

Definice 1.2. Nechť A, B jsou algebry nad tělesem $\mathbb{K}$. Jejich *direktním součtem* $A \oplus B$ nazýváme direktní součet vektorových prostorů A, B s násobením definovaným po složkách, tj.

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2), \quad a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B.$$

Poznámka 1.3. V práci budeme pracovat s pojmem tenzorového součinu $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ (někdy pro jednoduchost značeného $V \otimes W$) vektorových prostorů V, W nad tělesem $\mathbb{K}$. Symbolem $\otimes^k V$ značíme k-tou tenzorovou mocninu prostoru V:

$$\otimes^k V = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\times}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Budeme využívat základních vlastností tenzorového součinu, z nichž některé nyní uvedeme. Jestliže $(v_1, \ldots, v_n)$ je báze V a $(w_1, \ldots, w_m)$ je báze W, potom

$$\{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

je báze $V \otimes W$. Je-li $\dim V = n$ a $\dim W = m$, potom $\dim V \otimes W = mn$. Tenzorovou algebru vektorového prostoru V značíme $T(V)$:

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots$$

Prostor V považujeme za vektorový podprostor $T(V)$. Tenzorová algebra má následující *univerzální vlastnost*. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, A je asociativní algebra nad $\mathbb{K}$ a $f\colon V \to A$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jeden homomorfismus algeber $h\colon T(V) \to A$ splňující $h|_V = f$. Pro podrobnosti o tenzorových součinech viz například [8].

Definice 1.4. Nechť A, B jsou algebry nad tělesem $\mathbb{K}$. Jejich *(negradovaným) tenzorovým součinem* $A \otimes B$ nazýváme vektorový prostor $A \otimes_{\mathbb{K}} B$. Násobení na něm definujeme následovně: pro $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ položme

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

a uvažujme jeho (bi)lineární rozšíření na množinu $(A \otimes_{\mathbb{K}} B) \times (A \otimes_{\mathbb{K}} B)$. Snadno lze ověřit, že $A \otimes B$ s takto definovaným násobením je algebra nad $\mathbb{K}$.

Poznámka 1.5. Výše definované násobení je dobře definované. Součin dvou prvků nezáleží na „způsobu jejich zápisu“. Například pro $a_1, a_1', a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $k \in \mathbb{K}$ je

$$\begin{aligned}
(ka_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) &= k(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) = (a_1 \otimes kb_1)(a_2 \otimes b_2),\\
((a_1 + a_1') \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) &= (a_1 + a_1')a_2 \otimes b_1 b_2\\
&= (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) + (a_1' a_2 \otimes b_1 b_2)\\
&= (a_1 \otimes b_1 + a_1' \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2).
\end{aligned}$$

Lemma 1.6. *Nechť A, B, C jsou konečně rozměrné algebry nad $\mathbb{R}$. Potom platí následující izomorfismy algeber:*

$$\begin{aligned}
A \otimes B &\cong B \otimes A,\\
(A \otimes B) \otimes C &\cong A \otimes (B \otimes C),\\
(A \oplus B) \otimes C &\cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C),\\
A \otimes (B \oplus C) &\cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C).
\end{aligned}$$

Dále značí-li $\mathrm{M}(n, \mathbb{A})$ *reálnou algebru čtvercových matic řádu n nad $\mathbb{A}$, kde $\mathbb{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, potom*

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{A} &\cong \mathrm{M}(n, \mathbb{A}),\\
\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \otimes \mathrm{M}(m, \mathbb{R}) &\cong \mathrm{M}(mn, \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Důkaz. Viz [8, zejména Propositions 5.15, 16.2]. Pro důkaz distributivnosti $\otimes$ vůči $\oplus$ je ještě potřeba na prvcích báze ověřit zachovávání násobení. $\square$

1.2 Cliffordovy algebry

Definice 1.7. Nechť $\mathbb{K}$ je těleso. Dvojici (V, B) nazveme *bilineární formou nad* $\mathbb{K}$, jestliže V je konečně rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ je bilineární zobrazení. Bilineární formu (V, B) nazveme *symetrickou*, jestliže

$$\forall v, w \in V\colon B(v, w) = B(w, v).$$

Příslušnou *kvadratickou formou* nazveme dvojici (V, Q), kde $Q\colon V \to \mathbb{K}$ je zobrazení definované vztahem

$$Q(v) = B(v, v), \quad v \in V.$$

Poznámka 1.8.

- Někdy nazýváme bilineární formou pouze zobrazení B a kvadratickou formou pouze zobrazení Q. V teorii Cliffordových algeber je typické označení z Definice 1.7.
- Jestliže char $\mathbb{K} \neq 2$, z kvadratické formy (V, Q) lze získat zpátky příslušnou symetrickou bilineární formu (V, B) pomocí polarizace:
$$\forall v, w \in V \colon B(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)).$$
- Vektor $v \in V$ splňující $Q(v) = 0$ je někdy nazýván *izotropním.*

Úmluva 1.9.

- V celé práci budou uvažována pouze tělesa charakteristiky různé od 2.
- Všechny algebry ve zbytku práce jsou algebry s jednotkou. Homomorfismem algeber tedy rozumíme lineární zobrazení mezi algebrami, které zachovává součin *a jednotku.*

Nyní můžeme přistoupit k definici Cliffordovy algebry pro kvadratickou formu (V, Q). Jde o „nejobecnější“ asociativní algebru s jednotkou, do které se V vhodným způsobem zobrazuje.

Definice 1.10. Nechť (V, Q) je kvadratická forma nad $\mathbb{K}$. *Cliffordovou algebrou pro* (V, Q) nazýváme dvojici (A, i), kde A je asociativní algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a $i \colon V \to A$ je lineární zobrazení splňující:

- i je *kvadratický homomorfismus*, tj.
$$\forall v \in V \colon i(v)^2 = Q(v)1_A, \tag{1.1}$$
- je-li (A', i') další dvojice splňující první podmínku, pak existuje právě jeden homomorfismus algeber $h \colon A \to A'$ takový, že $h \circ i = i'$.

Potom značíme $A = C(V, Q)$, případně $A = C(Q)$. Druhou podmínku nazýváme *univerzální vlastností* Cliffordovy algebry.

Poznámka 1.11.

- Z podmínky (1.1) nahrazením v za $v + w$ plyne:
$$\forall v, w \in V \colon i(v)i(w) + i(w)i(v) = 2B(v, w)1_A. \tag{1.2}$$
Jelikož char $\mathbb{K} \neq 2$, položením $v = w$ vidíme, že je tato podmínka podmínce (1.1) dokonce ekvivalentní.
- Značení bude ospravedlněno tvrzením o jednoznačnosti $C(V, Q)$.

Cliffordovu algebru jsme definovali abstraktně jako objekt s jistými vlastnostmi. Není ovšem zřejmé, jestli takový objekt musí vždy existovat. Kladnou odpověď na tuto otázku dává následující tvrzení. Uvedený důkaz je podrobnější verzí důkazu z [5, page 5].

Tvrzení 1.12 (existence Cliffordovy algebry). *Pro každou kvadratickou formu (V,Q) existuje Cliffordova algebra $C(V,Q)$.*

Důkaz. Uvažme tenzorovou algebru $T(V)$ a její oboustranný ideál $I(Q)$ generovaný množinou
$$\{v \otimes v - Q(v) \mid v \in V\}.$$
Je-li
$$\begin{aligned} \pi\colon T(V) &\to T(V)/I(Q), \\ t &\mapsto t + I(Q) =: [t] \end{aligned}$$
přirozená projekce na faktoralgebru, vidíme, že
$$\pi(v)^2 = [v]^2 = [v \otimes v] = [Q(v)] = Q(v)1_{T(V)/I(Q)}, \quad v \in V \subset T(V).$$
Tedy $(T(V)/I(Q), \pi|_V)$ splňuje podmínku (1.1) z definice Cliffordovy algebry pro (V,Q).

Je-li (A,i) další taková dvojice, díky univerzální vlastnosti $T(V)$ lze lineární zobrazení $i\colon V \to A$ rozšířit na homomorfismus algeber $\hat{i}\colon T(V) \to A$. Přitom
$$\hat{i}(v \otimes v - Q(v)) = \hat{i}(v)^2 - \hat{i}(Q(v)) = (Q(v) - Q(v))1_A = 0, \quad v \in V.$$
Tudíž $I(Q) \subseteq \operatorname{Ker} \hat{i}$ a z věty o homomorfismu dostáváme homomorfismus algeber $h\colon T(V)/I(Q) \to A$ splňující $h \circ \pi = \hat{i}$, tedy $h \circ \pi|_V = i$.

Tenzorová algebra $T(V)$ je generovaná (jako algebra) prvky V, tedy algebra $T(V)/I(Q)$ je generovaná prvky tvaru $[v]$, $v \in V$. Je-li $h'\colon T(V)/I(Q) \to A$ homomorfismus algeber splňující $h' \circ \pi|_V = i$, musí se shodovat s h na prvcích tohoto tvaru. Platí tedy $h' = h$. □

Podobně jako jiné objekty definované pomocí univerzální vlastnosti je i Cliffordova algebra pro danou kvadratickou formu určena jednoznačně až na izomorfismus. Uvádíme upravenou verzi důkazu z [7, Kapitola 2].

Tvrzení 1.13 (jednoznačnost Cliffordovy algebry). *Nechť (V,Q) je kvadratická forma. Potom je Cliffordova algebra $C(V,Q)$ určena jednoznačně až na izomorfismus algeber.*

Důkaz. Nechť (A_1, i_1), (A_2, i_2) jsou Cliffordovy algebry pro (V,Q). Potom existují homomorfismy algeber $h_1\colon A_1 \to A_2$, $h_2\colon A_2 \to A_1$ splňující $h_1 \circ i_1 = i_2$, $h_2 \circ i_2 = i_1$. Tedy
$$\begin{aligned} (h_2 \circ h_1) \circ i_1 = h_2 \circ i_2 = i_1, \\ (h_1 \circ h_2) \circ i_2 = h_1 \circ i_1 = i_2. \end{aligned}$$

Ovšem $\mathrm{id}_{A_1}\colon A_1 \to A_1$, $\mathrm{id}_{A_2}\colon A_2 \to A_2$ jsou také homomorfismy algeber splňující $\mathrm{id}_{A_1} \circ i_1 = i_1$, respektive $\mathrm{id}_{A_2} \circ i_2 = i_2$. Volbou $(A,i) = (A_1, i_1) = (A', i')$, respektive $(A,i) = (A_2, i_2) = (A', i')$ v definici Cliffordovy algebry dostáváme rovnosti $h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_{A_1}$, $h_1 \circ h_2 = \mathrm{id}_{A_2}$. Tedy h_1, h_2 jsou vzájemně inverzní izomorfismy algeber A_1, A_2. □

Zkoumáme-li tedy vlastnosti Cliffordovy algebry $C(V, Q)$, díky jednoznačnosti stačí uvažovat její konkrétní „manifestaci“ jako $T(V)/I(Q)$.

Dále by nás mohlo zajímat, jak konkrétně Cliffordova algebra pro danou kvadratickou formu vypadá. Bylo by užitečné znát její dimenzi a mít k dispozici vhodnou bázi. Nejprve ukážeme, že Cliffordova algebra nerozlišuje mezi kvadratickými formami, které jsou „v podstatě totožné“ (izometrické).

Definice 1.14. Nechť (V_1, B_1), (V_2, B_2) jsou bilineární formy nad stejným tělesem. Izomorfismus vektorových prostorů $f\colon V_1 \to V_2$ nazveme *izometrií*, jestliže

$$\forall v, w \in V_1\colon B_2(f(v), f(w)) = B_1(v, w).$$

Bilineární formy (V_1, B_1), (V_2, B_2) nazveme *izometrickými*, jestliže existuje izometrie $f\colon V_1 \to V_2$. Analogicky tyto pojmy definujeme pro příslušné kvadratické formy.

Jednoduchým důsledkem univerzální vlastnosti Cliffordovy algebry je následující tvrzení, převzaté z [2, Subsection 3.1.2]. Doplňujeme jeho důkaz.

Tvrzení 1.15. *Cliffordovy algebry pro izometrické kvadratické formy jsou izomorfní.*

Důkaz. Nechť $f\colon V_1 \to V_2$ je izometrie kvadratických forem (V_1, Q_1), (V_2, Q_2). Dále nechť $(C(Q_1), i_1)$, $(C(Q_2), i_2)$ značí příslušné Cliffordovy algebry. Pro každé $v_1 \in V_1$ je

$$i_2(f(v_1))^2 = Q_2(f(v_1)) = Q_1(v_1).$$

Podle definice Cliffordovy algebry existuje homomorfismus algeber $h_1\colon C(Q_1) \to C(Q_2)$ splňující $h_1 \circ i_1 = i_2 \circ f$. Protože f^{-1} je také izometrie, existuje homomorfismus algeber $h_2\colon C(Q_2) \to C(Q_1)$ splňující $h_2 \circ i_2 = i_1 \circ f^{-1}$. Platí

$$h_2 \circ h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2 \circ f = i_1 \circ f^{-1} \circ f = i_1.$$

Podobně jako v předchozím důkazu dostáváme rovnost $h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_{C(Q_1)}$. Analogicky odvodíme $h_1 \circ h_2 = \mathrm{id}_{C(Q_2)}$. Homomorfismy h_1, h_2 jsou tedy vzájemně inverzní izomorfismy algeber $C(Q_1)$, $C(Q_2)$. □

Nyní provedeme horní odhad dimenze $C(V, Q)$. Uvedený důkaz je podrobnější verzí důkazu z [2, Proposition 3.1.1].

Tvrzení 1.16. *Je-li* $\dim V = n$*, potom* $\dim C(V, Q) \le 2^n$.

Důkaz. Nechť $(v_1, \ldots, v_n)$ je báze V. Vidíme, že

$$C(Q) = \mathrm{span}\{i(v_{i_1}) \cdots i(v_{i_k}) \mid i_j \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, k\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

kde prázdný součin značí $1_{C(Q)}$. Ze vztahů (1.1), (1.2) dále plyne

$$C(Q) = \mathrm{span}\{i(v_{i_1}) \cdots i(v_{i_k}) \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, k \in \{0, \ldots, n\}\}.$$

Jako vektorový prostor je tedy $C(Q)$ generovaná těmito prvky, kterých je nejvýše 2^n. □

Pro důkaz dolního odhadu $\dim C(V,Q)$ bude potřeba definovat pojem graduovaného tenzorového součinu algeber.

Definice 1.17. Algebru A nazýváme $\mathbb{Z}_2$-*gradovanou*, jestliže je jako vektorový prostor direktním součtem $A = A_0 \oplus A_1$, kde

$$\forall i,j \in \mathbb{Z}_2\ \forall a \in A_i, a' \in A_j \colon aa' \in A_{i+j}.$$

Zde součet $i+j$ uvažujeme modulo 2. Stručně píšeme: $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$.

Definice 1.18. Uvažme konstrukci $C \coloneqq C(V,Q)$ jako $T(V)/I(Q)$ z důkazu Tvrzení 1.12. Algebra $T \coloneqq T(V)$ je jako vektorový prostor direktním součtem $T^+ \oplus T^-$, kde

$$T^+ = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^{2k} V, \qquad T^- = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^{2k+1} V.$$

Tímto součtem je zadána $\mathbb{Z}_2$-gradace na T. Oboustranný ideál $I \coloneqq I(Q)$ je generován množinou

$$\{v \otimes v - Q(v) \mid v \in V\} \subseteq T^+.$$

Položíme-li tedy

$$I^+ = I \cap T^+, \qquad I^- = I \cap T^-,$$

platí $I = I^+ \oplus I^-$ (ve smyslu direktního součtu vektorových prostorů). Konečně označme

$$C^+ = C^+(V,Q) = \pi(T^+), \qquad C^- = C^-(V,Q) = \pi(T^-).$$

Podalgebru C^+ algebry C nazýváme *sudou částí* C.

Následující tvrzení bylo převzato z [2, Subsection 3.1.1]. Uvádíme podrobnější verzi jeho důkazu.

Lemma 1.19. *Jako vektorový prostor je algebra C direktním součtem*

$$C = C^+ \oplus C^-.$$

Tímto součtem je zadána $\mathbb{Z}_2$-gradace na C.

Důkaz. Zřejmě

$$C^+ + C^- = \pi(T^+) + \pi(T^-) = \pi(T^+ + T^-) = \pi(T) = C.$$

Dále

$$\begin{aligned}
C^+ \cap C^- &= \big((T^+ + I)/I\big) \cap \big((T^- + I)/I\big) \\
&= \big((T^+ \oplus I^-)/I\big) \cap \big((T^- \oplus I^+)/I\big) \\
&= ((T^+ \oplus I^-) \cap (T^- \oplus I^+))/I \\
&= (I^+ \oplus I^-)/I \\
&= I/I.
\end{aligned}$$

Příslušná $\mathbb{Z}_2$-gradace je „zděděná z T“. Platí například

$$C^+C^- = \pi(T^+)\pi(T^-) = \pi(T^+T^-) \subseteq \pi(T^-) = C^-,$$

jelikož $T^+T^- \subseteq T^-$. Analogicky

$$C^+C^+ \subseteq C^+, \qquad C^-C^+ \subseteq C^-, \qquad C^-C^- \subseteq C^+.$$

□

Definice 1.20. Nechť $A = A_0 \oplus A_1$, $B = B_0 \oplus B_1$ jsou $\mathbb{Z}_2$-gradované algebry nad $\mathbb{K}$. Jejich *gradovaným tenzorovým součinem* $A \hat{\otimes} B$ rozumíme vektorový prostor $A \otimes_{\mathbb{K}} B$. Násobení na něm definujeme následovně: pro $a \in A$, $a_i \in A_i$, $b \in B$, $b_j \in B_j$ položme

$$(a \otimes b_j)(a_i \otimes b) = (-1)^{ij} a a_i \otimes b_j b$$

a uvažujme jeho (bi)lineární rozšíření na množinu $(A \otimes_{\mathbb{K}} B) \times (A \otimes_{\mathbb{K}} B)$. Snadno lze ověřit, že $A \hat{\otimes} B$ s takto definovaným násobením je algebra nad $\mathbb{K}$.

Poznámka 1.21. Negradovaný tenzorový součin algeber A, B odpovídá gradovanému součinu, kde na obou algebrách uvažujeme tzv. *triviální gradaci*, tj. $A = A_0$, $B = B_0$.

Definice 1.22. Nechť (V, B), (V', B') jsou symetrické bilineární formy nad $\mathbb{K}$. Definujeme jejich *direktní (ortogonální) součet* jako bilineární formu $(V \oplus V', B \oplus B')$, kde

$$\begin{aligned}(B \oplus B')|_{V \times V} &= B,\\ (B \oplus B')|_{V' \times V'} &= B',\\ (B \oplus B')|_{V \times V'} &= (B \oplus B')|_{V' \times V} = 0.\end{aligned}$$

Jsou-li (V, Q), (V', Q') kvadratické formy příslušné (V, B), (V', B'), potom jejich *direktním (ortogonálním) součtem* nazýváme kvadratickou formu $(V \oplus V', Q \oplus Q')$ příslušnou $(V \oplus V', B \oplus B')$.

Důkazy následujícího lemmatu a tvrzení byly převzaty z [2, Lemma 3.1.1, Proposition 3.1.2] a doplněny o podrobnosti.

Lemma 1.23. *Nechť (V, Q), (V', Q') jsou kvadratické formy nad $\mathbb{K}$. Potom existuje surjektivní homomorfismus algeber $h\colon C(Q \oplus Q') \to C(Q) \hat{\otimes} C(Q')$.*

Důkaz. Buďte $i\colon V \to C(Q)$, $i'\colon V' \to C(Q')$, $j\colon V \oplus V' \to C(Q \oplus Q')$ lineární zobrazení z definice Cliffordovy algebry. Definujme

$$\begin{aligned}g\colon V \oplus V' &\to C(Q) \hat{\otimes} C(Q'),\\ (v, v') &\mapsto i(v) \otimes 1 + 1 \otimes i'(v').\end{aligned}$$

Z linearity i a i' plyne, že g je lineární. Pro libovolné $(v, v') \in V \oplus V'$ platí

$$\begin{aligned}g((v, v'))^2 &= (i(v) \otimes 1 + 1 \otimes i'(v'))^2\\ &= i(v)^2 \otimes 1 + i(v) \otimes i'(v') - i(v) \otimes i'(v') + 1 \otimes i'(v')^2\\ &= Q(v) + Q'(v')\\ &= (Q \oplus Q')((v, v')).\end{aligned}$$

Existuje tedy homomorfismus algeber $h\colon C(Q \oplus Q') \to C(Q) \hat{\otimes} C(Q')$ splňující $h \circ j = g$.

Algebra $C(Q) \hat{\otimes} C(Q')$ je generovaná (jako algebra) prvky tvaru $h((v, 0)) = i(v) \otimes 1$, $h((0, v')) = 1 \otimes i'(v')$. Jelikož tyto prvky leží v obrazu h, surjektivita h je dokázána. $\square$

Tvrzení 1.24. *Je-li* $\dim V = n$*, potom* $\dim C(V,Q) = 2^n$*. Dále je-li* $(v_1, \dots, v_n)$ *báze* V*, potom*

$$(i(v_{i_1}) \cdots i(v_{i_k}) \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, k \in \{0, 1, \dots, n\})$$

je báze $C(V,Q)$*.*

Důkaz. Postupujme indukcí podle n.

$n = 0$: Chceme ukázat, že $C(0,0) \cong \mathbb{K}$. Toto tvrzení ovšem snadno plyne z faktu, že každá asociativní algebra A nad $\mathbb{K}$ s jednotkou obsahuje $\mathbb{K} \cong \mathbb{K}1_A$ jako podalgebru.

$n = 1$: Zvolme libovolný $0 \neq v \in V$. Potom $(\otimes^k v \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ je báze $T(V)$, kde $\otimes^k v = \underbrace{v \otimes \cdots \otimes v}_{k\times}$. Uvažme komutativní algebru $\mathbb{K}[x]$ polynomů jedné proměnné x. Přiřazení $\otimes^k v \mapsto x^k$ indukuje izomorfismus algeber $T(V)$ a $\mathbb{K}[x]$. Tyto algebry tedy můžeme ztotožnit. Ideál $I(Q)$ v tomto přiřazení odpovídá hlavnímu ideálu $(x^2 - Q(v))\mathbb{K}[x]$. Dostáváme rovnost

$$\dim C(Q) = \dim \Big(\mathbb{K}[x]/(x^2 - Q(v))\mathbb{K}[x]\Big) = 2.$$

Snadno totiž nahlédneme, že $([1], [x])$ je báze $\mathbb{K}[x]/(x^2 - Q(v))\mathbb{K}[x]$.

$n - 1 \to n$ (indukční krok): Nechť B značí symetrickou bilineární formu příslušnou Q. Jelikož $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, existuje B-ortogonální báze prostoru V. Existují tedy kvadratické formy (V_1, Q_1), (V', Q') takové, že $(V,Q) = (V_1 \oplus V', Q_1 \oplus Q')$ a $\dim V_1 = 1$. Podle indukčního předpokladu je $\dim C(Q_1) = 2$, $\dim C(Q') = 2^{n-1}$. Podle předchozího lemmatu existuje surjektivní homomorfismus $h\colon C(Q) \to C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q')$. Tudíž

$$\dim C(Q) \ge \dim(C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q')) = \dim C(Q_1) \cdot \dim C(Q') = 2^n.$$

Podle Tvrzení 1.16 platí $\dim C(Q) \le 2^n$. Tím je dokázána rovnost $\dim C(Q) = 2^n$.

Prvky systému ve znění tvrzení generují $C(Q)$ (jako vektorový prostor) a je jich 2^n. Tvoří tedy bázi $C(Q)$. ☐

Důsledek 1.25. *Je-li* $(C(Q), i)$ *Cliffordova algebra pro* (V,Q)*, zobrazení* i *je prosté. Homomorfismus* h *z Lemmatu 1.23 je izomorfismus.*

Poznámka 1.26. Dále budeme prvky V ztotožňovat s jejich obrazy při zobrazení i, tedy bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $V \subseteq C(V,Q)$. Podobně podprostor $C(V,Q)$ generovaný jednotkou ztotožníme s tělesem $\mathbb{K}$. Budeme-li $\mathbb{K}$ uvažovat jako vektorový prostor nad sebou samým, někdy použijeme značení $\mathbb{K}^1$.

Symbolem I_n budeme v celé práci značit jednotkovou matici řádu n.

Příklad 1.27. Nyní již můžeme explicitně popsat některé Cliffordovy algebry pro konkrétní kvadratické formy. Vycházíme přitom z [2, Subsections 3.1.4, 3.2.1].

- $(V,Q) = (0,0)$ (triviální prostor s nulovou kvadratickou formou). Potom má $C(Q)$ bázi sestávající pouze z jednotky, a tedy $C(Q) \cong \mathbb{K}$.

  Obecněji, nechť V je libovolný a $Q = 0$. Potom $C(Q) \cong \Lambda(V)$, kde $\Lambda(V)$ značí tzv. *vnější algebru* vektorového prostoru V.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^1$. Potom má $C(Q)$ bázi $(1, v)$, kde (v) je báze $\mathbb{R}^1$. Lze zvolit v takové, že $Q(v) \in \{0, \pm 1\}$.
  - Nechť $Q(v) = -1$. Uvažme přiřazení $1 \mapsto 1$, $v \mapsto i$. Jelikož $(1, v)$ je báze $C(Q)$, toto přiřazení zadává lineární zobrazení z $C(Q)$ do $\mathbb{C}$. Pro něj lze snadno ověřit, že zachovává jednotku a násobení pro dvojice prvků báze. Jde tak o homomorfismus reálných algeber. Jelikož se báze zobrazila na bázi, jde o izomorfismus algeber, tudíž $C(Q) \cong \mathbb{C}$. Postup v dalších příkladech je analogický a pouze jej naznačíme.
  - Je-li $Q(v) = 1$, potom přiřazení $1 \mapsto (1, 1)$, $v \mapsto (1, -1)$ indukuje izomorfismus algeber $C(Q)$ a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Prvky algebry $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ nazýváme *dvojnými čísly.*
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$. Je-li Q nedegenerovaná, mohou nastat následující tři možnosti:
  - Q je negativně definitní. Nechť (v_1, v_2) je ortogonální báze $\mathbb{R}^2$ splňující $Q(v_1) = Q(v_2) = -1$. Přiřazení $1 \mapsto 1$, $v_1 \mapsto i$, $v_2 \mapsto j$, $v_1 v_2 \mapsto k$ indukuje izomorfismus $C(Q)$ s algebrou kvaternionů $\mathbb{H}$.
  - Q je indefinitní. Nechť (v_1, v_2) je ortogonální báze $\mathbb{R}^2$ splňující $Q(v_1) = 1$, $Q(v_2) = -1$. Uvažujme následující reálné matice:

    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

    Přiřazení $1 \mapsto I_2$, $v_1 \mapsto A$, $v_2 \mapsto B$, $v_1 v_2 \mapsto C$ indukuje izomorfismus algeber $C(Q)$ a $\mathrm{M}(2, \mathbb{R})$.
  - Q je pozitivně definitní. Nechť (v_1, v_2) je ortonormální báze $\mathbb{R}^2$. Přiřazení $1 \mapsto I_2$, $v_1 \mapsto A$, $v_2 \mapsto C$, $v_1 v_2 \mapsto B$ indukuje izomorfismus algeber $C(Q)$ a $\mathrm{M}(2, \mathbb{R})$.

Na závěr sekce uveďme pomocné lemma a tvrzení, která vhodně použijeme v následující kapitole. Uvedené důkazy jsou podrobnějšími verzemi důkazů z [5, pages 8–10].

Nechť $(v_1, \ldots, v_n)$ je Q-ortogonální báze V. Označme potenční množinu množiny $\{1, \ldots, n\}$ jako $\mathcal{P}$. Pro každou množinu $I \in \mathcal{P}$ označme $v_I = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, kde $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $i_1 < \cdots < i_k$ (a speciálně $v_\emptyset = 1$). Potom $(v_I \mid I \in \mathcal{P})$ je báze $C(Q)$ podle Tvrzení 1.24.

Lemma 1.28. *Nechť (V, Q) je nedegenerovaná kvadratická forma. Potom pro všechna $I, J \in \mathcal{P}$ platí*

$$v_I v_J v_I^{-1} = (-1)^{|I||J| - |I \cap J|} v_J,$$

kde $|M|$ značí kardinalitu množiny M.

Důkaz. Nechť $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $i_1 < \cdots < i_k$. Snadno vidíme, že v_I je invertibilní a

$$v_I^{-1} = \frac{1}{Q(v_{i_1})} \cdots \frac{1}{Q(v_{i_k})} v_{i_k} \cdots v_{i_1}.$$

Díky Q-ortogonalitě zvolené báze platí vztahy $v_k v_l = -v_l v_k$ pro $1 \leq k < l \leq n$. Zaměňujme v součinu $v_I v_J$ postupně sousední prvky tvaru v_i, v_j, kde $i \in I$, $j \in J$ tak, abychom nakonec dostali $v_J v_I$. Celkem provedeme $|I||J|$ záměn. Každá z nich změní znaménko součinu, kromě těch, kdy zaměňujeme dva stejné vektory. To se stane $|I \cap J|$-krát. □

Tvrzení 1.29. *Nechť (V, Q) je nedegenerovaná kvadratická forma. Označíme-li centrum algebry A jako $\mathcal{Z}(A)$, potom*

$$\mathcal{Z}(C(Q)) = \begin{cases} \operatorname{span}\{1\} & \textit{pro } \dim V \textit{ sudou,} \\ \operatorname{span}\{1, v_1 \cdots v_n\} & \textit{pro } \dim V \textit{ lichou,} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}(C^+(Q)) = \begin{cases} \operatorname{span}\{1, v_1 \cdots v_n\} & \textit{pro } \dim V \textit{ sudou,} \\ \operatorname{span}\{1\} & \textit{pro } \dim V \textit{ lichou.} \end{cases}$$

Důkaz. Pro $\dim V = 0$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme dále, že $\dim V \geq 1$. Snadno lze ověřit, že $\operatorname{span}\{1\}$ a $\operatorname{span}\{1, v_1 \cdots v_n\}$ jsou vektorové podprostory $C(Q)$ uzavřené na součiny, tedy podalgebry.

Nechť

$$a = \sum_{I \in \mathcal{P}} a_I v_I \in \mathcal{Z}(C(Q)) \cup \mathcal{Z}(C^+(Q)).$$

Dále nechť $J \in \mathcal{P}$, $|J| = 2$. Platí $a v_J = v_J a$, tedy podle Lemmatu 1.28 máme

$$\sum_{I \in \mathcal{P}} a_I v_I = \sum_{I \in \mathcal{P}} a_I v_J v_I v_J^{-1} = \sum_{I \in \mathcal{P}} (-1)^{|I \cap J|} a_I v_I.$$

Jelikož $(v_I \mid I \in \mathcal{P})$ je báze $C(Q)$, dostáváme $(-1)^{|I \cap J|} a_I = a_I$ pro všechna $I \in \mathcal{P}$. Jediné prvky $\mathcal{P}$, které mají průnik sudé mohutnosti s každou $J \in \mathcal{P}$ mohutnosti 2, jsou $\emptyset$ a $\{1, \ldots, n\}$. Dostáváme tak $a_I = 0$ pro $I \notin \{\emptyset, \{1, \ldots, n\}\}$, neboli

$$\mathcal{Z}(C(Q)), \mathcal{Z}(C^+(Q)) \subseteq \operatorname{span}\{1, v_1 \cdots v_n\}.$$

Zřejmě také

$$\operatorname{span}\{1\} \subseteq \mathcal{Z}(C(Q)) \cap \mathcal{Z}(C^+(Q)).$$

Položme $I = \{1, \ldots, n\}$.

- Nejprve nechť $n = \dim V$ je liché. Potom $v_I = v_1 \cdots v_n \notin C^+(Q)$, tedy

  $$\mathcal{Z}(C^+(Q)) = \operatorname{span}\{1\}.$$

  Vezmeme-li $J \in \mathcal{P}$, z Lemmatu 1.28 plyne $v_I v_J v_I^{-1} = v_J$. Prvek $v_1 \cdots v_n$ komutuje se všemi prvky báze $C(Q)$, tedy

  $$\mathcal{Z}(C(Q)) = \operatorname{span}\{1, v_1 \cdots v_n\}.$$

- Nyní uvažme $n = \dim V$ sudé. Potom $v_I \in C^+(Q)$. Podle Lemmatu 1.28 pro každé $J \in \mathcal{P}$ sudé mohutnosti platí $v_I v_J v_I^{-1} = v_J$. Tedy v_I, v_J komutují a

  $$\mathcal{Z}(C^+(Q)) = \operatorname{span}\{1, v_1 \cdots v_n\}.$$

  Naopak pro J liché mohutnosti vidíme, že $v_I v_J v_I^{-1} = -v_J$. Proto $v_I \notin \mathcal{Z}(C(Q))$ a

  $$\mathcal{Z}(C(Q)) = \operatorname{span}\{1\}.$$

□

1.3 Reálné Cliffordovy algebry

Nyní se budeme podrobněji zabývat speciálním případem Cliffordových algeber pro reálné vektorové prostory a nedegenerované kvadratické formy na nich. Ukazuje se, že je lze popsat jako jisté maticové algebry.

Definice 1.30. Nechť $(\mathbb{R}^n, Q)$ je nedegenerovaná kvadratická forma nad $\mathbb{R}$ signatury (r, s), kde r, respektive s značí pozitivní, respektive negativní index setrvačnosti a $r + s = n$. Cliffordovu algebru pro $(\mathbb{R}^n, Q)$ budeme značit $C(r, s)$.

Poznámka 1.31.

- Jelikož nedegenerované kvadratické formy nad $\mathbb{R}$ stejné signatury jsou izometrické, $C(r, s)$ je určena jednoznačně až na izomorfismus.
- Již jsme odvodili následující izomorfismy:

$$\begin{aligned}
&C(0,0) \cong \mathbb{R},\\
&C(1,0) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},\\
&C(0,1) \cong \mathbb{C},\\
&C(2,0) \cong C(1,1) \cong \mathrm{M}(2,\mathbb{R}),\\
&C(0,2) \cong \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

- Algebry a tenzorové součiny v této sekci uvažujeme jako negradované.

Důkaz následujícího tvrzení je podrobnější verzí důkazu z [2, Proposition 3.2.1].

Tvrzení 1.32. *Pro libovolná $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí následující izomorfismy algeber:*

$$\begin{aligned}
C(r+1, s+1) &\cong C(1,1) \otimes C(r,s),\\
C(r+2, s) &\cong C(2,0) \otimes C(s,r),\\
C(r, s+2) &\cong C(0,2) \otimes C(s,r).
\end{aligned}$$

Důkaz. Uvažujme nedegenerované kvadratické formy $(\mathbb{R}^n, Q)$, $(\mathbb{R}^n, Q')$, $(\mathbb{R}^2, Q_2)$, kde Q má signaturu (r, s). Nechť (e_1, e_2) je Q_2-ortonormální báze $\mathbb{R}^2$ (tj. $Q_2(e_i) = \pm 1$). Definujme lineární zobrazení

$$\begin{aligned}
i\colon \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^n &\to C(Q_2) \otimes C(Q'),\\
(v, w) &\mapsto v \otimes 1 + e_1 e_2 \otimes w.
\end{aligned}$$

Pro každé $(v, w) \in \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}
i((v,w))^2 &= v^2 \otimes 1 + (v e_1 e_2 + e_1 e_2 v) \otimes w - e_1^2 e_2^2 \otimes w^2\\
&= Q_2(v) - Q_2(e_1) Q_2(e_2) Q'(w).
\end{aligned}$$

Pro všechna $v \in \mathbb{R}^2$ je totiž $v e_1 e_2 = -e_1 e_2 v$, což stačí ověřit pro $v = e_1$ a $v = e_2$. V závislosti na Q a Q_2 nyní zvolme konkrétní formu Q':

$$\begin{aligned}
Q' &= Q, && \text{jestliže } Q_2(e_1) Q_2(e_2) = -1,\\
Q' &= -Q, && \text{jestliže } Q_2(e_1) Q_2(e_2) = 1.
\end{aligned}$$

V prvním případě má Q' signaturu (r, s) a Q_2 má signaturu $(1, 1)$. Ve druhém případě má Q' signaturu (s, r) a Q_2 má signaturu $(2, 0)$ nebo $(0, 2)$. Pokračujme ve výpočtu:

$$i((v, w))^2 = Q_2(v) + Q(w) = (Q_2 \oplus Q)((v, w)).$$

Zobrazení i lze tedy rozšířit na homomorfismus algeber

$$h\colon C(Q_2 \oplus Q) \to C(Q_2) \otimes C(Q').$$

Obraz h obsahuje pro každá $v \in \mathbb{R}^2$, $w \in \mathbb{R}^n$ prvky $v \otimes 1$, $e_1e_2 \otimes w$. Jelikož prvky tohoto tvaru generují algebru $C(Q_2) \otimes C(Q')$, h je surjektivní. Snadno spočteme

$$\dim C(Q_2 \oplus Q) = 2^{n+2} = \dim C(Q_2) \cdot \dim C(Q') = \dim(C(Q_2) \otimes C(Q')).$$

V prvních dvou rovnostech jsme použili Tvrzení 1.24. Z těchto rovností plyne, že h je izomorfismus algeber. Přitom má-li Q_2 signaturu $(1, 1)$, respektive $(2, 0)$, respektive $(0, 2)$, potom má $Q_2 \oplus Q$ signaturu $(r + 1, s + 1)$, respektive $(r + 2, s)$, respektive $(r, s + 2)$. $\square$

Věta 1.33. *Následující tabulka popisuje (až na izomorfismus) Cliffordovy algebry $C(r, s)$. (Uvažujeme $n = r + s$.)*

$r - s \pmod 8$	$C(r, s)$
0	$\mathrm{M}(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{R})$
1	$\mathrm{M}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{R})$
2	$\mathrm{M}(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{R})$
3	$\mathrm{M}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C})$
4	$\mathrm{M}(2^{\frac{n-2}{2}}, \mathbb{H})$
5	$\mathrm{M}(2^{\frac{n-3}{2}}, \mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}(2^{\frac{n-3}{2}}, \mathbb{H})$
6	$\mathrm{M}(2^{\frac{n-2}{2}}, \mathbb{H})$
7	$\mathrm{M}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C})$

Algebra $C(r, s)$ je tedy jednoduchá pro $n \not\equiv 1 \pmod 4$ a polojednoduchá (direktní součet dvou jednoduchých ideálů) pro $n \equiv 1 \pmod 4$.

Náznak důkazu. Pomocí Tvrzení 1.32, Lemmatu 1.6 a znalosti $C(r, s)$ pro $n \leq 2$ (viz Poznámku 1.31) lze pro každou $C(r, s)$ odvodit izomorfismus s algebrou jednoho z následujících tvarů:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{A} &\cong \mathrm{M}(k, \mathbb{A}),\\
\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{A} &\cong ((\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R})) \otimes \mathbb{A}\\
&\cong (\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}(k, \mathbb{R})) \otimes \mathbb{A}\\
&\cong (\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{A}) \oplus (\mathrm{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{A})\\
&\cong \mathrm{M}(k, \mathbb{A}) \oplus \mathrm{M}(k, \mathbb{A}),
\end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $\mathbb{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Pro podrobnosti viz [2, Subsection 3.2.1]. $\square$

Poznámka 1.34. Pro účely této práce jsou nejdůležitější následující dva speciální případy Věty 1.33:

$$C(0, 8) \cong \mathrm{M}(16, \mathbb{R}), \qquad C(0, 9) \cong \mathrm{M}(16, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}(16, \mathbb{R}).$$

2. Grupy Pin a Spin

Ve druhé kapitole navážeme na první kapitolu a definujeme grupy $\mathrm{Pin}(r,s)$, $\mathrm{Spin}(r,s)$ pomocí vhodných invertibilních prvků algebry $C(r,s)$. Klíčovým poznatkem je Věta 2.12, zejména její speciální případ pro $n=9$.

Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu je [5, Sections 1.2, 1.4], kde je uveden případ signatury $(0,n)$. Při zobecnění na obecnou signaturu (r,s) vycházíme z [7, Kapitola 3].

Definice 2.1. Nechť A je algebra nad tělesem $\mathbb{K}$. *Opačnou algebrou k A* rozumíme algebru A^{op} definovanou jako vektorový prostor A s násobením $\cdot_{\mathrm{op}}$ definovaným opačně k násobení v A. Přesněji, označíme-li $a \cdot b$ součin prvků a, b v algebře A, potom definujeme

$$a \cdot_{\mathrm{op}} b = b \cdot a, \quad a, b \in A^{\mathrm{op}}.$$

Tak jako doposud budeme stručně psát $a \cdot_{\mathrm{op}} b = ab$.

Definice 2.2. Nechť $C(Q)$ je Cliffordova algebra pro (V,Q). Uvažujme lineární zobrazení

$$\begin{aligned} i\colon V &\to C(Q), \\ v &\mapsto -v. \end{aligned}$$

Jelikož pro všechna $v \in V$ platí

$$i(v)^2 = v^2 = Q(v),$$

existuje právě jeden homomorfismus algeber $\beta\colon C(Q) \to C(Q)$ rozšiřující i. Ten nazveme *inverzí.*

Dále nechť $C(Q)^{\mathrm{op}}$ je opačná algebra k $C(Q)$. Uvažme lineární zobrazení

$$\begin{aligned} j\colon V &\to C(Q)^{\mathrm{op}}, \\ v &\mapsto v. \end{aligned}$$

Jelikož pro všechna $v \in V$ platí

$$j(v)^2 = v^2 = Q(v),$$

existuje právě jeden homomorfismus algeber $\gamma\colon C(Q) \to C(Q)^{\mathrm{op}}$ rozšiřující j. Nazveme jej *reverzí.* Uvažujeme-li jej jako zobrazení $\gamma\colon C(Q) \to C(Q)$, jde o *antihomomorfismus*, tj. pro $a, b \in C(Q)$ je $\gamma(ab) = \gamma(b)\gamma(a)$.

Poznámka 2.3. Pro libovolná $v_1, \ldots, v_k \in V$ platí $\beta(v_1 \cdots v_k) = (-1)^k v_1 \cdots v_k$. Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} C^+(Q) &= \{a \in C(Q) \mid \beta(a) = a\}, \\ C^-(Q) &= \{a \in C(Q) \mid \beta(a) = -a\}. \end{aligned}$$

Definice 2.4. Nechť $C^*(r,s)$ značí grupu všech invertibilních prvků $C(r,s)$. *Pin grupou* $\mathrm{Pin}(r,s)$ nazýváme podgrupu $C^*(r,s)$ generovanou množinou

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid Q(v) \in \{\pm 1\}\}, \tag{2.1}$$

kde Q značí kvadratickou formu na $\mathbb{R}^n$ příslušnou $C(r,s)$ a $n = r+s \geq 1$ (stejně i ve zbytku sekce). *Spin grupou* $\mathrm{Spin}(r,s)$ nazýváme grupu $\mathrm{Pin}(r,s) \cap C^+(r,s)$. Ekvivalentně jde o podgrupu $C^*(r,s)$ generovanou součiny sudého počtu prvků množiny (2.1).

Poznámka 2.5. Nechť $v \in V$ splňuje $Q(v) \neq 0$. Potom

$$v\frac{v}{Q(v)} = \frac{v^2}{Q(v)} = \frac{Q(v)}{Q(v)} = 1,$$

tedy $v \in C^*(r,s)$ a $v^{-1} = \frac{v}{Q(v)}$. Množina (2.1) je tak podmnožinou $C^*(r,s)$ a Definice 2.4 je tedy korektní. Speciálně je-li $Q(v) \in \{\pm 1\}$, potom

$$Q(v^{-1}) = Q\left(\frac{v}{Q(v)}\right) = \frac{Q(v)}{Q(v)^2} = Q(v).$$

Množina (2.1) tedy s každým svým prvkem obsahuje i prvek k němu inverzní. Můžeme proto psát:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(r,s) &= \{v_1 \cdots v_k \mid v_i \in \mathbb{R}^n, Q(v_i) \in \{\pm 1\}, i \in \{1,\ldots,k\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},\\
\mathrm{Spin}(r,s) &= \{v_1 \cdots v_{2k} \mid v_i \in \mathbb{R}^n, Q(v_i) \in \{\pm 1\}, i \in \{1,\ldots,2k\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.
\end{aligned}$$

Důkaz následujícího lemmatu je adaptací důkazu z [7, strana 13].

Lemma 2.6. *Nechť $a \in \mathrm{Pin}(r,s)$ a $v \in \mathbb{R}^n \subseteq C(r,s)$. Potom $av\gamma(a) \in \mathbb{R}^n$ a navíc $Q(av\gamma(a)) = Q(v)$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}^n \subseteq C(r,s)$, $Q(a) \in \{\pm 1\}$. Zvolme Q-ortogonální bázi $(e_i)_{i=1}^n$ prostoru $\mathbb{R}^n$ takovou, že $e_1 = a$. Je-li $v = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, $c_i \in \mathbb{R}$, potom

$$av\gamma(a) = e_1\left(\sum_{i=1}^n c_i e_i\right)e_1 = Q(e_1)c_1e_1 - Q(e_1)\sum_{i=2}^n c_i e_i \in \mathbb{R}^n.$$

Jelikož se souřadnice vektoru $av\gamma(a)$ vzhledem ke Q-ortogonální bázi od souřadnic vektoru v liší nejvýše o znaménka, platí $Q(av\gamma(a)) = Q(v)$.

Obecný prvek $a \in \mathrm{Pin}(r,s)$ je tvaru $a = a_1 \cdots a_m$, kde $a_i \in \mathbb{R}^n$, $Q(a_i) \in \{\pm 1\}$. Potom je

$$av\gamma(a) = a_1(\cdots(a_m v\gamma(a_m))\cdots)\gamma(a_1)$$

a tvrzení lze tak snadno dokázat indukcí podle m. □

Úmluva 2.7. $C(r,s)$ jsme definovali jednoznačně *až na izomorfismus algeber*. Dosud nezáleželo na tom, jakou konkrétní (pevnou) kvadratickou formu dané signatury uvažujeme. Ve zbytku práce budeme za nedegenerovanou kvadratickou formu na $\mathbb{R}^n$ signatury (r,s) volit kanonickou formu $Q_{r,s}$ definovanou předpisem

$$Q_{r,s}(c_1,\ldots,c_{r+s}) = c_1^2 + \cdots + c_r^2 - c_{r+1}^2 - \cdots - c_{r+s}^2, \quad (c_1,\ldots,c_{r+s}) \in \mathbb{R}^n.$$

Symbolem $C(r,s)$ budeme tedy značit Cliffordovu algebru pro tuto konkrétní formu; analogicky pro $\mathrm{Pin}(r,s)$, $\mathrm{Spin}(r,s)$.

Definice 2.8. *(Zobecněnou) ortogonální grupou* $\mathrm{O}(r,s)$ rozumíme grupu všech endomorfismů vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ zachovávajících $Q_{r,s}$, tj.

$$\mathrm{O}(r,s) = \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid \forall v \in \mathbb{R}^n \colon Q_{r,s}(Av) = Q_{r,s}(v)\}.$$

(Zobecněnou) speciální ortogonální grupou $\mathrm{SO}(r,s)$ rozumíme podgrupu $\mathrm{O}(r,s)$ sestávající z endomorfismů s determinantem 1:

$$\mathrm{SO}(r,s) = \{A \in \mathrm{O}(r,s) \mid \det A = 1\}.$$

Jelikož $\mathrm{O}(n,0) = \mathrm{O}(0,n)$, tuto grupu pro jednoduchost značíme $\mathrm{O}(n)$. Analogicky definujeme $\mathrm{SO}(n)$.

Poznámka 2.9. Ztotožníme-li přirozeným způsobem $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ s $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, snadno nahlédneme, že

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}.$$

Definice 2.10. Pro každé $a \in \mathrm{Pin}(r,s)$ definujeme zobrazení

$$\begin{aligned} \lambda_{r,s}(a) \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \\ v &\mapsto av\gamma(a). \end{aligned}$$

čímž je definováno zobrazení

$$\begin{aligned} \lambda_{r,s} \colon \mathrm{Pin}(r,s) &\to \mathrm{O}(r,s), \\ a &\mapsto \lambda_{r,s}(a). \end{aligned}$$

Poznámka 2.11.

- $\lambda_{r,s}$ je dobře definované díky Lemmatu 2.6.
- Nechť $v \in \mathbb{R}^n$, $Q_{0,n}(v) = -1$. Potom z důkazu Lemmatu 2.6 plyne, že $\lambda_{0,n}(v)$ je reflexe podle nadroviny kolmé na v.

Důkaz následující věty vychází z důkazů v [5, page 16] a [7, strana 13].

Věta 2.12.

(a) $\lambda_{0,n}$ *je surjektivní homomorfismus grup.*

(b) $\lambda_{0,n}^{-1}(\mathrm{SO}(n)) = \mathrm{Spin}(0,n)$.

(c) $\mathrm{Ker}\,\lambda_{0,n} = \{\pm 1\}$.

Důkaz. Pro jednoduchost označme $\lambda = \lambda_{0,n}$.

(a) Nechť $a, b \in \mathrm{Pin}(0,n)$, $v \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\lambda(ab)v = abv\gamma(ab) = abv\gamma(b)\gamma(a) = \lambda(a)(\lambda(b)v),$$

tedy $\lambda(ab) = \lambda(a) \circ \lambda(b)$. Tím je dokázáno, že λ je homomorfismus grup.

Podle Poznámky 2.11 obraz λ obsahuje všechny reflexe (podle nadrovin procházejících počátkem). Podle Cartanovy–Dieudonného věty je grupa $\mathrm{O}(n)$ generovaná reflexemi, čímž je dokázána surjektivita λ.

(b) Nechť $v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Pin}(0,n)$, kde $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jsou jednotkové vektory. Podle Poznámky 2.11 je $\lambda(v_1 \cdots v_k) = \lambda(v_1) \circ \cdots \circ \lambda(v_k)$ složením k reflexí. Tudíž $\lambda(v_1 \cdots v_k) \in \mathrm{SO}(n)$ platí právě tehdy, když je k sudé. Ovšem to platí podle Poznámky 2.5 právě tehdy, když $v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Spin}(0,n)$.

(c) Inkluze $\{\pm 1\} \subseteq \operatorname{Ker} \lambda$ je zřejmá. Dokažme opačnou inkluzi.

Nechť $a \in \operatorname{Ker} \lambda$. Neutrální prvek $\lambda(a) = \mathrm{id}$ grupy $\mathrm{O}(n)$ leží v $\mathrm{SO}(n)$. Prvek a je tedy podle části (b) tvaru $v_1 \cdots v_{2k}$, kde $v_i \in \mathbb{R}^n$ jsou jednotkové. Pro každý $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$v = \lambda(a)v = av\gamma(a). \tag{2.2}$$

Díky Poznámce 2.5 vidíme, že

$$a^{-1} = v_{2k}^{-1} \cdots v_1^{-1} = v_{2k} \cdots v_1 = \gamma(a). \tag{2.3}$$

Vynásobíme-li rovnici (2.2) zprava prvkem a, vidíme, že a a v komutují. Přitom $v \in \mathbb{R}^n$ bylo libovolné, tedy $a \in \mathcal{Z}(C(0,n))$. Navíc $a \in C^+(0,n)$, tudíž $a \in \mathcal{Z}(C^+(0,n))$. Z Tvrzení 1.29 plyne

$$x \in \mathcal{Z}(C(0,n)) \cap \mathcal{Z}(C^+(0,n)) = \mathrm{span}\{1\}.$$

Ze vztahu $\mathrm{id} = \lambda(a) = a^2 \mathrm{id}$ dostáváme $\operatorname{Ker} \lambda \subseteq \{\pm 1\}$.

$\square$

Poznámka 2.13. Důkaz faktu, že $\lambda_{0,n}$ je homomorfismus grup, lze obdobně provést i pro obecnou signaturu (r,s).

3. Oktoniony

Ve třetí kapitole se budeme věnovat normovaným algebrám. Podobně jako Cliffordovy algebry zobecňují komplexní čísla a kvaterniony. Na rozdíl od Cliffordových algeber nemusí být normované algebry obecně asociativní. Lze pro ně ovšem odvodit alespoň „slabší verze asociativnosti“, konkrétně Artinovu větu a Moufangové identity. Pomocí tzv. Cayleyho–Dicksonova procesu zkonstruujeme normovanou algebru oktonionů $\mathbb{O}$. Oktonionové matice poslouží v další kapitole k definici základních pojmů, jako jsou Moufangové rovina a grupa F_4.

Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu je [6, Chapter 6], kde je uvedena obecnější definice normovaných algeber, než budeme potřebovat. Omezíme se proto po vzoru [3, Kapitola 2] na speciální případ, který postačí ke konstrukci oktonionů.

3.1 Normované algebry

Definice 3.1. Nechť $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je symetrická, pozitivně definitní bilineární forma nad $\mathbb{R}$ (tedy skalární součin). Příslušnou kvadratickou formu značíme $\|\cdot\|$ a nazýváme *kvadrátem normy*. Je-li V navíc algebra s jednotkou splňující $1_V \neq 0$ a

$$\forall x, y \in V\colon \|xy\| = \|x\|\|y\|,$$

nazveme ji *normovanou algebrou*.

Poznámka 3.2.

- Definici 3.1 je možné formulovat obecněji pro nedegenerovanou symetrickou bilineární formu (která nemusí být pozitivně definitní). Pro účely této práce se postačí omezit na *pozitivně definitní* symetrické bilineární formy, tedy skalární součiny.

- Skalární součin na V je kvadrátem normy jednoznačně určen díky klasické *polarizační formuli*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|), \quad x, y \in V.$$

- V normované algebře platí $\|1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\|^2$ a $1 \neq 0$, a tedy $\|1\| = 1$.

- V normované algebře nemá nula nenulové dělitele. Je-li totiž $xy = 0$, potom $0 = \|xy\| = \|x\|\|y\|$, tedy $x = 0$ nebo $y = 0$.

Příklad 3.3. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ jsou normované algebry. Skalární součin zde uvažujeme takový, aby standardní báze $(1, i, j, k)$ algebry $\mathbb{H}$ byla ortonormální. Pro $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jde o snadné pozorování. Pro kvaterniony lze provést přímý výpočet nebo použít Větu 3.18 a Tvrzení 3.19 odvozené níže.

Následující lemma uvádí další možné ekvivalentní definice normované algebry. Důkaz lemmatu byl převzat z [6, Lemma 6.3].

Lemma 3.4. *Nechť A je reálná algebra a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na A. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

$$\forall x, y \in A\colon \|xy\| = \|x\|\|y\|, \tag{3.1}$$

$$\forall x, y, z \in A\colon \langle xz, yz \rangle = \|z\| \langle x, y \rangle, \tag{3.2}$$

$$\forall x, y, z \in A\colon \langle zx, zy \rangle = \|z\| \langle x, y \rangle, \tag{3.3}$$

$$\forall x, y, z, w \in A\colon \langle xz, yw \rangle + \langle yz, xw \rangle = 2\langle x, y \rangle \langle z, w \rangle. \tag{3.4}$$

Důkaz. Položením $w = z$ ve (3.4) dostáváme (3.2). Položením $x = y$ ve (3.2) (a přejmenováním proměnné z) dostáváme (3.1). Implikace (3.4) $\Rightarrow$ (3.3), (3.3) $\Rightarrow$ (3.1) jsou analogické.

Předpokládejme platnost (3.1). Nahrazením y výrazem $y + z$ dostaneme rovnost výrazů

$$\begin{aligned}\|x(y+z)\| &= \langle x(y+z), x(y+z) \rangle = \|xy\| + 2\langle xy, xz \rangle + \|xz\| \\ &= \|x\|\|y\| + 2\langle xy, xz \rangle + \|x\|\|z\|\end{aligned}$$

a

$$\|x\|\|y+z\| = \|x\| \langle y+z, y+z \rangle = \|x\|(\|y\| + 2\langle y, z \rangle + \|z\|),$$

z čehož plyne (3.3). Nahradíme-li ve (3.3) prvek z výrazem $z + w$, dostaneme rovnost výrazů

$$\begin{aligned}\langle (z+w)x, (z+w)y \rangle &= \langle zx, zy \rangle + \langle zx, wy \rangle + \langle wx, zy \rangle + \langle wx, wy \rangle \\ &= (\|z\| + \|w\|)\langle x, y \rangle + \langle zx, wy \rangle + \langle wx, zy \rangle\end{aligned}$$

a

$$\|z+w\| \langle x, y \rangle = (\|z\| + 2\langle z, w \rangle + \|w\|)\langle x, y \rangle,$$

z čehož plyne (3.4). $\square$

Definice 3.5. Nechť A je reálná algebra a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na A. Definujme

$$\operatorname{Re} A = \operatorname{span}\{1\}, \qquad \operatorname{Im} A = (\operatorname{Re} A)^{\perp}.$$

Jelikož $A = \operatorname{Re} A \oplus \operatorname{Im} A$ (jako vektorový prostor), každé $x \in A$ lze jednoznačně zapsat jako $x = x_R + x_I$, kde $x_R \in \operatorname{Re} A$, $x_I \in \operatorname{Im} A$. Označme $\operatorname{Re} x = x_R$ tzv. *reálnou část* x a $\operatorname{Im} x = x_I$ tzv. *imaginární část* x. Prvky $\operatorname{Re} A$ nazýváme *reálnými* a ztotožňujeme je s reálnými čísly.

Konjugací nazýváme lineární zobrazení

$$\begin{aligned}\overline{\cdot}\colon A &\to A, \\ x &\mapsto \overline{x} \coloneqq \operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x.\end{aligned}$$

Pro libovolné $x \in A$ definujme lineární zobrazení

$$\begin{aligned}L_x\colon A &\to A, \\ y &\mapsto xy.\end{aligned}$$

Nazýváme jej *levým násobením prvkem* x. Analogicky definujme *pravé násobení* R_x. Pro $r \in \operatorname{Re} A$ budeme pro jednoduchost značit $r = L_r = R_r$.

Poznámka 3.6. $\operatorname{Re} A$ je podalgebra A, kterou můžeme ztotožnit s $\mathbb{R}$. $\operatorname{Im} A$ je nadrovina v A kolmá na $\operatorname{Re} A$.

Příklad 3.7. Pro kvaterniony platí $\operatorname{Im} \mathbb{H} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{i, j, k\}$. Konjugace na $\mathbb{H}$ odpovídá klasickému sdružení:

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pomocí konjugace lze snadno popsat sdružená zobrazení k levému, respektive pravému násobení daným prvkem. Následující lemma s důkazem bylo převzato z [6, page 103] a doplněno o podrobnosti.

Lemma 3.8. *Nechť A je normovaná algebra a $x \in A$. Sdružená zobrazení k L_x, respektive R_x jsou*

$$L_x^* = L_{\overline{x}}, \qquad \textit{respektive} \qquad R_x^* = R_{\overline{x}}.$$

Jinými slovy

$$\langle xy, z\rangle = \langle y, \overline{x}z\rangle \qquad a \qquad \langle yx, z\rangle = \langle y, z\overline{x}\rangle \tag{3.5}$$

pro všechna $x, y, z \in A$.

Důkaz. Zobrazení daná předpisy

$$x \mapsto L_x^*, \qquad x \mapsto L_{\overline{x}}$$

jsou lineární. Stačí tedy ukázat, že se shodují na $\operatorname{Re} A$ i na $\operatorname{Im} A$. Rovnost na $\operatorname{Re} A$ plyne z bilinearity $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Nechť $x \in \operatorname{Im} A$, $z, w \in A$. Položením $y = 1$ ve (3.4) dostáváme

$$\langle xz, w\rangle = -\langle z, xw\rangle = \langle z, \overline{x}w\rangle,$$

což jsme chtěli dokázat. Důkaz pro R_x je analogický. $\square$

Nyní můžeme odvodit vícero užitečných vztahů pro počítání v normovaných algebrách. Důkaz lemmatu je podrobnější verzí důkazů z [6, Lemmas 6.10, 6.12].

Lemma 3.9. *Nechť A je normovaná algebra. Potom pro všechna $x, y, z \in A$ platí:*

(a) $\overline{\overline{x}} = x$,

(b) $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = \langle x, y\rangle$,

(c) $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$,

(d) $x\overline{x} = \overline{x}x = \|x\|$,

(e) $x(\overline{y}z) + y(\overline{x}z) = 2\langle x, y\rangle z$,

(f) $(z\overline{y})x + (z\overline{x})y = 2\langle x, y\rangle z$,

(g) $x\overline{y} + y\overline{x} = \overline{x}y + \overline{y}x = 2\langle x, y\rangle$.

Důkaz.

(a), (b) Konjugace je „kolmá reflexe vůči přímce $\operatorname{Re} A$“. Je tedy sama k sobě inverzní a zachovává skalární součin.

(c) Podle (a), (b) a Lemmatu 3.8 pro všechna $z \in A$ platí

$$\langle z, \overline{xy} \rangle = \langle \overline{z}, xy \rangle = \langle \overline{x}\,\overline{z}, y \rangle = \langle \overline{x}, yz \rangle = \langle \overline{y}\,\overline{x}, z \rangle,$$

neboli $\langle z, \overline{xy} - \overline{y}\,\overline{x} \rangle = 0$. Z toho plyne dokazovaná rovnost.

(d) Podle (a) a (c) platí $\overline{x\overline{x}} = x\overline{x}$, tedy $x\overline{x} \in \operatorname{Re} A$. Máme tak

$$x\overline{x} = \langle x\overline{x}, 1 \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|.$$

Důkaz pro $\overline{x}x$ je analogický.

(e) Nechť $w \in A$. Podle (3.5), (3.4) a (b) máme

$$\langle w, x(\overline{y}z) + y(\overline{x}z) \rangle = \langle \overline{x}w, \overline{y}z \rangle + \langle \overline{y}w, \overline{x}z \rangle = 2\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \langle w, z \rangle = \langle w, 2\langle x, y \rangle z \rangle.$$

(f) Důkaz je analogický jako pro (e).

(g) Snadný důsledek (e) a (f).

□

3.2 Asociativnost, Moufangové identity

Úmluva 3.10. Nechť x, y, z jsou prvky algebry, která není asociativní, ale platí $(xy)z = x(yz)$. Hodnotu těchto součinů budeme značit xyz. Je-li součástí nějakého tvrzení o neasociativní algebře výraz tvaru xyz, myslíme tím, že součástí tvrzení je i platnost rovnosti $(xy)z = x(yz)$.

Definice 3.11. Nechť A je algebra. Zobrazení

$$[\cdot,\cdot,\cdot]\colon A \times A \times A \to A, \qquad (x, y, z) \mapsto [x, y, z] \coloneqq (xy)z - x(yz)$$

nazýváme *asociátorem*. Algebru A nazvene *alternativní*, jestliže asociátor na A je alternující, tj. roven nule, kdykoliv jsou si dva argumenty rovny. Ekvivalentně, A je alternující, jestliže

$$(xx)y = x(xy), \qquad (xy)x = x(yx), \qquad (yx)x = y(xx)$$

pro všechna $x, y \in A$.

Poznámka 3.12.

- Asociátor je trilineární (v každé složce lineární) zobrazení, jak plyne z bilinearity a distributivnosti násobení v algebře.
- Asociátor „měří“, do jaké míry je algebra neasociativní. Algebra je asociativní právě tehdy, když je asociátor nulové zobrazení.

- Alternativnost je slabší podmínka než asociativnost, tj. pokud je algebra asociativní, pak je i alternativní.

Důkaz následujícího lemmatu je podrobnější verzí důkazu z [6, Lemma 6.11].

Lemma 3.13. *Každá normovaná algebra je alternativní.*

Důkaz. Nechť A je normovaná algebra. Z bilinearity násobení plyne, že asociátor je roven nule, je-li jeden z argumentů reálný. Díky trilinearitě asociátoru stačí ukázat, že

$$[x, x, y] = [x, y, x] = [y, x, x] = 0$$

pro všechna $x \in \operatorname{Im} A$, $y \in A$.

Rozepišme

$$[x, x, y] = -[\overline{x}, x, y] = -\|x\|y + \overline{x}(xy).$$

Pro všechna $z \in A$ platí

$$\langle z, \overline{x}(xy)\rangle = \langle xz, xy\rangle = \langle z, \|x\|y\rangle,$$

kde jsme využili (3.5) a (3.3). Proto $\overline{x}(xy) = \|x\|y$, neboli $[x, x, y] = 0$. Analogicky $[y, x, x] = 0$. Z rovnosti $[x + z, x + z, y] = 0$ plyne $[x, z, y] = -[z, x, y]$, tedy $[x, y, x] = -[y, x, x] = 0$. □

Následuje Artinova věta, která nám umožní vynechávat závorky v součinech prvků „dostatečně malé“ podalgebry normované algebry. Důkaz věty je podrobnější verzí důkazu z [6, Theorem 6.39].

Věta 3.14 (Artin). *Podalgebra s jednotkou normované algebry generovaná dvěma prvky je asociativní.*

Důkaz. Nechť A je normovaná algebra a B je její podalgebra s jednotkou generovaná prvky $x, y \in A$. Označme $S = \operatorname{span}\{\operatorname{Im} x, \operatorname{Im} y\}$.

- Je-li $\dim S = 0$, máme $B = \mathbb{R}$ a tvrzení zřejmě platí.

- Je-li $\dim S = 1$, zvolme $0 \neq \varepsilon \in S$. Obecný prvek B dostaneme z 1 a ε opakovaným sčítáním, násobením v algebře A a násobením skalárem (například $4(\varepsilon(\varepsilon\varepsilon))\varepsilon - \sqrt{2}\varepsilon + 10$ a podobně). Jelikož $\varepsilon^2 = -\varepsilon\overline{\varepsilon} = -\|\varepsilon\| \in \mathbb{R}$, máme $B = \operatorname{span}\{1, \varepsilon\}$ (opakované násobení nám „nedá nic nového“). Asociativnost B pak plyne z trilinearity asociátoru a Lemmatu 3.13.

- Konečně nechť $\dim S = 2$. Zvolme ortogonální bázi $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ prostoru S. Obecný prvek B dostaneme z 1, ε_1 a ε_2 tak jako v předchozím případě. Podle Lemmatu 3.9 platí pro libovolné $z \in B$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\varepsilon_2 z) &= -\overline{\varepsilon_2}(\overline{\varepsilon_1} z) = -\varepsilon_2(\varepsilon_1 z), \\ (z\varepsilon_1)\varepsilon_2 &= -(z\overline{\varepsilon_2})\overline{\varepsilon_1} = -(z\varepsilon_2)\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Také víme, že $\varepsilon_i^2 = -\|\varepsilon_i\| \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Tím jsme ukázali, že $B = \operatorname{span}\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$. Díky trilinearitě asociátoru a Lemmatu 3.13 zbývá dokázat $[z_1, z_2, z_3] = 0$, pro $\{z_1, z_2, z_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$. Povšimněme si, že pro normovanou algebru je asociátor antisymetrický (prohození dvou argumentů změní znaménko; viz konec důkazu Lemmatu 3.13). Proto stačí dokázat například

$$\begin{aligned}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2] &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_1(\varepsilon_2(\varepsilon_1\varepsilon_2)) \overset{(3.6)}{=} -(\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_1) + \varepsilon_1(\varepsilon_1(\varepsilon_2^2)) \\ &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2)\overline{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \|\varepsilon_1\|\|\varepsilon_2\| = -\|\varepsilon_1\varepsilon_2\| + \|\varepsilon_1\|\|\varepsilon_2\| = 0.\end{aligned}$$

□

Poznámka 3.15. Nechť A je normovaná algebra, $0 \neq x \in A$. Budeme využívat pozorování, že

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 2\operatorname{Re} x - x \in \operatorname{span}\{1, x\}, \\ x^{-1} &= \frac{1}{\|x\|}\overline{x} \in \operatorname{span}\{1, x\}.\end{aligned}$$

Podle Artinovy věty tedy můžeme „vynechávat závorky“ u výrazů tvaru $\overline{x}yx^{-1}$, $y \in A$ a podobně.

V součinech tří obecných prvků normované algebry už na uzávorkování záleží, ovšem v některých případech lze závorky vhodně přeuspořádat. Následující tvrzení je uvedeno v [6, Chapter 6, Problem 2] jako cvičení. Doplňujeme jeho důkaz.

Tvrzení 3.16 (Moufangové identity)**.** *Nechť A je normovaná algebra a $x, y, z \in A$. Potom*

$$(zx)(yz) = z(xy)z, \tag{3.7}$$
$$((xz)y)z = x(zyz), \tag{3.8}$$
$$(zxz)y = z(x(zy)). \tag{3.9}$$

Důkaz. S pomocí Lemmatu 3.9 počítejme

$$\begin{aligned}(zx)(yz) &= -\overline{y}(\overline{zx}z) + 2\langle zx, \overline{y}\rangle z = -\overline{y}\,\overline{x}\|z\| + 2\langle z, \overline{y}\,\overline{x}\rangle z \\ &= -\overline{xy}(\overline{z}z) + 2\langle z, \overline{xy}\rangle z = z(xy)z.\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}((xz)y)z &= -(xz\overline{z})\overline{y} + 2\langle \overline{y}, z\rangle xz = -\|z\|x\overline{y} + 2\langle \overline{y}, z\rangle xz \\ &= x(-z\overline{z}\,\overline{y} + 2\langle \overline{y}, z\rangle z) = x(zyz).\end{aligned}$$

Důkaz (3.9) je analogický. □

3.3 Cayleyho–Dicksonův proces

Definice 3.17. Nechť A je normovaná algebra. Uvažme ortogonální součet bilineární formy $(A, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se sebou, tj. vektorový prostor $A \oplus A$ se skalárním součinem definovaným předpisem

$$\langle (x, y), (z, w)\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, w\rangle, \quad x, y, z, w \in A.$$

Definujme na něm bilineární násobení předpisem

$$(x, y)(z, w) = (xz - \overline{w}y, wx + y\overline{z}), \quad x, y, z, w \in A.$$

Výslednou algebru nazýváme *Cayleyho iterací* A a značíme A'. Tuto konstrukci algebry A' z normované algebry A nazýváme *Cayleyho–Dicksonovým procesem.*

Základní vlastnosti Cayleyho iterace shrnuje následující věta, převzatá z [6, Definition 6.17, Corollary 6.27]. Doplňujeme důkaz části (d).

Věta 3.18. *Nechť A je normovaná algebra a A' je její Cayleyho iterace.*

(a) $(1, 0)$ *je jednotka algebry* A'.

(b) *Předpis $x \mapsto (x, 0)$ definuje vnoření algebry A do algebry A', tedy prostý homomorfismus algeber, který je izometrií A s $\{(x, 0) \mid x \in A\} \subset A'$.*

(c) *Pro kvadrát normy na A' platí*

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in A.$$

(d) *Konjugace na A' splňuje*

$$\overline{(x, y)} = (\overline{x}, -y), \quad x, y \in A.$$

(e) *A' je komutativní právě tehdy, když $A = \mathbb{R}$.*

(f) *A' je asociativní právě tehdy, když A je komutativní a asociativní.*

(g) *A' je normovaná právě tehdy, když A je asociativní.*

Důkaz.

(a)–(c) Tvrzení plynou přímo z definice A'.

(d) Díky (b) můžeme každé $x \in A$ ztotožnit s $(x, 0) \in A'$. Všimněme si, že $\|(1, 0)\| = 1$. Pro $x, y \in A$ tedy máme

$$\begin{aligned}\overline{(x, y)} &= \operatorname{Re}(x, y) - \operatorname{Im}(x, y) = 2 \operatorname{Re}(x, y) - (x, y) \\ &= 2\langle (x, y), (1, 0) \rangle - (x, y) = 2\langle x, 1 \rangle - (x, y) = (2 \operatorname{Re} x - x, -y) \\ &= (\overline{x}, -y).\end{aligned}$$

(e)–(g) Viz [6, Corollary 6.27].

□

Nyní už zbývá jen vzít normovanou algebru reálných čísel $\mathbb{R}$ a opakovanou aplikací Cayleyho–Dicksonova procesu zkonstruovat normovanou algebru oktonionů $\mathbb{O}$.

V důkazu následujícího tvrzení vycházíme z [3, strana 12].

Tvrzení 3.19. *Cayleyho iterace $\mathbb{R}$ je algebra izomorfní $\mathbb{C}$. Cayleyho iterace $\mathbb{C}$ je algebra izomorfní $\mathbb{H}$.*

Důkaz. Definujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}' \to \mathbb{C}$ zadané na bázi $\mathbb{R}'$ předpisem $(1,0) \mapsto 1$, $(0,1) \mapsto i$. Jelikož $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}' = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a $(1,i)$ je báze $\mathbb{C}$, jde o izomorfismus vektorových prostorů. Podmínku $f(xy) = f(x)f(y)$ stačí ověřit pro dvojice prvků báze. Je-li jedním z daných prvků jednotka, podmínka triviálně platí. Zachovávání násobení tedy plyne z rovností

$$f((0,1)^2) = f((-1,0)) = -1 = i^2 = f((0,1))^2.$$

Zobrazení f je tedy izomorfismus algeber.

Analogicky definujme lineární zobrazení $g\colon \mathbb{C}' \to \mathbb{H}$ pomocí předpisu

$$(1,0) \mapsto 1, \qquad (i,0) \mapsto i, \qquad (0,1) \mapsto j, \qquad (0,i) \mapsto k.$$

Jelikož $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}' = 4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ a $(1,i,j,k)$ je báze $\mathbb{H}$, je g izomorfismus vektorových prostorů. Zachovávání násobení plyne z rovností

$$\begin{aligned}
g((i,0)(i,0)) = g((-1,0)) &= -1 = i \cdot i &= g((i,0))g((i,0)),\\
g((i,0)(0,1)) = g((0,i)) &= k = i \cdot j &= g((i,0))g((0,1)),\\
g((i,0)(0,i)) = g((0,-1)) &= -j = i \cdot k &= g((i,0))g((0,i)),\\
g((0,1)(i,0)) = g((0,-i)) &= -k = j \cdot i &= g((0,1))g((i,0)),\\
g((0,1)(0,1)) = g((-1,0)) &= -1 = j \cdot j &= g((0,1))g((0,1)),\\
g((0,1)(0,i)) = g((i,0)) &= i = j \cdot k &= g((0,1))g((0,i)),\\
g((0,i)(i,0)) = g((0,1)) &= j = k \cdot i &= g((0,i))g((i,0)),\\
g((0,i)(0,1)) = g((-i,0)) &= -i = k \cdot j &= g((0,i))g((0,1)),\\
g((0,i)(0,i)) = g((-1,0)) &= -1 = k \cdot k &= g((0,i))g((0,i)).
\end{aligned}$$

□

Definice 3.20. Algebrou *oktonionů* $\mathbb{O}$ nazýváme Cayleyho iteraci kvaternionů, tj. $\mathbb{O} = \mathbb{H}'$.

Poznámka 3.21. Z Příkladu 3.3 a Věty 3.18 plyne, že $\mathbb{H}$ je normovaná, nekomutativní, asociativní algebra. Definice 3.20 je tedy korektní a $\mathbb{O}$ je normovaná, nekomutativní, neasociativní algebra (opět podle Věty 3.18).

4. Moufangové rovina

Ve čtvrté kapitole se dostáváme ke klíčovému pojmu Moufangové roviny $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Geometrická motivace pro Moufangové rovinu je naznačena v úvodu práce. Nebudeme se zabývat příslušnou strukturou projektivní roviny, ale působením výjimečné jednoduché Lieovy grupy F_4 na Moufangové rovině. Zužitkujeme poznatky z předchozích tří kapitol, abychom dokázali tranzitivitu tohoto působení.

Většina této kapitoly vychází z článku [4]. Autoři se v něm zabývají částí komplexní Moufangové roviny, je tedy potřeba provést modifikaci pro reálný případ. Čerpáme také ze sekce o Moufangové (zde nazývané Cayleyho) rovině v [6, Chapter 14].

4.1 Základní pojmy

Úmluva 4.1. V této kapitole budou všechny vektorové prostory uvažovány nad tělesem $\mathbb{R}$. Značením $\mathrm{End}(V)$ tedy míníme $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, $\dim V$ znamená $\dim_{\mathbb{R}} V$, $V \otimes W$ znamená $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ a podobně.

Kvůli možné kolizi značení v Definici 4.2 budeme v této kapitole složení zobrazení f a g značit fg místo $f \circ g$.

Symbolem S_X označme grupu permutací na množině X. Je-li $\alpha : G \to S_X$ působení grupy G na množině X, pro $g \in G$ a $x \in X$ značíme hodnotu $\alpha(g)$ na x jako $\alpha(g)x$.

Definice 4.2. Pro matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}(n, \mathbb{O})$ označme $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=1}^n$. Stopu matice A značíme $\mathrm{Tr}\, A$, tj. $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Matici A nazveme *hermitovskou*, jestliže $A = \overline{A}^T$. Množina všech oktonionových hermitovských matic řádu n tvoří vektorový prostor

$$\mathrm{Herm}(n, \mathbb{O}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{O}) \mid \overline{A}^T = A\}.$$

Výjimečnou Jordanovou algebrou $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$ nazýváme vektorový prostor $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ s *Jordanovým součinem*

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}) \times \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}) &\to \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}), \\ (A, B) &\mapsto A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA). \end{aligned}$$

Grupu automorfismů algebry $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$ nazýváme F_4, tedy

$$F_4 = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})) \mid \forall A, B \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})\colon g(A \circ B) = (gA) \circ (gB)\}.$$

(Reálnou) Moufangové rovinou nazýváme množinu

$$\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}} = \{A \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}) \mid A^2 = A, \mathrm{Tr}\, A = 1\}.$$

Poznámka 4.3.

- $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} \middle|\, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{O} \right\}.$

- $J_3(\mathbb{O})$ je komutativní, neasociativní algebra s jednotkou I_3.
- Pro $A \in \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$ je $AA = A \circ A$, tedy výraz A^2 se dá interpretovat oběma způsoby.
- Prvky F_4 *zachovávají čtverce.* Je-li $g \in F_4$, potom

$$\forall A \in \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})\colon g(A^2) = (gA)^2. \tag{4.1}$$

Má-li naopak nějaký $g \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O}))$ vlastnost (4.1), potom pro libovolná $A, B \in \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$ platí

$$\begin{aligned}&(gA)^2 + (gA)(gB) + (gB)(gA) + (gB)^2 = (g(A+B))^2\\ &= g((A+B)^2) = g(A^2) + g(AB+BA) + g(B^2).\end{aligned}$$

Díky rovnostem $g(A^2) = (gA)^2$, $g(B^2) = (gB)^2$ dostáváme $(gA) \circ (gB) = g(A \circ B)$, tedy $g \in F_4$.

- Podle spektrální věty je komplexní čtvercová matice A hermitovská právě tehdy, když je unitárně diagonalizovatelná a její vlastní čísla jsou reálná. Podmínka $A^2 = A$ dále vynucuje, že vlastní čísla mohou být pouze 0 a 1. Podmínka $\mathrm{Tr}\,A = 1$ potom implikuje, že vlastní číslo 1 má násobnost 1. Prvky Moufangové roviny lze tedy chápat jako zobecnění matic reprezentujících ortogonální projekce na jednorozměrné prostory.

4.2 Působení grupy F_4 na Moufangové rovině

Následující lemma a tvrzení jsou uvedena v [4, Subsection 2.3]. Uvádíme je v přesnější podobě a doplňujeme jejich důkazy.

Lemma 4.4. *Nechť* $A \in \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$. *Definujme lineární zobrazení*

$$\begin{aligned}J_A\colon \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O}) &\to \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O}),\\ B &\mapsto A \circ B.\end{aligned}$$

Potom $\mathrm{Tr}\,A = \frac{1}{9}\,\mathrm{Tr}\,J_A$.

Důkaz. Pro $i \in \{1,2,3\}$ označme $E_{i,i}$ matici s jedničkou na pozici (i,i) a nulou na ostatních pozicích. Pro $u \in \mathbb{O}$ uvažujme matice

$$F_u = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&u\\0&\overline{u}&0\end{pmatrix},\quad G_u = \begin{pmatrix}0&0&\overline{u}\\0&0&0\\u&0&0\end{pmatrix},\quad H_u = \begin{pmatrix}0&u&0\\\overline{u}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Nechť $(u_1,\dots,u_8)$ je libovolná báze $\mathbb{O}$. Snadno vidíme, že

$$B = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, F_{u_1},\dots,F_{u_8}, G_{u_1},\dots,G_{u_8}, H_{u_1},\dots,H_{u_8})$$

je báze $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$. Nechť

$$B^* = (e^{1,1}, e^{2,2}, e^{3,3}, f^{u_1},\dots,f^{u_8}, g^{u_1},\dots,g^{u_8}, h^{u_1},\dots,h^{u_8})$$

je duální báze k B. Konečně nechť

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}).$$

Předpokládejme, že $x_i = \sum_{j=1}^{8} a_{ij} u_j$, $i = 1, 2, 3$, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$A = \sum_{i=1}^{3} r_i E_{i,i} + \sum_{j=1}^{8} (a_{1j} F_{u_j} + a_{2j} G_{u_j} + a_{3j} H_{u_j}).$$

Hodnoty prvků B^* na matici A jsou tedy následující:

$$e^{i,i}(A) = r_i, \qquad f^{u_j}(A) = a_{1j}, \qquad g^{u_j}(A) = a_{2j}, \qquad h^{u_j}(A) = a_{3j}$$

pro všechna $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, \dots, 8\}$. Toto pozorování využijeme pro různé hermitovské matice v následujících výpočtech.

Přímočaře spočteme

$$J_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} r_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \frac{1}{2} x_3 & \frac{1}{2} \overline{x_2} \\ \frac{1}{2} \overline{x_3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $e^{1,1}(J_A(E_{1,1})) = r_1$. Analogicky $e^{2,2}(J_A(E_{2,2})) = r_2$, $e^{3,3}(J_A(E_{3,3})) = r_3$. Dále pro $i = 1, \dots, 8$ platí

$$\begin{aligned} J_A(F_{u_i}) &= \begin{pmatrix} r_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_i \\ 0 & \overline{u_i} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \overline{x_2}\,\overline{u_i} & x_3 u_i \\ u_i x_2 & x_1 \overline{u_i} + u_i \overline{x_1} & (r_2 + r_3) u_i \\ \overline{u_i}\,\overline{x_3} & (r_2 + r_3) \overline{u_i} & \overline{x_1} u_i + \overline{u_i} x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a tak

$$f^{u_i}(J_A(F_{u_i})) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3).$$

Analogicky

$$g^{u_i}(J_A(G_{u_i})) = \frac{1}{2}(r_1 + r_3), \qquad h^{u_i}(J_A(H_{u_i})) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, J_A &= r_1 + r_2 + r_3 + 8 \cdot \frac{1}{2}(r_2 + r_2) + 8 \cdot \frac{1}{2}(r_1 + r_3) + 8 \cdot \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \\ &= 9(r_1 + r_2 + r_3) = 9\, \mathrm{Tr}\, A. \end{aligned}$$

□

Tvrzení 4.5. *Působení F_4 na* $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ *zachovává stopu, tj. pro libovolná $g \in F_4$ a $A \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ platí* $\mathrm{Tr}(gA) = \mathrm{Tr}\, A$.

Důkaz. Nechť $A \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ a $g \in F_4$. Díky Lemmatu 4.4 stačí ukázat, že $\operatorname{Tr} J_A = \operatorname{Tr} J_{gA}$. Pro každé $B \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ platí

$$J_{gA}(B) = (gA) \circ B = (gA) \circ g(g^{-1}B) = g(A \circ (g^{-1}B)) = g(J_A(g^{-1}B)).$$

Dostáváme rovnost $J_{gA} = gJ_Ag^{-1}$, z níž už plyne

$$\operatorname{Tr} J_{gA} = \operatorname{Tr}(gJ_Ag^{-1}) = \operatorname{Tr}(g^{-1}gJ_A) = \operatorname{Tr} J_A$$

díky cykličnosti stopy. □

Důsledek 4.6. *Moufangové rovina je uzavřená na působení grupy F_4, tj.*

$$\forall A \in \mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}\ \forall g \in F_4 \colon gA \in \mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}.$$

Důkaz. Nechť $A \in \mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$, $g \in F_4$. Podle Poznámky 4.3 platí $(gA)^2 = g(A^2) = gA$. Díky Tvrzení 4.5 máme $\operatorname{Tr}(gA) = \operatorname{Tr} A = 1$. □

Poznámka 4.7. Působení grupy F_4 na množině $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ můžeme podle Důsledku 4.6 zúžit na množinu $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$, protože $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$ s každým svým prvek obsahuje i celou příslušnou F_4-orbitu.

4.3 Realizace algeber $C(\mathbb{O}, N)$ a $C(\mathbb{V}_9, N')$

Definice 4.8. Definujme negativně definitní kvadratickou formu

$$\begin{aligned} N \colon \mathbb{O} &\to (-\infty, 0], \\ u &\mapsto -\|u\| = -u\overline{u}. \end{aligned}$$

Poznámka 4.9. Nechť $\pi_i \colon \mathbb{O}^2 \to \mathbb{O}$ značí i-tou kanonickou projekci a $\nu_i \colon \mathbb{O} \to \mathbb{O}^2$ značí i-té kanonické vnoření, $i = 1, 2$. Potom zobrazení

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(\mathbb{O}^2) &\to \mathrm{M}(2, \mathrm{End}(\mathbb{O})), \\ f &\mapsto \begin{pmatrix} \pi_1 f \nu_1 & \pi_1 f \nu_2 \\ \pi_2 f \nu_1 & \pi_2 f \nu_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

je izomorfismus asociativních algeber $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$ a $\mathrm{M}(2, \mathrm{End}(\mathbb{O}))$, jak lze snadno ověřit. Ve zbytku práce je budeme ztotožňovat. Aplikace f na prvek $\mathbb{O}^2$ potom odpovídá „násobení“ matice krát vektor. Přesněji řečeno při tomto ztotožnění máme pro $A, B, C, D \in \mathrm{End}(\mathbb{O})$ a $u, v \in \mathbb{O}$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) + B(v) \\ C(u) + D(v) \end{pmatrix}.$$

Důkaz následujícího lemmatu je podrobnější verzí důkazu z [4, Lemma 3.1.1].

Lemma 4.10. *Lineární zobrazení*

$$\begin{aligned} \mu \colon \mathbb{O} &\to \mathrm{End}(\mathbb{O}^2), \\ u &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & L_u \\ -L_{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lze právě jedním způsobem rozšířit na izomorfismus Cliffordovy algebry $C(\mathbb{O}, N)$ a $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$.

Důkaz. Pro každé $u \in \mathbb{O}$ máme

$$\mu(u)^2 = \begin{pmatrix} 0 & L_u \\ -L_{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L_u \\ -L_{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_u L_{\overline{u}} & 0 \\ 0 & -L_{\overline{u}} L_u \end{pmatrix} = N(u) I_2.$$

Při výpočtu jsme použili Artinovu větu (Věta 3.14). Je tedy splněn vztah (1.1) a podle definice Cliffordovy algebry existuje právě jeden homomorfismus algeber $h\colon C(\mathbb{O}, N) \to \mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$ rozšiřující μ. Podle Věty 1.33 je $C(\mathbb{O}, N) \cong \mathrm{M}(16, \mathbb{R})$ jednoduchá, tudíž $\operatorname{Ker} h = C(\mathbb{O}, N)$ nebo $\operatorname{Ker} h = 0$. V prvním případě by h, a tedy i μ, bylo nulové zobrazení, což je spor s definicí μ. Homomorfismus h je tedy prostý. Jelikož $\dim \mathbb{O}^2 = 16$, platí $\dim \mathrm{End}(\mathbb{O}^2) = 16^2 = \dim C(\mathbb{O}, N)$. Tím je dokázána surjektivita h. □

Definice 4.11. Definujme vektorový prostor $\mathbb{V}_9 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{O}$ a na něm negativně definitní kvadratickou formu $N'\colon \mathbb{V}_9 \to (-\infty, 0]$ danou předpisem

$$N'((r, u)) = -r^2 + N(u) = -r^2 - \|u\|, \quad (r, u) \in \mathbb{V}_9.$$

Dále definujme lineární zobrazení $\kappa\colon \mathbb{V}_9 \to \mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes \mathbb{C}$ jako

$$\kappa((r, u)) = \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\overline{u}} & -r \end{pmatrix} \otimes i, \quad (r, u) \in \mathbb{V}_9.$$

Důkaz následujícího tvrzení je podrobnější verzí důkazu z [4, Proposition 3.1.2].

Tvrzení 4.12. *Zobrazení κ lze právě jedním způsobem rozšířit na izomorfismus algeber $C(\mathbb{V}_9, N')$ a $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes \mathbb{C}$.*

Důkaz. Pro každé $(r, u) \in \mathbb{V}_9$ platí

$$\kappa((r, u))^2 = \left[\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\overline{u}} & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\overline{u}} & -r \end{pmatrix} \right] \otimes (-1) = N'((r, u)) I_2 \otimes 1.$$

Je tedy splněn vztah (1.1) a podle definice Cliffordovy algebry existuje právě jeden homomorfismus algeber $h\colon C(\mathbb{V}_9, N') \to \mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes \mathbb{C}$ rozšiřující κ.

Pro každé $u \in \mathbb{O}$ máme

$$\begin{aligned} h((-1,0)(0,u)) &= h((-1,0))h((0,u)) = \kappa((-1,0))\kappa((0,u)) \\ &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L_u \\ L_{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} \right] \otimes (-1) = \begin{pmatrix} 0 & L_u \\ -L_{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 = \mu(u) \otimes 1. \end{aligned}$$

Platí tedy $\mu(u) \otimes 1 \in \operatorname{Im} h$. Z důkazu Lemmatu 4.10 plyne, že množina $\operatorname{Im} \mu$ generuje algebru $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$. Dostáváme tak $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes 1 \subset \operatorname{Im} h$. Dále pro A, B, C, $D \in \mathrm{End}(\mathbb{O})$ máme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes i = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes i \right]}_{\kappa((1,0))} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} \otimes 1 \right]}_{\in \mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes 1} \in \operatorname{Im} h.$$

Tím je dokázána surjektivita h. Přitom

$$\dim C(\mathbb{V}_9, N') = 2^9 = 16^2 \cdot 2 = \dim(\mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes \mathbb{C}),$$

tedy h je izomorfismus. □

Poznámka 4.13. Vektorové prostory $\mathbb{R}^9$ a $\mathbb{V}_9$ jsou izomorfní. Kvadratické formy $(\mathbb{R}^9, Q_{0,9})$ a $(\mathbb{V}_9, N')$ jsou obě negativně definitní, tedy jsou izometrické. Dále je budeme ztotožňovat. Potom můžeme také ztotožnit $C(0,9) = C(\mathbb{V}_9, N')$. Analogicky ztotožněme $C(0,8) = C(\mathbb{O}, N)$.

Definice 4.14. V návaznosti na Poznámku 4.13 můžeme označit

$$\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N') = \mathrm{Spin}(0,9), \qquad \mathrm{Spin}(\mathbb{O}, N) = \mathrm{Spin}(0,8).$$

Poznámka 4.15. Uvažme izomorfismus h z důkazu Tvrzení 4.12. Lze snadno nahlédnout, že

$$\begin{aligned} h(C^+(\mathbb{V}_9, N')) &= \mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes 1 \cong \mathrm{End}(\mathbb{O}^2), \\ h(\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')) &\subset \mathrm{Aut}(\mathbb{O}^2) \otimes 1 \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{O}^2). \end{aligned}$$

V prvním případě jde o izomorfismus algeber a ve druhém o izomorfismus grup. Ztotožníme-li $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes 1$ s $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$ a $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}^2) \otimes 1$ s $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}^2)$, můžeme zavést následující definici.

Definice 4.16. Zúžení

$$h|_{C^+(\mathbb{V}_9, N')} \colon C^+(\mathbb{V}_9, N') \to \mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$$

izomorfismu h z důkazu Tvrzení 4.12 nazýváme *spinorovou reprezentací algebry* $C^+(\mathbb{V}_9, N')$. Zúžení

$$\xi_S = h|_{\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')} \colon \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N') \to \mathrm{Aut}(\mathbb{O}^2)$$

nazýváme *spinorovou reprezentací grupy* $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$. Prvky $\mathbb{O}^2$ v tomto kontextu nazýváme *spinory.*

Poznámka 4.17.

- Pro více informací o obecných spinorových reprezentacích viz například [6, Chapter 11].
- Ve zbytku práce budeme algebry $C(\mathbb{O}, N)$ a $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$ ztotožňovat. Dále ztotožníme algebry $C(\mathbb{V}_9, N')$ a $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes \mathbb{C}$. Tím také ztotožníme grupu $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ s jejím obrazem $\xi_S(\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N'))$ a podobně.

Důkaz následujícího lemmatu byl převzat z [4, Lemma 3.1.3] a doplněn o podrobnosti.

Lemma 4.18. *Pro* $(r, u) \in \mathbb{V}_9$, $N'((r, u)) = -1$ *označme*

$$g_{r,u} = \begin{pmatrix} r & -L_u \\ L_{\overline{u}} & r \end{pmatrix} \otimes 1.$$

Potom množina

$$\{g_{r,u} \mid (r, u) \in \mathbb{V}_9, N'((r, u)) = -1\} \tag{4.2}$$

generuje grupu $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$.

Důkaz. Grupa $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ je generovaná množinou

$$\{\kappa((r,u))\kappa((s,v)) \mid N'((r,u)) = N'((s,v)) = -1\}.$$

Označme G grupu generovanou množinou (4.2). Pro $(r,u),(s,v) \in \mathbb{V}_9$ splňující $N'((r,u)) = N'((s,v)) = -1$ platí

$$\begin{aligned}\kappa((r,u))\kappa((-1,0)) &= \left[\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\overline{u}} & -r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] \otimes (-1) = \begin{pmatrix} r & -L_u \\ L_{\overline{u}} & r\end{pmatrix} \otimes 1 \\ &= g_{r,u},\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} g_{r,u}g_{-s,v} &= \left[\begin{pmatrix} r & -L_u \\ L_{\overline{u}} & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & -L_v \\ L_{\overline{v}} & -s\end{pmatrix}\right] \otimes 1 \\ &= \begin{pmatrix} -rs - L_uL_{\overline{v}} & sL_u - rL_v \\ -sL_{\overline{u}} + rL_{\overline{v}} & -rs - L_{\overline{u}}L_v\end{pmatrix} \otimes 1 \\ &= \left[\begin{pmatrix} r & L_u \\ L_{\overline{u}} & -r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & L_v \\ L_{\overline{v}} & -s\end{pmatrix}\right] \otimes (-1) = \kappa((r,u))\kappa((s,v)).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ze vztahu (4.3) plyne, že G je dobře definovaná (generátory jsou invertibilní, viz důkaz Tvrzení 4.12) a $G \subseteq \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$. Jelikož $N'((-s,v)) = N'((s,v)) = -1$, vztah (4.4) dává opačnou inkluzi. □

Poznámka 4.19. Při ztotožnění algeber $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2) \otimes 1$ a $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$ platí

$$g_{r,u} = \begin{pmatrix} r & -L_u \\ L_{\overline{u}} & r\end{pmatrix}, \qquad g_{0,u} = \begin{pmatrix} 0 & -L_u \\ L_{\overline{u}} & 0\end{pmatrix} = -\mu(u).$$

4.4 Reprezentace grupy $\mathrm{Spin}(V_9, N')$

Definice 4.20. Označme $\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})$ podprostor $\mathrm{Herm}(2,\mathbb{O})$ sestávající ze všech bezestopých matic, tj.

$$\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O}) = \{A \in \mathrm{Herm}(2,\mathbb{O}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

Uvažme rovnost

$$\begin{pmatrix} r_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\ x_1 & r_2 & x_3 \\ x_2 & \overline{x_3} & r_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \overline{x_1} & \overline{x_2} \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & x_3 \\ 0 & \overline{x_3} & -s\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

kde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{O}$, $s = \frac{1}{2}(r_2 - r_3)$, $t = \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$. Zobrazení definované předpisem

$$\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{O}^2 \oplus \mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O}) \oplus \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} r_1 & \overline{x_1} & \overline{x_1} \\ x_1 & r_2 & x_3 \\ x_2 & \overline{x_3} & r_3\end{pmatrix} \mapsto \left(r_1, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & x_3 \\ \overline{x_3} & -s\end{pmatrix}, t\right)$$

je izomorfismus vektorových prostorů. Ty budeme ve zbytku práce ztotožňovat.

Definice 4.21. Sčítance na pravé straně (4.5) interpretujeme po řadě jako prvky $\mathbb{R}$, $\mathbb{O}^2$, $\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})$ a $\mathbb{R}$. Nazýváme je po řadě *první skalární částí*, *spinorovou částí*, *vektorovou částí* a *druhou skalární částí* matice na levé straně (4.5).

Vektorovou reprezentací grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ rozumíme grupový homomorfismus $\rho_V\colon \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')\to \mathrm{Aut}(\kappa(\mathbb{V}_9))$ definovaný předpisem

$$\rho_V(g)v = gvg^{-1}, \quad g\in \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N'), v\in\kappa(\mathbb{V}_9).$$

Dále pro izomorfismus vektorových prostorů

$$\begin{aligned} \phi\colon \kappa(\mathbb{V}_9) &\to \mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O}),\\ \kappa((s,x)) = \begin{pmatrix} s & L_x\\ L_{\overline{x}} & -s\end{pmatrix}\otimes i &\mapsto \begin{pmatrix} s & x\\ \overline{x} & -s\end{pmatrix}\end{aligned}$$

definujeme reprezentaci ξ_V grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ na $\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})$ předpisem

$$\begin{aligned}\xi_V\colon \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N') &\to \mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})),\\ g&\mapsto \phi\rho_V(g)\phi^{-1}.\end{aligned}$$

Přidáme-li ke ξ_S a ξ_V triviální reprezentaci $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ na $\mathbb{R}$ (danou předpisem $g\mapsto \mathrm{id}$), dostáváme reprezentaci ξ grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ na $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{O}^2\oplus\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})\oplus\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\xi\colon \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N') &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\oplus\mathbb{O}^2\oplus\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})\oplus\mathbb{R}),\\ g&\mapsto ((a,b,c,d)\mapsto(a,\xi_S(g)b,\xi_V(g)c,d)).\end{aligned}$$

Poznámka 4.22.

- Generátory $g_{r,u}$ grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ působí pomocí reprezentace ξ_S následovně:

$$\xi_S(g_{r,u})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -L_u\\ L_{\overline{u}} & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1-ux_2\\ \overline{u}x_1+rx_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{O}^2. \tag{4.6}$$

- Uvažme izomorfismy vektorových prostorů

$$\mathbb{V}_9 \overset{\kappa}{\cong} \kappa(\mathbb{V}_9)\overset{\phi}{\cong}\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O}).$$

  Přeneseme-li pomocí κ a ϕ kvadratickou formu N' na $\kappa(\mathbb{V}_9)$ a $\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O})$, dostaneme formy

$$\begin{aligned} N'\kappa^{-1}\colon \kappa(\mathbb{V}_9) &\to (-\infty,0],\\ \begin{pmatrix} r & L_u\\ L_{\overline{u}} & -r\end{pmatrix}\otimes i &\mapsto N'((r,u)),\quad (r,u)\in\mathbb{V}_9\end{aligned}$$

  a

$$\begin{aligned} N'\kappa^{-1}\phi^{-1}\colon \mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O}) &\to (-\infty,0],\\ \begin{pmatrix} s & x\\ \overline{x} & -s\end{pmatrix} &\mapsto N'((s,x)),\quad (s,x)\in\mathbb{V}_9.\end{aligned}$$

V Poznámkách 4.13 a 4.17 jsme ztotožnili

$$C(0,9) = C(\mathbb{V}_9, N') = C(\kappa(V_9), N'\kappa^{-1}).$$

Ztotožněme tyto algebry dále s $C(\mathrm{Herm}_0(2,\mathbb{O}), N'\kappa^{-1}\phi^{-1})$.

Z rovností (2.3) plyne, že pro $x \in \mathrm{Spin}(0,9)$ je $x^{-1} = \gamma(x)$, kde γ značí reverzi na algebře $C(0,9)$. Vidíme tedy, že reprezentace ρ_V a ξ_V odpovídají zobrazení $\lambda_{0,9}$ (viz Definici 2.10). Jde o ekvivalentní reprezentace grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$.

Následující lemma je modifikací lemmatu z [4, Lemma 2.2.1]. Doplňujeme jeho důkaz, který objasňuje význam kapitoly 2 této práce.

Lemma 4.23. *Nechť* $(s,x) \in \mathbb{V}_9$. *Potom existuje* $g \in \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ *takové, že* $\xi_V(g)\begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix}$ *je diagonální matice.*

Důkaz. Grupa SO(9) působí tranzitivně na každé sféře v $\mathbb{R}^9$ se středem v počátku. Podle Věty 2.12 je $\lambda_{0,9}|_{\mathrm{Spin}(0,9)} \colon \mathrm{Spin}(0,9) \to \mathrm{SO}(9)$ surjektivní homomorfismus grup. Indukuje tedy tranzitivní působení grupy $\mathrm{Spin}(0,9)$ na těchto sférách. Podle Poznámky 4.22 tomu odpovídá fakt, že ξ_V indukuje tranzitivní působení grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ na množinách tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix} \,\middle|\, (s,x) \in \mathbb{V}_9, N'((s,x)) = a \right\},$$

kde $a \in (-\infty, 0]$. Speciálně pro každé $(s,x) \in \mathbb{V}_9$ existuje $g \in \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ takové, že

$$\xi_V(g)\begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-N((s,x))} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-N((s,x))} \end{pmatrix}.$$

□

Dále ukážeme, že reprezentace ξ_V a ξ přiřazují každému prvku $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ zobrazení, která lze v jistém smyslu chápat jako „konjugace“ daným prvkem. Důkazy následujících dvou lemmat jsou podrobnějšími verzemi důkazů z [4, Lemma 3.2.1, Proposition 3.2.2].

Lemma 4.24. *Nechť* $(r,u),(s,x) \in \mathbb{V}_9$, $N'((r,u)) = -1$. *Potom*

$$\begin{aligned} \xi_V(g_{r,u})\begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s(r^2+N(u)) - 2r\langle u,x\rangle & 2rsu + r^2x - u\overline{x}u \\ 2rs\overline{u} + r^2\overline{x} - \overline{u}x\overline{u} & -s(r^2+N(u)) + 2r\langle u,x\rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Důkaz. Snadno spočteme

$$g_{r,u}g_{r,-u} = \left[\begin{pmatrix} r & -L_u \\ L_{\overline{u}} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & L_u \\ -L_{\overline{u}} & r \end{pmatrix}\right] \otimes 1 = -N'((r,u))I_2 \otimes 1 = I_2 \otimes 1,$$

tedy $g_{r,u}^{-1} = g_{r,-u}$. Dostáváme tak

$$\rho_V(g_{r,u})\kappa((s,x)) = g_{r,u}\kappa((s,x))g_{r,u}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} r & -L_u \\ L_{\overline{u}} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & L_x \\ L_{\overline{x}} & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & L_u \\ -L_{\overline{u}} & r \end{pmatrix}\right] \otimes i$$
$$= \left[\begin{pmatrix} rs - L_u L_{\overline{x}} & sL_u + rL_x \\ sL_{\overline{u}} + rL_{\overline{x}} & -rs + L_{\overline{u}}L_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & L_u \\ -L_{\overline{u}} & r \end{pmatrix}\right] \otimes i$$
$$= \begin{pmatrix} s(r^2 + N(u)) - r(L_u L_{\overline{x}} + L_x L_{\overline{u}}) & 2rsL_u + r^2 L_x - L_u L_{\overline{x}} L_u \\ 2rsL_{\overline{u}} + r^2 L_{\overline{x}} - L_{\overline{u}} L_x L_{\overline{u}} & -s(r^2 + N(u)) + r(L_{\overline{u}} L_x + L_{\overline{x}} L_u) \end{pmatrix} \otimes i.$$

Díky Lemmatu 3.9 a Moufangové identit (Tvrzení 3.16) máme rovnosti

$$\begin{aligned} L_u L_{\overline{x}} + L_x L_{\overline{u}} &= 2\langle u, x\rangle, \\ L_{\overline{u}} L_x + L_{\overline{x}} L_u &= 2\langle \overline{u}, \overline{x}\rangle = 2\langle u, x\rangle, \\ L_u L_{\overline{x}} L_u &= L_{u\overline{x}u}, \\ L_{\overline{u}} L_x L_{\overline{u}} &= L_{\overline{u}x\overline{u}}. \end{aligned}$$

Dále tedy můžeme psát

$$\rho_V(g_{r,u})\kappa((s,x)) = \begin{pmatrix} s(r^2 + N(u)) - 2r\langle u, x\rangle & L_{2rsu + r^2 x - u\overline{x}u} \\ L_{2rs\overline{u} + r^2\overline{x} - \overline{u}x\overline{u}} & -s(r^2 + N(u)) + 2r\langle u, x\rangle \end{pmatrix} \otimes i.$$

Dokazované tvrzení dostáváme aplikací izomorfismu ϕ na tuto rovnost. □

Lemma 4.25. *Pro $(r,u) \in \mathbb{V}_9$, $N'((r,u)) = -1$ označme*

$$G_{r,u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & -u \\ 0 & \overline{u} & r \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}).$$

Potom $G_{r,u}^{-1} = G_{r,-u}$ a pro každé $A \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ platí

$$\xi(g_{r,u})A = G_{r,u} A G_{r,u}^{-1}.$$

Důkaz. Zřejmě

$$G_{r,u}G_{r,-u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & -u \\ 0 & \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & u \\ 0 & -\overline{u} & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -N'((r,u)) & 0 \\ 0 & 0 & -N'((r,u)) \end{pmatrix} = I_3,$$

tedy $G_{r,u}^{-1} = G_{r,-u}$.

Nechť $A \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & \overline{y_1} & \overline{y_2} \\ y_1 & s_2 & y_3 \\ y_2 & \overline{y_3} & s_3 \end{pmatrix}.$$

Proveďme násobení matic po blocích:

$$(G_{r,u}A)G_{r,u}^{-1} = \left[\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & -u \\ 0 & \overline{u} & r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} s_1 & \overline{y_1} & \overline{y_2} \\ \hline y_1 & s_2 & y_3 \\ y_2 & \overline{y_3} & s_3 \end{array}\right)\right]\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & u \\ 0 & -\overline{u} & r \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} s_1 & \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 & y_3 \\ \overline{y_3} & s_3 \end{pmatrix} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & u \\ 0 & -\overline{u} & r \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} s_1 & \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \left[\begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 & y_3 \\ \overline{y_3} & s_3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Podle Poznámky 4.22 máme

$$\xi_S(g_{r,u})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Spinorová a první skalární část matice A se tedy transformovaly správně. Pro $s = \frac{1}{2}(s_2 - s_3)$ a $t = \frac{1}{2}(s_2 + s_3)$ platí

$$\left[\begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 & y_3 \\ \overline{y_3} & s_3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} s & y_3 \\ \overline{y_3} & -s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right]\right]\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & y_3 \\ \overline{y_3} & -s \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} r & -u \\ \overline{u} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r & u \\ -\overline{u} & r \end{pmatrix}$$

$$\overset{(4.7)}{=} \xi_V(g_{r,u})\begin{pmatrix} s & y_3 \\ \overline{y_3} & -s \end{pmatrix} - tN'((r,u))I_2 = \xi_V(g_{r,u})\begin{pmatrix} s & y_3 \\ \overline{y_3} & -s \end{pmatrix} + tI_2.$$

Tedy i vektorová a druhá skalární část se transformovaly správně. Z výpočtu lze navíc vidět, že výsledek nezáleží na uzávorkování výrazu $G_{r,u}AG_{r,u}^{-1}$. □

Připomeňme definici věrné reprezentace. Reprezentace $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ grupy G na vektorovém prostoru V je *věrná*, je-li zobrazení α prosté.

Důkaz následujícího tvrzení je uveden v [4, Proposition 3.2.2]. Není ovšem zřejmé, jak přesně provést poslední krok s „přeuzávorkováním“ součinu matic pomocí polarizované identity. Uvádíme tedy část námi upraveného, technického důkazu.

Tvrzení 4.26. *Reprezentace ξ je věrná a zachovává Jordanův součin. Grupa*

$$\operatorname{Im}\xi \cong \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$$

je tedy podgrupa F_4.

Náznak důkazu. Jelikož ξ_S je věrná reprezentace, ξ je také věrná.

Nechť $(r,u) \in \mathbb{V}_9$, $N'((r,u)) = -1$ a $A \in \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$. Označme $g = g_{r,u}$ a $G = G_{r,u}$. Díky Poznámce 4.3 stačí ukázat, že

$$(\xi(g)A)^2 = (GAG^{-1})(GAG^{-1}) = G(A(GG^{-1})A)G^{-1} = \xi(g)(A^2). \tag{4.8}$$

Začněme drobným pozorováním. Nechť $B \in \mathrm{M}(3,\mathbb{R})$ a $C \in \mathrm{M}(3,\mathbb{O})$. Všimněme si, že prvky matic G a G^{-1} jsou prvky podalgebry s jednotkou algebry $\mathbb{O}$ generované prvkem u. Z Artinovy věty dostáváme

$$
\begin{aligned}
((GBG^{-1})(GCG^{-1}))_{ab} &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^{3} (G_{ai}B_{ij}G^{-1}_{jk})(G_{kl}C_{lm}G^{-1}_{mb}) \\
&= \sum_{i,j,k,l,m=1}^{3} G_{ai}(B_{ij}(G^{-1}_{jk}G_{kl})C_{lm})G^{-1}_{mb} \\
&= (G(A(G^{-1}G)B)G^{-1})_{ab}
\end{aligned}
$$

pro všechna $a, b \in \{1, 2, 3\}$, kde X_{pq} značí prvek na pozici (p, q) v matici X. Hodnoty výrazů $G_{ai}B_{ij}G^{-1}_{jk}G_{kl}C_{lm}G^{-1}_{mb}$ totiž nezávisí na uzávorkování právě díky Artinově větě. Tím jsme dokázali rovnost $(GBG^{-1})(GCG^{-1}) = G(BC)G^{-1}$. Analogicky lze dokázat rovnost $(GCG^{-1})(GBG^{-1}) = G(CB)G^{-1}$.

Uvažme rozklad $A = B + C$, kde B je diagonální matice se stejnými prvky na hlavní diagonále jako A (pročež C má na hlavní diagonále nuly). Dosazením do (4.8), použitím distributivnosti a využitím předchozího pozorování dostáváme, že (4.8) je ekvivalentní rovnosti

$$
(GCG^{-1})(GCG^{-1}) = G(CC)G^{-1}. \tag{4.9}
$$

Mějme

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y_2} \\ \overline{y_3} & 0 & y_1 \\ y_2 & \overline{y_1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(3,\mathbb{O}).
$$

Zbývá přímočarým vynásobením (s využitím výpočtu v důkazu Lemmatu 4.25) ověřit (4.9). To je proveditelné, ovšem pracné. Díky hermitovskosti matic na obou stranách (4.9) stačí ověřit například rovnost prvků na hlavní diagonále a pod ní. Uvádíme pouze náznak ověření rovnosti prvků na dvou pozicích, ostatní případy lze provést analogicky.

Pro pozici $(2, 1)$ máme

$$
\begin{aligned}
((GCG^{-1})(GCG^{-1}))_{21} &= -r^2(u\overline{y_1})\overline{y_3} - r^2(y_1\overline{u})\overline{y_3} + r^2 y_1(\overline{u}\,\overline{y_3}) - (u\overline{y_1}u)(\overline{u}\,\overline{y_3}) + \\
&\quad + r(u\overline{y_1})(uy_2) + r(y_1\overline{u})(uy_2) - r(u\overline{y_1}u)y_2 + r^3 y_1 y_2 \\
&= -r^2(2\langle u, y_1\rangle\overline{y_3} - y_1(\overline{u}\,\overline{y_3})) - u(\overline{y_1}(u\overline{u}\,\overline{y_3})) + \\
&\quad + r(2\langle u, y_1\rangle uy_2 - u(\overline{y_1}(uy_2)) + r^2 y_1 y_2) \\
&= -(r^2 + \|u\|)u(\overline{y_1}\,\overline{y_3}) + r(y_1(\overline{u}uy_2) + r^2 y_1 y_2) \\
&= -u(\overline{y_1}\,\overline{y_3}) + ry_1y_2 = (G(CC)G^{-1})_{21}.
\end{aligned}
$$

První a poslední rovnost lze odvodit přímočarým vynásobením matic. Ve druhé rovnosti jsme využili Lemma 3.9 a Větu 3.16. Třetí a čtvrtá rovnost využívají také Lemma 3.9 a čtvrtá navíc rovnost $N'((r, u)) = -1$. Při celém výpočtu používáme Artinovu větu k vynechávání zbytečných závorek.

Důkaz rovnosti na pozici (2, 2) je analogický. Jediná nová myšlenka se objeví ve vypočtu

$$
-r\overline{y_3}(\overline{y_2}\,\overline{u}) - r(uy_2)y_3 = -2r\langle uy_2, \overline{y_3}\rangle = -2r\langle u, \overline{y_3}\,\overline{y_2}\rangle = -ru(y_2y_3) - r(\overline{y_3}\,\overline{y_2})\overline{u},
$$

kde využíváme Lemma 3.8 a Lemma 3.9. $\square$

4.5 Reprezentace grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{O}, N)$

Nyní nalezneme množinu generátorů $\mathrm{Spin}(\mathbb{O}, N)$ a popíšeme jejich působení pomocí reprezentací ξ_S, ξ_V podobně, jako jsme to udělali pro $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, V')$. Důkaz následujícího lemmatu byl převzat z [4, Subsection 3.3] a doplněn o podrobnosti.

Lemma 4.27. *Grupa* $\mathrm{Spin}(\mathbb{O}, N)$ *je generovaná množinou*

$$\left\{ \begin{pmatrix} L_u L_{\overline{v}} & 0 \\ 0 & L_{\overline{u}} L_v \end{pmatrix} \middle| \, u,v \in \mathbb{O}, N(u) = N(v) = -1 \right\} \subset \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N'),$$

a tedy je podgrupou $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$*. Tyto generátory* $\mathrm{Spin}(\mathbb{O}, N)$ *působí pomocí reprezentací* ξ_S*,* ξ_V *následovně:*

$$\xi_S \left(\begin{pmatrix} L_u L_{\overline{v}} & 0 \\ 0 & L_{\overline{u}} L_v \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\overline{v} x_1) \\ \overline{u}(v x_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}^2,$$

$$\xi_V \left(\begin{pmatrix} L_u L_{\overline{v}} & 0 \\ 0 & L_{\overline{u}} L_v \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & u(\overline{v} x \overline{v}) u \\ \overline{u}(v \overline{x} v) \overline{u} & -s \end{pmatrix}, \quad (s, x) \in \mathbb{V}_9.$$

Důkaz. Grupa $\mathrm{Spin}(\mathbb{O}, N)$ je generovaná součiny tvaru

$$\mu(u)\mu(v) = g_{0,u} g_{0,v} = \begin{pmatrix} 0 & -L_u \\ L_{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -L_v \\ L_{\overline{v}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_u L_{\overline{v}} & 0 \\ 0 & -L_{\overline{u}} L_v \end{pmatrix},$$

kde $u, v \in \mathbb{O}$, $N(u) = N(v) = -1$ (viz Lemma 4.10 a Poznámku 4.19). Přitom $g_{0,u} g_{0,v} \in \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$. Nahradíme-li u za $-u$, dostaneme první část tvrzení.

Pro $(x_1, x_2) \in \mathbb{O}^2$ máme

$$\xi_S(g_{0,-u} g_{0,v}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \xi_S(g_{0,-u}) \xi_S(g_{0,v}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{(4.6)}{=} \xi_S(g_{0,-u}) \begin{pmatrix} -v x_2 \\ \overline{v} x_1 \end{pmatrix} \overset{(4.6)}{=} \begin{pmatrix} u(\overline{v} x_1) \\ \overline{u}(v x_2) \end{pmatrix}.$$

Pro $(s, x) \in \mathbb{V}_9$ platí

$$\begin{aligned} \xi_V(g_{0,-u} g_{0,v}) \begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix} &= \xi_V(g_{0,-u}) \xi_V(g_{0,v}) \begin{pmatrix} s & x \\ \overline{x} & -s \end{pmatrix} \\ &\overset{(4.7)}{=} \xi_V(g_{0,-u}) \begin{pmatrix} -s & -v \overline{x} v \\ -\overline{v} x \overline{v} & s \end{pmatrix} \\ &\overset{(4.7)}{=} \begin{pmatrix} s & u(\overline{v} x \overline{v}) u \\ \overline{u}(v \overline{x} v) \overline{u} & -s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

4.6 Tranzitivnost působení grupy F_4

Než se dostaneme k samotnému důkazu tranzitivity, uvedeme poslední pomocné lemma, převzaté z [4, Subsection 2.3]. Doplňujeme jeho důkaz.

Lemma 4.28. *Zobrazení*

$$\begin{aligned} \sigma \colon \mathrm{O}(3) &\to F_4, \\ U &\mapsto (A \mapsto U A U^T), \quad A \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}) \end{aligned}$$

je dobře definované a navíc homomorfismus grup.

Důkaz. Nechť $A, B \in \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ a $U, V \in \mathrm{O}(3)$. Platí

$$\begin{aligned}(UAU^T) \circ (UBU^T) &= \frac{1}{2}(UA\underbrace{U^TU}_{I_3}BU^T + UB\underbrace{U^TU}_{I_3}AU^T) \\ &= U\left(\frac{1}{2}(AB+BA)\right)U^T = U(A \circ B)U^T.\end{aligned}$$

Závorky v součinech matic zde můžeme vynechávat díky Artinovy věty, matice U je totiž reálná. Konjugace maticí U je zřejmě automorfismus vektorového prostoru $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$. Jde tedy o automorfismus $\mathcal{J}_3(\mathbb{O})$, pročež je σ dobře definované. Dále

$$\sigma(UV)A = (UV)A(UV)^T = U(VAV^T)U^T = \sigma(U)(\sigma(V)A),$$

tedy σ je homomorfismus grup. $\square$

Nyní můžeme konečně dokázat kýženou tranzitivitu. Důkaz této věty je modifikací důkazů z [4, Theorem 3.4.2] a [6, Theorem 14.99].

Věta 4.29. *Působení grupy F_4 na Moufangové rovině $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$ je tranzitivní.*

Důkaz. Označme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}.$$

Nechť $B \in \mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Ukážeme, že existuje $g \in F_4$ takové, že $gB = A$. Dosáhneme toho tak, že postupnou aplikací prvků F_4 převedeme B na A. Využijeme přitom Tvrzení 4.26, které nám říká, že $\xi(\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')) \subset F_4$.

Podle Lemmatu 4.23 existuje $h_1 \in \mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9, N')$ takové, že

$$\xi(h_1)B = \begin{pmatrix} r_1 & \overline{x_1} & \overline{x_2} \\ x_1 & r_2 & 0 \\ x_2 & 0 & r_3 \end{pmatrix}$$

pro nějaká $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$. Potom máme

$$(\xi(h_1)B)^2 = \begin{pmatrix} r_1^2 - N(x_1) - N(x_2) & (r_1+r_2)\overline{x_1} & (r_1+r_3)\overline{x_2} \\ (r_1+r_2)x_1 & r_2^2 - N(x_1) & x_1\overline{x_2} \\ (r_1+r_3)x_2 & x_2\overline{x_1} & r_3^2 - N(x_2) \end{pmatrix}.$$

Jelikož $\xi(h_1)B \in \mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$, platí $(\xi(h_1)B)^2 = \xi(h_1)B$. Porovnáním prvků na pozici $(2,3)$ vidíme, že $x_1 = 0$ nebo $x_2 = 0$. Díky Lemmatu 4.28 víme, že každá konjugace prvkem $\mathrm{O}(3)$ je prvkem F_4. Konjugací maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3)$ se převede případ $x_1 = 0$ na případ $x_2 = 0$ a naopak, přičemž jsou zachovány nuly na pozicích $(2,3)$ a $(3,2)$. Můžeme proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_2 = 0$.

Nyní máme matici tvaru $\begin{pmatrix} s_1 & \overline{y} & 0 \\ y & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$, kde $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{O}$. Položíme-li v Lemmatu 4.27 $u = 1$ a $v = y$, dostáváme

$$\xi\left(\begin{pmatrix} L_{\overline{y}} & 0 \\ 0 & L_y \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} s_1 & \overline{y} & 0 \\ y & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & -N(y) & 0 \\ -N(y) & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{R}).$$

Tuto reálnou symetrickou matici lze ortogonální diagonalizací převést na reálnou diagonální matici D. Prvky na hlavní diagonále matice D jsou právě její vlastní čísla. Jelikož $D^2 = D$, vlastní čísla mohou být pouze 0 nebo 1. Rovnost $\operatorname{Tr} D = 1$ implikuje, že jde o dvě nuly a jednu jedničku. Konjugací vhodnou permutační maticí lze tedy D převést na A. $\square$

Závěr

V první kapitole jsme se věnovali Cliffordovým algebrám. Dokázali jsme jejich základní vlastnosti a popsali Cliffordovy algebry $C(r,s)$ pomocí algeber $\mathrm{M}(n,\mathbb{A})$, kde $\mathbb{A} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$. Cliffordovy algebry posloužily ve druhé kapitole k definici grup $\mathrm{Pin}(r,s)$ a $\mathrm{Spin}(r,s)$. Klíčovým poznatkem pro zbytek práce byla surjektivita grupového homomorfismu $\lambda_{0,9}\colon \mathrm{Spin}(0,9) \to \mathrm{SO}(9)$.

Ve třetí kapitole jsme se zaměřili na normované algebry, zejména algebru oktonionů $\mathbb{O}$ zkonstruovanou pomocí tzv. Cayleyho–Dicksonova procesu. Jde o neasociativní algebru, ale odvodili jsme pro ni alespoň slabší verze asociativity, tj. Artinovu větu a Moufangové identity.

Pomocí oktonionů jsme ve čtvrté kapitole definovali výjimečnou jednoduchou Lieovu grupu F_4 a Moufangové rovinu $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Nejprve jsme zúžili působení F_4 na $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$. Popsali jsme realizace algeber $C(\mathbb{O},N) \cong C(0,8)$ a $C(\mathbb{V}_9,N') \cong C(0,9)$ pomocí $\mathrm{End}(\mathbb{O}^2)$. Z těchto realizací vycházela definice reprezentace ξ grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ na vektorovém prostoru $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$ hermitovských oktonionových matic řádu tři. Dalším klíčovým poznatkem byl fakt, že ξ zobrazuje věrně $\mathrm{Spin}(\mathbb{V}_9,N')$ do F_4. Také jsme popsali homomorfismus grup $\sigma\colon \mathrm{O}(3) \to F_4$. S využitím všech pomocných tvrzení jsme nakonec dospěli k důkazu tranzitivity působení grupy F_4 na $\mathbb{OP}^2_{\mathbb{R}}$.

Seznam použité literatury

[1] BAEZ, J. (2002). The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39**(2), 145–205.

[2] CRUMEYROLLE, A. (1990). *Orthogonal and symplectic Clifford algebras*, volume 57 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. ISBN 0-7923-0541-8. doi: 10.1007/978-94-015-7877-6. URL `https://doi.org/10.1007/978-94-015-7877-6`. Spinor structures.

[3] DOSTÁLOVÁ, M. (2009). *Projektivní oktonionová rovina*. Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematický ústav UK, Praha.

[4] FRANEK, P., PAZOUREK, K. a TUČEK, V. (2011). Hyperplane section $\mathbb{OP}^2_0$ of the complex Cayley plane as the homogeneous space $\mathrm{F}_4/\mathrm{P}_4$. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. URL `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141745`.

[5] FRIEDRICH, T. (2000). *Dirac operators in Riemannian geometry*, volume 25 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-2055-9. doi: 10.1090/gsm/025. URL `https://doi.org/10.1090/gsm/025`. Translated from the 1997 German original by Andreas Nestke.

[6] HARVEY, F. R. (1990). *Spinors and calibrations*, volume 9 of *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA. ISBN 0-12-329650-1.

[7] KRÝSL, S. (2001). *Rezoluce twistorů pro nehmotná pole o spinu $s = 3/2$*. Diplomová práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, Praha.

[8] MAGURN, B. A. (2002). *An algebraic introduction to K-theory*, volume 87 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press.

[9] STEVENSON, F. W. (1972). *Projective planes*. W. H. Freeman, San Francisco. ISBN 0716704439.