3. díl: Riemann-Rochova věta

Svatopluk Krýsl

4. srpna 2005

Riemann-Rochova věta je jednou ze základních vět komplexní analýzy na kompaktních Riemannových plochách. Popisuje diferenciální formy mající předepsanou hlavní část v Laurentově rozvoji. Přesnější větou je věta Abelova a v nekompaktním případě věta Weierstrassova. Začněme definicí divizoru. Zobrazení $D : X \to \mathbb{Z}$ nazveme divizor na X, pokud pro ka6dou kompaktní množinu $K \subseteq X$ je množina $\{x \in K; D(x) \neq 0\}$ konečná. Částečné uspořádání na divizorech je definováno vztahem $D \leq D'$ iff $D(x) \leq D(x)'$ $\forall x \in X$.

Nechť f je meromorfní funkce na X a nechť to není 0, potom definujme divizor (f) předpisem $x \mapsto ord_x(f)$, kde $ord_x(f) = 0, k - k, \infty$, pokud f je holomorfní a nenulová, má nulu řádu k, pól řádu k, je identicky nulová na okolí a. Funkce f se nazývá násobkem divizoru D, pokud $(f) \geq D$. Všimněte si, že f je holomorní iff je násobkem nulového divizoru. Pro 1-formu definujeme divizor lokálně, tj. pokud $\omega = fdz$ je meromorfní forma v lok. mapě z, potom $(\omega) := (f)$.

Úkol: Dokaže, že divizor 1-formy nazávisí na zvolené mapě.

Divizor se nazývá hlavní, pokud je divizorem nějaké funkce. Divizor se nazývá kanonický, je-li divizorem nějaké 1-formy. Dva divizory s nazvou ekvivalentní, je-li jejich rozdíl hlavním divizorem.

Úkol: Snadno z jistíte, že kanonické divizory jsou ekvivalentní.

Stupeň na divizorech je homomorfizmus

$$deg : Div(X) \to \mathbb{Z},$$

kde $Div(X)$ je abelovská grupa všech divizorů, definovaný

$$def(D) := \sum_{x \in X} D(x).$$

Libovolný divizor D definuje svazek $\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}; ord_x(f) \leq D(x), \forall x \in U\}$, kde $\mathcal{M}$ je svazek meromorních funkcí.

Je zřejmě $\mathcal{O} = \prime$.

Úkol: Ukažte, že svazky ekvivalentních divizorů jsou izmomorfní, připomeňte si definici izomorfizmu svazků.

Nyní přistupme k formulaci Riemann-Rochovy věty.

Věta (Riemann-Roch): Nechť X je kompaktní Riemannova věta rodu g, D divizor na X, potom

$$dimH^0(X, \mathcal{O}_D) - dimH^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + degD.$$

Důkaz, který vynecháme, využívá indukce a obecné de Rhamovy věty.

Podívejme se na některé důsledky RR věty.

Užitečnou větou je násl.

Věta: X kompaktní Riemannova plocha, D divizor na X a $degD < 0$, potom $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

Zabývejme se důsledky Riemann-Rochovy věty. Předpokládejme kompaktní Riemannovu plochu X rodu g a a bod X, pak existuje meromorfní funkce mající v a pól řádu $\leq g+1$ a jinde holomorfní. Tento fakt nahlédneme uvážením divizoru $D(a) := g + 1$ a $D(x) = 0$ pro $x \neq a$. RR teorém říká, že $dimH^1(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + degD = 2$, tj. existuje $f \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ nenulová $ord_a(f) \geq -D(a) = -1 - g$, tj. f má pól řádu nejvýše $g + 1$.

Všimněte si také, že RR věta implikuje speciální verzi uniformizačního teorému, tj. že g je topologický invariant navíc klasifikující homeomorfní objekty. Přesněji: Dvě kompaktní Riemannovy plochy jsou homeomorfní (dokonce biholomorfní), iff mají týž rod. Nejdříve si uvědomme, že $f : X \to \mathbb{P}^1$ z předchozí úvahy měla pól řádu g+1, což podle známé věty o nabývání hodnot z komplexní analýzy značí, že f je g+1-listé holomorfní (tj. určitě neramifikované) nakrytí plochy rodu g. Odtud již snadno dostaneme, že každá kompaktní Riemannova plocha rodu 0 je izomorfní (zde: biholomorfní) sféře, neboť v tomoto případě je nakrytí holomorní a 1-listé, tj. biholomorfní.

Užitím RR teorému a Serrovy duality, kterou zde probírat nebudeme, lze dovodit, že kanonický divizor má stupeň vždy $2(g - 1)$, tj. např. na sféře neexistuje meromorfní forma, která je holomorfní vyjma bodu, kde má pól řádu různého od dvou. Ukažme, že každý torus má rod 1. dz na $\mathbb{C}$ indukuje formu na $\mathbb{C}/\Gamma$, kde Γ je nějaká mříž ranku 2. Tato forma na toru nemá ani nulu, ani pól, tj. $deg() = 2g - 2 = 0$, tj. $g = 1$. Poznamenejme, že řád hlavního divizoru je nula, jak plyne ze zákl. komplexní analýzy.

Následující úkol je celkem obtížný. Spočtěte rod plochy mnohoznačné funkce $(1 - z^n)^{1/n}$.

Poznamenejme, že každou Riemannovu plochu lze vnořit do projektivního prostoru dimenze, která je určena 0. kohomologií s hodnotami ve svazku určeném vhodným divizorem.

Zkuste si rozmyslet, zda jsou kompaktní Riemannovy plochy Hodgeovy variety a jak věta o vnoření souvisí s Kodairovými větami z šedesátých let.

Nejdříve si rozmyslete, že Riemannovy plochy jsou Kählerovy, tj. existuje na nich hermitovská metrika indukující symplektickou formu. O této formě ukažte, že se nachází v integrální kohomologii vnořené do de Rhameovy. Tj. hodgeovskost je pomocí Kodairovy věty představena jako jistá tuhost variety. Rigidita je tak značná, že hodgeovská varieta je projektivní algebraická varieta.