Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Nekomutativní diferenciální geometrie a její aplikace v matematické fyzice

aneb

Rezoluce twistorů pro nehmotná pole o spinu $s = 3/2$.

Svatopluk Krýsl

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Vladimír Souček, DrSc.

Studijní program: fyzika, teoretická fyzika.

Děkuji především vedoucímu své diplomové práce, prof. RNDr. Vladimíru Součkovi, DrSc., za cennou pomoc poskytnutou při četných konzultacích.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.
Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 12. 4. 2001 Svatopluk Krýsl

Obsah

1 Úvod.

V období 1991 - 1995 publikoval R. Penrose a jeho spolupracovníci sérii krátkých sdělení zabývajících se otázkou globální definice twistorů na (obecně křivých) prostoročasech pomocí polí se spinem 3/2. Metoda, kterou k tomu používali, byla obdobou popisu nábojů v teorii elektromagnetického pole, nazývají ji "kalibrační volnost druhého druhu".

Tato krátká sdělení byla otištěna v neformálním časopise Twistor Newsletter, který slouží k orientaci v dění v twistorové skupině. Články jsou proto psány velmi hutně a úsporně, s cílem podat jen minimální stručnou informaci. Často bývají o diskutovaných otázkách publikovány plnohodnotné články v jiných časopisech. Diskuze o kalibrační volnosti druhého druhu a jejím využití v twistorové teorii neměla pokračování v rozsáhlejších textech, a zůstala tedy bez podrobnějšího komentáře snad proto, že se odpověď na položenou otázku nepodařilo zatím v plné obecnosti nalézt. Zmíněná krátká sdělení obsahují obvykle jen velmi stručný nástin faktů bez dalšího odůvodnění.

Na druhé straně, v diferenciální geometrii se v poslední době věnovalo mnoho úsilí jisté řadě posloupností konformně invariantních operátorů na varietách s danou konformní strukturou (t.j. na varietách, kde je zadána pouze konformní třída metrik). Nejjednodušší takovouto posloupností je de Rhamův komplex. Složitější analogie takovýchto komplexů byly nejprve popsány v teorii nekonečnědimenzionálních reprezentací a podle jejich objevitelů se dnes tradičně jmenují Bernstein-Gelfand-Gelfandovy rezoluce (BGG-rezoluce, popř. BGG-komplexy). Tento velmi zajímavý a důležitý výsledek je neočekávaně ve velmi úzkém vztahu k otázkám, které studoval R. Penrose a jeho kolegové.

Cílem práce bylo pochopit, doplnit a srozumitelně vyložit konstrukci naznačenou v uvedených článcích a zároveň odůvodnit platnost v nich obsažených tvrzení (články neobsahují ani náznaky důkazů používaných tvrzení). Podstatnou součástí nástrojů užívaných v důkazu byla výše uvedená BGG-rezoluce pro základní spinorovou reprezentaci a její realizace uvnitř de Rhamovy posloupnosti spinorhodnotových diferenciálních forem na prostoročasech (tj. v dimenzi 4). V práci se podařilo přesně formulovat exaktní posloupnost na plochém prostoročase (včetně opravy některých nepřesných tvrzení v článku) a podat úplné odůvodnění toho, že je rezolventou.

Na konformně plochých prostoročasech je exaktnost BGG-rezoluce základní informací, která by poskytovala možnost interpretovat twistory jako kalibrační volnost druhého druhu. Aby bylo možné formulaci rozšířit na obecnější třídu časoprostorů, nabízí se prostory v rezoluci zmenšovat pomocí dalších požadavků (typicky pomocí lorentzovsky invariantních diferenciálních operátorů prvního řádu). Tento způsob, navržený ve výše zmíněné sérii článků, je používán i v předložené práci, v níž se navíc podařilo změnit formulaci používaného komplexu tak, aby byl exaktní rezolucí nejen v plochém případě, ale také na všech konformně plochých prostoročasech s nulovou skalární křivostí.

Práce je rozdělena do osmi kapitol, přičemž první z nich tvoří úvod. V druhé kapitole jsou uvedeny nezbytné definice a věty týkající se Cliffordových algeber. V třetí kapitole je definována *Spin*- a *Pin*-grupa. Čtvrtá kapitola se věnuje konečněrozměrným reprezentacím *Spin*-grupy, jejichž prvky tvoří základ pro tzv. spinorovou algebru. Pátá kapitola pojednává o metodě abstraktních indexů zavedé R. Penrosem a W. Rindlerem v [6], s jejichž pomocí lze efektivně zacházet se spinorovou algebrou. Šestá kapitola obsahuje aplikaci metody abstraktních indexů na rovnici pro nehmotná pole o spinu $s = 1$. Jsou představeny pohybové rovnice pro nehmotná pole s obecným spinem. V sedmé kapitole jsou shrnuty základní geometrické pojmy postihující pojem časoprostoru a pseudoriemannovy variety se *Spin*-strukturou. Osmá kapitola je věnována popisu exaktní rezoluce twistorového prostoru na konformně plochých prostoračasech s nulovou skalární křivostí, tj. definici posloupnosti určitých spinorhodnotových vnějších diferenciálních forem definovaných na časoprostorech a důkazu její exaktnosti.

2 Cliffordovy algebry.

Úvod. Proces hledání nových číselných oborů, zobecňujících reálná a komplexní čísla vedl k objevu kvaternionů, oktonionů, Cayleyových čísel, Grassmannovy algebry a různých druhů (bi)spinorů (Majoranových, Diracových či Weylových). Přirozené sjednocení některých těchto snah tvoří Cliffordovy algebry, které umožňují jednotný pohled na tuto problematiku. O vývoji jednotlivých výše zmíněných číselných oborů (těles, algeber, G-modulů) viz Lounesto [7].

V této kapitole budeme definovat Cliffordovy algebry, dokážeme jejich unicitu a existenci a na jejím konci uvedeme několik izomorfizmů Cliffordovy algebry s jinými algebrami.

Definice 1: (Cliffordova algebra)
Nechť V je komplexní (reálný) vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ a Q symetrická bilineární forma na V. Pár (A, i), kde A je komplexní (reálná) asociativní algebra s jednotkou 1 a $i : V \to A$ je homomorfizmus vektorových prostorů, nazveme *Cliffordovou algebrou* kvadratické formy (V, Q), pokud

1. $i(v).i(v) = Q(v, v)$ a zároveň

2. Pro každou asociativní algebru B s jednotkou 1 a homomorfizmus $j : V \to B$, pro nějž $j(v).j(v) = Q(v, v)$, existuje právě jeden homomorfizmus algeber $\rho : A \to B$ respektující $j = \rho i$ (*slučitelnost*). Cliffordovu algebru označíme $(Cliff(Q), j)$.

Poznámka:

1. Každý homomorfizmus vektorových prostorů $i : V \to A$ splňující podmínku ad 1 v definici 1 nazveme *kvadratický homomorfizmus.*

2. Vlastnost algebry popsanou ad 2 v definici 1 nazveme *univerzální vlastností.*

3. Cliffordova algebra je tedy iniciální univerzální objekt všech kvadratických algeber.

Úmluva: Jelikož budeme vesměs vždy uvažovat vektorové prostory nad tělesem komplexních resp. reálných čísel, jejichž charakteristika $\chi \neq 2$, což nám umožňuje užívat polarizační formuli, nebudeme rozlišovat mezi symetrickou bilineární a jí asociovanou kvadratickou formou, neboť v tomto případě jsou vzájemně jednoznačně převeditelné.

Lemma (Unicita Cliffordovy algebry):

Cliffordova algebra je určena jednoznačně, až na izomorfizmus, tj. jsou-li $(Cliff'(Q), j')$, $(Cliff(Q), j)$ dvě Cliffordovy algebry téže kvadratické formy (V, Q), potom existuje izomorfizmus algeber $\rho : Cliff(Q) \to Cliff'(Q)$ splňující $\rho j = j'$.

Důkaz: Z definice Cliffordovy algebry aplikované pro $(Cliff(Q), j)$ plyne, že existuje homomorfizmus algeber $\rho : Cliff(Q) \to Cliff'(Q)$, že platí: $\rho j = j'$. Aplikujeme-li tutéž definice pro $Cliff'(Q)$, dostaneme existenci $\rho' : Cliff'(Q) \to Cliff(Q)$, že $\rho' j' = j$. Z výše uvedených relací (slučitelnosti) plyne:

$j = \rho' j' = \rho' \rho j$ resp.

$j' = \rho j = \rho \rho' j'$,

tj. celkem: $\rho \rho' j' = j'$ resp. $\rho' \rho j = j$. Zřejmě $\rho \rho'$ resp. $\rho' \rho$ je endomorfizmus algebry $Cliff'(Q)$ resp. $Cliff(Q)$ spňující slučitelnost. Dík univerzalitě $Cliff(Q)$ resp. $Cliff'(Q)$ existuje jediný homomorfizmus $Cliff(Q)$ resp. $Cliff'(Q)$ do sebe splňující slučitelnost. Protože identita na $Cliff(Q)$ resp. na $Cliff'(Q)$ je (slučitelnost splňující) homomorfizmus algeber, dostaneme dík unicitě $\rho \rho' = id_{|Cliff'(Q)}$ resp. $\rho' \rho = id_{|Cliff(Q)}$, odkud plyne, že ρ je izomorfizmus (zrovna tak jako jeho inverze ρ'), c.b.d.

Lemma (Existence Cliffordovy algebry):

Pro každou kvadratickou formu (V, Q) existuje její Cliffordova algebra $(Cliff(Q), j)$.

Důkaz: Existence Cliffordovy algebry se dokáže následující konstrukcí: Nechť $I(Q) :=< v \otimes v - Q(v, v) | v \in V >$ je oboustranný ideál v tenzorové algebře $T(V) := \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) + \ldots$ vektorového prostoru V. Definujme $Cliff(Q) := T(V)/I(Q)$. Nechť $\pi : T(V) \to Cliff(Q)$ je projekce na faktorprostor. Definujme $j := \pi i : V \to Cliff(Q)$, kde $i : V \to T(V)$ je kanonické vnoření vektorového prostoru do jeho tenzorové algebry. Výsledek této konstrukce, tj. $(Cliff(Q), j)$, je Cliffordovou algebrou kvadratické formy (V, Q), neboť:

1. $j(v).j(v) = \pi i(v).\pi i(v) = i(v) \otimes i(v) \bmod I(Q) = v \otimes v \bmod I(Q) = Q(v,v)$. Zbývá ukázat univerzalitu:

2. Nechť A je asociativní algebra s 1 a $l : V \to A$ je kvadratický homomorfizmus, tj. $l(v).l(v) = Q(v,v)$. Máme dokázat unicitu homomorfizmu $\rho : Cliff(Q) \to A$, slučitelného s $\rho j = l$. Buď $\rho' : Cliff(Q) \to A$, $\rho' j = l$ další homomorfizmus algeber. Odtud plyne: $l = \rho' j = \rho j$, tj. ρ a ρ' se kryjí na $j(V)$. Jelikož $j(V) = V$ a prvky V generují $Cliff(Q)$, je $\rho = \rho'$ na celé $Cliff(Q)$.

Lemma:

Pro každou Cliffordovu algebru $(Cliff(Q), j)$ kvadratické formy (V, Q) je homomorfizmus j monomorfizmus. (Budeme jej nazývat *vnoření vektorového prostoru do Cliffordovy algebry.*)

Důkaz: Nejdříve dokážeme injektivitu pro j explicitně definované výše uvedenou konstrukcí Cliffordovy algebry pomocí tenzorové algebry $T(V)$. Jelikož j je homomorfizmus vektorových prostorů, stačí ukázat, že $j(v) = 0\mathbb{R}ightarrowv = 0$. Platí $0 = j(v) = \pi i(v)$, právě když $i(v) \in I(Q)$, a proto existují $r, s \in T(V)$, že $i(v) = r \otimes (v \otimes v - Q(v,v)) \otimes s$. Díky tomu, že $i(v)$ má homogenitu 1, dostaneme, $r = 0 \vee s = 0 \vee v \otimes v = 0$, odkud $i(v) = 0$, což dík injektivitě $i : V \hookrightarrow T(V)$ implikuje $v = 0$. Pro obecnou Cliffordovu $(Cliff'(Q), j')$ algebru kvadratické formy (V, Q), dík lemmatu o unicitě Cliffordovy algebry víme o existenci izomorfizmu $\rho : Cliff(Q) \to Cliff'(Q)$ s kanonickou Cliffordovou algebrou $Cliff(Q)$, popsanou konstrukcí v důkazu předchozího lemmatu. Pokud by $j' : V \to Cliff'(Q)$ nebyl monomorfizmus, existuje $0 \neq w \in V$, že $j'(w) = 0$. Dík slučitelnosti izomorfizmu ρ dostaneme $0 = j'(w) = \rho j(w)$. Jelikož j a ρ jsou monomorfizmy a $w \neq 0$, dostaneme spor.

P o z n á m k a: Nechť $(Cliff(Q), j)$ je Cliffordova algebra kvadratické formy (V, Q) a $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, pak $\dim_{\mathbb{C}} Cliff(Q) = 2^n$. Navíc $Cliff(Q)$ je generována multiplikativně množinou $j(V)$ spolu s relací $Q(v,v) = v.v$. Spc. pokud $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ je $(Q-)$ortonormální báze V, potom: $e_i.e_j + e_j.e_i = 0$, pro $i \neq j$ a $e_i.e_i = Q(e_i, e_i)$.

Poznámka:

1. Pro (V, Q), kde V je komplexní vektorový prostor konečné dimenze a $Q = 0$, dostaneme, že $Cliff(Q) \simeq \bigwedge^{\cdot} V$ jako vektorové prostory.

2. Pro $V := \mathbb{R}^2$, reálný vektorový prostor dimenze 2, a $Q(x, y) := -x^2 - y^2$ je $Cliff(Q) \simeq \mathbb{H}$, kde $\mathbb{H}$ je algebra kvaternionů. Ověřme tento fakt: Bází $\mathbb{R}-$modulu $\mathbb{H}$ je $\{1, i, j, k\}$. Definujme přiřazení $1 \mapsto 1, i \mapsto e_1, j \mapsto e_2, k \mapsto e_1.e_2$. Ověřme, že přiřazení je homomorfizmus algeber: $i^2 = -1 \mapsto -1 = e_1.e_1$, podobně pro zbylé prvky. $ij = k \mapsto e_1.e_2$, $jk = i \mapsto e_1 = e_2.e_1.e_2 = -e_2.e_2.e_1 = e_1$, neboť $e_1.e_1 = -1$ a.t.d. Výše popsaný homomorfizmus je izomorfizmus, neboť dimenze této algebry je $2^2 = 4$, t.j. rovna dimenzi kvaternionů jako $\mathbb{R}$-modulu, a z definice izomorfizmu na bázi plyne, že je monomorfizmem, což pro případ vektorových prostorů implikuje, že je izomorfizmem.

3. Pro jednodimenzionální reálný vektorový prostor $V = \mathbb{R}$ a $Q = -x^2$ je $Cliff(Q) \simeq \mathbb{C}$.

3 Pin- a $Spin$-grupa.

Úvod. Vlastní Lorentzova grupa, $SO(1,3)_+$, hraje fundamentální roli v teoriích, v nichž se časoprostor modeluje (lokálně) jako Minkowského prostor. Po Stern-Gerlachově experimentu (objevení spinu elektronu) začaly nabývat na významu tzv. dvojznačné reprezentace Lorentzovy grupy. Nechceme-li se smířit s dvojznačností nějakého zobrazení, jsme nuceni zvolit definiční obor tohoto zobrazení jako dvojnásobné nakrytí původního definičního oboru; $Spin(1,3)_+$ je dvojnásobným (a vzhledem k jednoduché souvislosti $Spin(1,3)_+$ univerzálním) nakrytím vlastní Lorentzovy grupy. Dvojznačné reprezentace vlastní Lorentzovy grupy lze interpretovat jako "obyčejné" reprezentace $Spin(1,3)_+$.

V této kapitole budeme definovat jednu involuci a jednu antiinvoluci na Cliffordově algebře a pomocí první z nich $\mathbb{Z}_2$-gradaci Cliffordovy algebry, Pin-grupu a $Spin$-grupu. V Cliffordově algebře zkonstruujeme dvoulisté nakrytí neutrální element obsahující souvislé komponenty $SO(k,l)_+$ speciální ortogonální grupy $SO(k,l)$. Na závěr kapitoly uvedeme několik izomorfizmů $Spin$-grupy s některými maticovými grupami.

Definice 2: (Involuce γ - reverze)
Nechť $(Cliff_{op}(Q), j_{op})$ je opačná algebra (s násobením značeným $\star$) k algebře $(Cliff(Q), j)$ kvadratické formy (V, Q), tj. $Cliff_{op}(Q) = Cliff(Q)$ jako vektorové prostory a násobení v $Cliff_{op}(Q)$ je definováno předpisem $x \star y := y.x$. Zobrazení $j_{op} : V \to Cliff_{op}(Q)$ definujeme předpisem: $j_{op} := j$. Z konstrukce plyne, že $(Cliff_{op}(Q), j_{op})$ je opět Cliffordovou algebrou kvadratické formy (V, Q). Dík univerzalitě existuje jediný homomorfizmus algeber $\gamma' : Cliff(Q) \to Cliff_{op}(Q)$, splňující $j(v) = j_{op}(v) = \gamma' j(v)$. Definujme $\gamma : Cliff(Q) \to Cliff(Q)$ následovně: $\gamma := \gamma'$. Homomorfizmus γ se nazývá *involuce* γ nebo *reverze.*

Poznámka (Vlastnosti involuce γ):

1. Zobrazení γ je antiendomorfizmem algebry $Cliff(Q)$, neboť $\gamma(x.y) = \gamma'(x.y) = \gamma'(x) \star \gamma'(y) = \gamma'(y).\gamma'(x) = \gamma(y).\gamma(x)$.

2. γ je (anti-)involuce, neboť $\forall v \in V$ platí $\gamma^2(j(v)) = \gamma(\gamma(v)) = \gamma(j(v)) = j(v)$, a proto obecně $\gamma^2 = id$ na celé Cliffordově algebře.

3. Spočtěme, jak se γ vyhodnocuje na homogenních komponentách $Cliff(V,Q)$. $\gamma(e_i) = \gamma(j(e_i)) = j(e_i) = e_i$; $\gamma(e_i.e_j) = \gamma(e_j).\gamma(e_i) = e_j.e_i = -e_i.e_j$; $\gamma(e_i.e_j.e_k) = \gamma(e_k).\gamma(e_j).\gamma(e_i) = e_k.e_j.e_i = -e_j.e_k.e_i = -e_i.e_j.e_k$. Odtud plyne, že pro každý homogenní element $v \in Cliff(V,Q)$ homogenity stupně k, $deg(v) = k$, platí:
$$\gamma(v) = \begin{cases} v, & \deg(v) = 0, 1 \text{ mod } 4 \\ -v, & \deg(v) = 2, 3 \text{ mod } 4 \end{cases}$$

Definice 3: (Involuce β - inverze)

Pro $(Cliff(Q), j)$ je zřejmě i $(Cliff(Q), -j)$ Cliffordovou algebrou, a proto (dík univerzalitě) existuje jediný homomorfizmus β algeber, $\beta : (Cliff(Q), j) \to (Cliff(Q), -j)$. Tento homomorfizmus se nazývý *involuce* β nebo *inverze*.

Poznámka (Vlastnosti involuce β):

1. Homomorfizmus β je involucí na $Cliff(Q)$, což se ověří analogicky předchozímu případu. Odtud plyne, že β je izomorfizmus s právě dvěma vlastními hodnotami $+1, -1$.

2. Označme $Cliff_0(Q) := \{x \in Cliff(Q) | \beta(x) = x\}$, $Cliff_1(Q) := \{x \in Cliff(Q) | \beta(x) = -x\}$. Platí, že $Cliff(Q) = Cliff_1(Q) \oplus Cliff_0(Q)$. Tento rozklad zadává $\mathbb{Z}_2$-gradaci na $Cliff(Q)$, tj. $x.y \in Cliff_{(\alpha+\beta) mod 2}(Q)$, kde $x \in Cliff_\alpha(Q)$ a $y \in Cliff_\beta(Q)$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$.

3. Dík tomu, že $Cliff(Q)$ je $\mathbb{Z}_2$-gradovaná a $Cliff_0(Q)$ je její sudá část, je $Cliff_0(Q)$ dokonce podalgebrou $Cliff(Q)$.

4. Spočtěme, jak se β vyhodnocuje na homogenních komponentách $Cliff(Q)$. $\beta(e_i) = \beta(j(e_i)) = -j(e_i) = -e_i$; $\beta(e_i.e_j) = \beta(e_i).\beta(e_j) = e_i.e_j$. Odtud plyne, že pro každý homogenní element $v \in Cliff(Q)$ stupně homogenity k, $deg(v) = k$, platí:
$$\beta(v) = \begin{cases} v, & \deg(v) = 0 \text{ mod} 2 \\ -v, & \deg(v) = 1 \text{ mod} 2 \end{cases}$$

Definice 4: (*Pin*- a *Spin*-grupa)

Označme $\mathbb{R}_{k,l}$ Cliffordovu algebru pro n-rozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, kde $n = k+l$, a kvadratickou formu $Q = x_1^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_{k+l}^2$. Grupu generovanou multipliktivně elementy variet $S_{k,l}^{n-1} := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | - Q(x) = 1\} \subseteq \mathbb{R}_{k,l}$ a $H_{k,l}^{n-1} := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | - Q(x) = -1\} \subseteq \mathbb{R}_{k,l}$ nazveme *Pin-grupou* a označíme ji $Pin(k,l)$. *Spin-grupu* definujme předpisem: $Spin(k,l) := Pin(k,l) \cap (\mathbb{R}_{k,l})_0$.

P o z n á m k a: Ověřme v definici implicite uvedený fakt, že tímto způsobem obdržíme grupy. Uzavřenost na násobení plyne pro $Pin(k,l)$ z její definice. Asociativnost plyne z asociativnosti Cliffordovy algebry $\mathbb{R}_{k,l}$. Inverzní prvek k $a = a_1 ... a_r \in Pin(k,l)$, kde $a_i \in S_{k,l}^n \cup H_{k,l}^n, i = 1, ..., r$, je $a_r^{-1} ... a_1^{-1}$, kde $a_i^{-1} := Q(a_i)^{-1} a_i$ je inverzní prvek k a_i, $i = 1, ..., r$, neboť $a_i^{-1} a_i = Q(a_i)^{-1} a_i . a_i = Q(a_i)^{-1} Q(a_i) = 1$, $i = 1, ..., r$. Navíc $a_i^{-1} \in H_{k,l}^n \cup S_{k,l}^n$, protože $a_i^{-1} . a_i^{-1} = Q(a_i^{-1}) = Q(Q(a_i)^{-1} a_i) = Q(a_i)^{-2} Q(a_i) = Q(a_i)^{-1} = \pm 1$, $i = 1, ..., r$, odkud $a_i^{-1} \in S_{k,l}^{n-1} \cup H_{k,l}^{n-1}$. Neutrální prvek 1 je generován např. takto: $1 = a_1 . a_1^{-1}$. Ad *Spin*-grupa: uzavřenost grupového násobení plyne z toho, že $(\mathbb{R}_{k,l})_0$ je algebra a *Pin*-grupa je grupa. Asociativnost a existence neutrálního prvku se dokáže stejně jako v předešlém případě. Pro $a \in Spin(k,l) = Pin(k,l) \cap (\mathbb{R}_{k,l})_0$ je i $a^{-1} \in Spin(k,l)$, neboť $a^{-1} \in Pin(k,l)$ a $\beta(a^{-1}) = \beta(a_r^{-1} ... a_1^{-1}) = \beta(a_r^{-1}) ... \beta(a_1^{-1}) = (-1)^r a_r^{-1} ... a_1^{-1} = (-1)^r a^{-1}$. Jelikož $a \in (\mathbb{R}_{k,l})_0$, je $\beta(a) = a$, a proto r je sudé. Odtud plyne, že $\beta(a^{-1}) = a^{-1}$, díky čemuž $a^{-1} \in (\mathbb{R}_{k,l})_0$.

Ú m l u v a: Cliffordovu algebru kvadratické formy $(V := \mathbb{C}^n, Q := -(z^1)^2 - ... - (z^n)^2)$ označme $\mathbb{C}_n$. Pro tento případ lze definovat *Pin*- resp. *Spin*-grupu shodně jako v předchozí definici. Označme ji $Pin(n, \mathbb{C})$ resp. $Spin(n, \mathbb{C})$. Navíc místo $Pin(0,n)$ resp. $Spin(0,n)$ pišme krátce $Pin(n)$ resp. $Spin(n)$.

Definice 5: (Nakrytí (speciální) ortogonální grupy)

Pro každé $x \in Pin(k,l) \subseteq \mathbb{R}_{k,l}$ definujme $\lambda(x) : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathbb{R}_{k,l}$ předpisem $\lambda(x)y := x.y.\gamma(x), y \in \mathbb{R}^{k,l}$. Definujme zobrazení λ předpisem $\lambda : Pin(k,l) \ni x \mapsto \lambda(x) : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathbb{R}_{k,l}$. λ nazveme *nakrytí (speciální) ortogonální grupy.*

Lemma (Vlastnosti zobrazení λ):

Pro zobrazení λ platí:

1. $\lambda(x) : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathbb{R}^{k,l}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^{k,l}$, $\lambda(x)$ je endomorfizmus $\mathbb{R}^{k,l}$.

2. λ je homomorfizmus příslušných multiplikativních struktur na $Pin(k,l)$ a $End(\mathbb{R}^{k,l})$.

Důkaz:

1. Nejdříve dokažme druhé tvrzení. Pro každé $x_1, x_2 \in Pin(k,l)$ a $y \in \mathbb{R}^n$ platí $\lambda(x_1.x_2)y = x_1.x_2 y\gamma(x_1.x_2) = x_1.x_2 y\gamma(x_2).\gamma(x_1) = \lambda(x_1)(\lambda(x_2)y) = (\lambda(x_1)\lambda(x_2))(y)$.

2. Nechť $x \in S^{n-1}_{k,l} \cup H^{n-1}_{k,l}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Zvolíme-li bázi $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, aby $x = e_1$. Nechť $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, kde $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$. $\lambda(x)y = x.y.\gamma(x) = e_1.(\sum_{i=1}^n y_i e_i).e_1 = y_1 e_1.e_1 e_1 + e_1.\sum_{i=2}^n y_i e_i.e_1 = Q(e_1)y_1 e_1 + e_1.(\sum_{i=2}^n y_i e_i).e_1 = Q(e_1)y_1 e_1 - Q(e_1)\sum_{i=2}^n y_i e_i$, odkud dostáváme, že obraz je v $\mathbb{R}^n$. (Z výsledku plyne, že v eukleidovském případě $(k = 0, l = n)$ je $\lambda(x)$ zrcadlením podle roviny kolmé k $x = e_1$.) Pro obecný element $a = a_1...a_r \in Pin(k,l)$, kde $a_i \in S^n_{k,l} \cup H^n_{k,l}$, $i = 1, ..., r$, na základě prvního bodu tohoto důkazu platí $\lambda(a)y = \lambda(a_1...a_r)y = (\lambda(a_1)...\lambda(a_r))y = \lambda(a_1)(\lambda(a_2)(...(\lambda(a_r)y)...))$, odkud $\lambda(a)y \in \mathbb{R}^{k,l}$.

Lemma ($Spin(k,l)_+$ nakrývá $SO(k,l)_+$):
Homomorfizmus $\lambda : Spin(k,l)_+ \to SO(k,l)_+$ je dvoulisté nakrytí Lieových grup. V případě $k + l \geq 4$ a $k = 1$ nebo $k + l \geq 3$ a $k = 0$ je toto nakrytí univerzální.

Důkaz: Viz Baum [8].

Na závěr této kapitoly uveďme několik izomorfizmů, viz Friedrich [9].

Poznámka: Platí následující izomorfizmy grup:

1. $Spin(3,\mathbb{C}) \simeq SU(2)$

2. $Spin(4,\mathbb{C}) \simeq SU(2) \times SU(2)$

3. $Spin(5, \mathbb{C}) \simeq Sp(2)$

4. $Spin(6, \mathbb{C}) \simeq SU(4)$ (Prvky fundamentálních reprezentací této grupy se nazývají *twistory*.)

5. $Spin(1, 3) \simeq SL(2, \mathbb{C})$. Tento izomorfizmus, jelikož se vztahuje problému, který chceme v této práci řešit, dokážeme v následující kapitole.

4 Spinory.

Úvod. Poněkud vágně můžeme říci, že spinory jsou objekty, jejichž vztah ke grupě $SL(2,\mathbb{C})$ je stejný jako vztah tenzorů na Minkowského časoprostoru k vlastní Lorentzově grupě $SO(1,3)_+$.

V prvním paragrafu této kapitoly budeme definovat spinory jako prvky fundamentálních reprezentací $Spin(4,\mathbb{C})$.[1] V druhém paragrafu se zaměříme speciálně na Minkowského časoprostor, tj. dimenzi čtyři s jednou časovou souřadnicí. Spinory budeme definovat speciální konstrukcí, vycházející z izomorfnosti vlastní Lorentzovy grupy $SO(1,3)_+$ s grupou $SL(2,\mathbb{C})$.

§1. Spinory a reprezentace $Spin$-grupy.

1.1 Strukturní a reprezentační teorie algebry $so(n,\mathbb{C})$.

Jelikož pro $1+l \geq 4$ je $\lambda : Spin(1,l)_+ \to SO(1,l)_+$ dvojnásobným nakrytím Lieových grup, tak existuje okolí identity $id \in U \subseteq Spin(1,l)_+$, že $\lambda_{|U}$ je difeomorfizmem Lieových grup. Odtud z definice Lieovy algebry Lieovy grupy plyne, že $spin(1,l) \simeq so(1,l)$ je izomorfizmus Lieových algeber, kde $spin(1,l)$ resp. $so(1,l)$ je Lieova algebra grupy $Spin(1,l)_+$ resp. $SO(1,l)_+$. Dík tomu, že $Spin(1,l)_+$ je jednoduše souvislou, stačí se při hledání konečnědimenzionálních ireducibilních reprezentací $Spin(1,l)_+$ omezit na reprezentace její algebry $spin(1,l)$ (reprezentace grupy pak dostaneme příslušným exponenciováním). Dík předchozímu izomorfizmu $spin(1,l) \simeq so(1,l)$ pak dostáváme, že se stačí omezit na reprezentace $so(1,l)$. Protože reprezentace $so(1,l)$ vzájemně jednoznačně odpovídají reprezentacím algebry $so(n,\mathbb{C})$, kde $1+l =: n$, stačí se omezit na reprezentace $so(n,\mathbb{C})$. Jelikož algebru $so(n,\mathbb{C})$ budeme realizovat jinak, než je obvyklé, uveďme konstrukci explicitně.

Zabývejme se jen případem $n =: 2k$ je sudé.

[1] Definici lze rozšířit v několika směrech a připustit, aby spinor byl libovolný element reprezentace $Spin(n,\mathbb{C})$, případně uvažovat $Spin$-grupu pro libovolnou reálnou indiferentní (stále však nedegenerovanou) kvadratickou formu $(\mathbb{R}^{k,l}, Q = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^{k+l})^2)$.

$so(n,\mathbb{C}) = \{X \in M(n,n;\mathbb{C}) | X^T M + MX = 0\}$, kde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $X \in so(2k,\mathbb{C})$ jsou blokového tvaru:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde B a C jsou antisymetrické a $A^T = -D$. [2]

Označme $E_{i,j}$ matici, která má 1 v pozici (i,j) a na jiných pozicích nuly.

Cartanova podalgebra $h_n \subseteq so(n,\mathbb{C})$ algebry $so(n,\mathbb{C})$ je izomorfní $\mathbb{R}^k$, konkrétně:

$$h_n = \{E_{i,i} - E_{n+i,n+i} | 1 \leq i \leq k\}.$$

Kořenový systém:

$$R = \{\pm L_i \pm L_j | 1 \leq i \neq j \leq k\},$$

přičemž uvažujeme libovolnou kombinaci znamének $\pm$.

Fundamentální systém kořenového systému: $\Phi = \{L_1 - L_2, L_2 - L_3, ..., L_{k-1} - L_k, L_{k-1} + L_k\}$.

Kořenová mříž $\Lambda_R = \mathbb{Z}\Phi$.

Fundamentální váhy:

$\omega_i = L_1 + ... + L_i, i \leq k-2$;

$\omega_{k-1} = \frac{1}{2}(L_1 + ... + L_{k-1} + L_k)$;

$\omega_k = \frac{1}{2}(L_1 + ... + L_{k-1} - L_k)$

Váhová mříž $\Lambda_W = \mathbb{Z}\{\omega_1, ..., \omega_k\}$.

Otevřená Weylova komora $C = \{\sum_{i=0}^k a_i L_i | a_1 > a_2 > ... > a_{k-1} > |a_k|\}$. Uzavřenou Weylovu komoru značme $\overline{C}$.

Nyní zaveďme *parametrizaci průniku Weylovy komory s váhovou mříží* $C \cap \Lambda_W$. Za množinu generátorů vezměme lineárně nezávislou množinu $\{L_1, ..., L_k\}$. Souřad-

[2] Tento tvar vyplývá z toho, že jsme místo klasické jednotkové matice, reprezentující eukleidovskou metriku, vzali matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

která je samozřejmě ekvivalentní (nad $\mathbb{C}$) matici jednotkové, neboť je symetrická a nedegenerovaná.

nice vektoru $m_1L_1 + ... + m_kL_k$ značme $\vec{m} = (m_1, ..., m_k)$. Takto můžeme identifikovat průnik $\overline{C} \cap \Lambda_W$ resp. $C \cap \Lambda_W$ s množinou $\overline{D}$ definovanou předpisem $\overline{D} := \{\vec{m} = (m_1, ..., m_k) | m_1 \geq ... \geq m_{k-1} \geq |m_k|, m_i \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}/2, i = 1, ..., k\}$ resp. s množinou $D := \{\vec{m} = (m_1, ..., m_k) | m_1 > ... > m_{k-1} > |m_k|, m_i \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}/2, i = 1, ..., k\}$.(Prvky množin D resp. $\overline{D}$ vyjadřují souřadnice prvku $C \cap \Lambda_W$ resp. $\overline{C} \cap \Lambda_W$.) Prvek $\vec{m} \in \overline{D}$ resp. $\vec{m} \in D$ nazývejme *dominantní* resp. *striktně dominantní vahou*, ačkoliv je tento název vyhrazen pro prvky $\overline{C} \cap \Lambda_W$ resp. $C \cap \Lambda_W$.

Citujme fundamentální větu teorie reprezentací o konečnědimenzionálních reprezentacích komplexních jednoduchých Lieových algeber.

Věta 1: (Unicita a existence)

Nechť g je jednoduchá komplexní Lieova algebra konečné dimenze, $\overline{C}$ uzavřená Weylova komora g, odpovídající nějaké volbě Cartanovy podalgebry a částečného uspořádání na množině kořenů, Λ_W váhová mříž a Λ_R kořenová mříž g. Pro každé $\alpha \in \overline{C} \cap \Lambda_W$ existuje (až na ekvivalenci) jediná (konečně dimenzionální komplexní ireducibilní) reprezentace Γ_α algebry g s nejvyšší vahou α. Toto zobrazení, přiřazující každé výše uvedené α příslušnou reprezentaci, je bijekce mezi $\overline{C} \cap \Lambda_W$ (množinou striktně dominantních vah) a množinou všech tříd vzájemě ekvivalentních ireducibilních konečnědimenzionálních reprezentací. Váhy reprezentace Γ_α jsou takové elementy Λ_W, které jsou kongruentní s α modulo Λ_R a ležící v konvexním obalu bodů konjugovaných k α pomocí Weylovy grupy.

Důkaz: Viz Fulton, Harris [10].

Ú m l u v a : Reprezentaci odpovídající (jednoznačně) váze $\mu \in \Lambda_W \cap \overline{C}$ značme Γ_μ.

Specifikujme parametrizaci D průniku $C \cap \Lambda_W$ pro případ $so(4, \mathbb{C})$.
Předně, fundamentální systém kořenového systému je $\Phi = \{L_1 - L_2, L_1 + L_2\}$.
Kořenová mříž $\Lambda_R = \mathbb{Z}\Phi$.
Uzavřenou Weylovu komoru $\overline{C} = \{(a_1, a_2) | a_1 \geq |a_2|\}$ si lze představit jako I. kvadrant pootočený o $(-\pi/4)$ (tj. ve směru pohybu hodinových ručiček).
Fundamentální váhy jsou: $\omega_1 = \frac{1}{2}(L_1 - L_2)$, $\omega_2 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$.
Váhová mříž $\Lambda_W = \mathbb{Z}\{\omega_1, \omega_2\}$.
Průnik $\overline{C} \cap \Lambda_W$ je semigrupou volně $\mathbb{Z}_0^+$-generovanou vektory ω_1, ω_2. Parametri-

zace D množiny striktně dominantních vah $C \cap \Lambda_W$ je dána předpisem $D = \{\vec{m} = (m_1, m_2) | m_1 > |m_2|, m_i \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}/2, i = 1, 2\}$.

1.2 Rozklady tenzorových součinů $\Gamma_{\vec{m}} \otimes \Gamma_{\vec{n}}$.

Jelikož se budeme zabývat tenzorovými součiny $Spin(1,3)_+$-reprezentací, uveďme algoritmus, který popisuje rozklad tenzorových součinů $\Gamma_{\vec{m}} \otimes \Gamma_{\vec{n}}$ (tenzorový součin $so(2k, \mathbb{C})$-reprezentací) na ireducibilní komponenty. Algoritmus převzat od Bureš, Souček [11].

Algoritmus pro rozklad reprezentace $\Gamma_{\vec{m}} \otimes \Gamma_{\vec{n}}$ **algebry** $so(2k, \mathbb{C})$.

Označme $\vec{\delta} := (k-1, k-2, ..., 0)$.

1. Pro rozklad $\Gamma_{\vec{m}} \otimes \Gamma_{\vec{n}}$ napiš všechny váhy $\vec{k}$ reprezentace $\Gamma_{\vec{m}}$ včetně násobnosti.

2. Spočti $\vec{\tau} := \vec{\delta} + \vec{n}$ a přičti ji k váze $\vec{k}$.

   (a) Pokud je výsledek v D, odečti $\vec{\delta}$ a jdi k 3.

   (b) Pokud je výsledek v $\overline{D} - D$, vyřaď jej a jdi k 4.

   (c) Pokud výsledek není v $\overline{D}$, aplikuj $\sigma \in W$ (Weylova grupa Lieovy algebry $so(2k, \mathbb{C})$), abys obdržel element $\overline{D}$. Pokud je na hraně ($\in \overline{D} - D$), vyřaď jej a jdi k 4.

3. Výsledná váha $\vec{k} + \vec{n}$ je nejvyšší vahou reprezentace vystupující v rozkladu $\Gamma_{\vec{m}} \otimes \Gamma_{\vec{n}}$. (Pokud byl užit bod 2 (c), mohou se některé váhy vzájemně vyrušit.)

4. Pokud nebyly vyčerpány všechny váhy $\Gamma_{\vec{m}}$, jdi k 2 a místo "váha" uvažuj "další váha"; jinak skonči.

Aplikujme tento algoritmus pro $so(4, \mathbb{C})$. V tomto případě je $\vec{\delta} = (1, 0)$.

Úmluva: Nechť V je standardní reprezentace $so(4, \mathbb{C})$, tj. V je jako vektorový prostor izomorfní $\mathbb{C}^4$ a akce $so(4, \mathbb{C})$ je tautologická. Její nejvyšší váha je $(1, 0) = \vec{\delta}$. Všechny váhy reprezentace V jsou: $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$. Tato reprezentace je ireducibilní, a proto $V \simeq \Gamma_{1,0}$. Váhy prostoru $\bigwedge^2 V$ jsou součty po dvou různých vah reprezentace V, tj. $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (0,0)$, poslední s multiplicitou dva. Nejvyšší vahou je $(1,1)$. $\bigwedge^2 V$ není ireducibilní, jak tomu bylo v případě V, ale rozpadá se podle $\bigwedge^2 V \simeq \Gamma_{1,1} \oplus \Gamma_{1,-1}$ (Odtud mj. plyne, že $so(4,\mathbb{C}) \simeq sl(2,\mathbb{C}) \times sl(2,\mathbb{C})$, což se projeví i v následujícím paragrafu.) Všechny váhy reprezentace $\Gamma_{1,1}$ jsou $(1,1),(0,0),(-1,-1)$. Všechny váhy reprezentace $\Gamma_{1,-1}$ jsou $(1,-1),(0,0),(-1,1)$. Označme $S^+ := \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ a $S^- := \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$, tzv. $(+)$-*spinorovou* a $(-)$-*spinorovou reprezentaci*. (S^+ a S^- jsou zároveň fundamentální reprezentace.)

1. Spočtěme rozklady $V \otimes S^+$ a $\bigwedge^2 V \otimes S^+$.

   (a) Nejdříve spočtěme rozklad $V \otimes S^+$. $\vec{m} = (1,0)$, $\vec{k} \in \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$, $\vec{n} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\vec{\tau} = \vec{\delta} + \vec{n} = (1,0) + (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

      i. Začněmě vahou $\vec{k} = (1,0)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2})+(1,0) = (\frac{5}{2},\frac{1}{2}) \in D$, odtud $\Gamma_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ vystupuje v rozkladu.

      ii. $\vec{k} = (0,1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (0,1) = (\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \in \overline{D} - D$ leží na hraně, a proto jej vyřadíme.

      iii. $\vec{k} = (-1,0)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (-1,0) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in \overline{D} - D$ leží na hraně, a proto jej vyřadíme.

      iv. $\vec{k} = (0,-1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (0,-1) = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) \in D$, a proto $\Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ vystupuje v rozkladu.

      Celkem tedy: $\Gamma_{1,0} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \Gamma_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

   (b) Dále spočtěme rozklad reprezentace $\bigwedge^2 V \otimes S^+ = (\Gamma_{1,1} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}) \oplus (\Gamma_{1,-1} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})$. Postupně rozložme oba dva tenzorové součiny v závorkách.

      i. Nejdříve rozložme první závorku. $\vec{m} = (1,1)$, $\vec{k} \in \{(1,1),(0,0),(-1,-1)\}$, $\vec{n} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\vec{\tau} = \vec{\delta} + \vec{n} = (1,0) + (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

         A. $\vec{k} = (1,1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (1,1) = (\frac{5}{2},\frac{3}{2}) \in D$, a proto se $\Gamma_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}$ vyskytuje v rozkladu.

         B. $\vec{k} = (0,0)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (0,0) = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \in D$, a proto $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ se vyskytuje v rozkladu.

         C. $\vec{k} = (-1,-1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (-1,-1) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \in \overline{D} - D$ leží na hraně, a proto jej vyřadíme.

ii. Nyní rozložme druhou závorku. $\vec{m} = (1,-1)$, $\vec{k} \in \{(1,-1),(0,0),(-1,1)\}$, $\vec{n} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\vec{\tau} = \vec{\delta} + \vec{n} = (1,0) + (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

A. $\vec{k} = (1,-1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (1,-1) = (\frac{5}{2},-\frac{1}{2}) \in D$, odtud $\Gamma_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$ se vyskytuje v rozkladu.

B. $\vec{k} = (0,0)$. Opět dostaneme, že $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ se vyskytuje v rozkladu.

C. $\vec{k} = (-1,1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + (-1,1) = (\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \notin \overline{D}$. Aplikujeme-li transpozici (12), dostaneme $(\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \in D$. Díky znaménku se však v konečném součtu vyruší s reprezentací $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, kterou jsme obdrželi pro váhu $\vec{k} = (0,0)$.

Celkem tedy: $\bigwedge^2 V \otimes S^+ = \Gamma_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}$.

2. Proveďme obdobné výpočty pro reprezentaci S^-, tj. spočítejme rozklady $V \otimes S^-$ a $\bigwedge^2 \otimes S^-$.

(a) Nejprve rozložme $V \otimes S^- = \Gamma_{1,0} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$. $\vec{m} = (1,0)$, $\vec{k} \in \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$, $\vec{n} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $\vec{\tau} := \vec{\delta}+\vec{n} = (1,0)+(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

i. $\vec{k} = (1,0)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) + (1,0) = (\frac{5}{2},-\frac{1}{2}) \in D$, a proto se reprezentace $\Gamma_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$ v rozkladu vyskytuje.

ii. $\vec{k} = (0,1)$, $\vec{\tau}+\vec{k} = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) + (0,1) = (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \in D$, a proto se reprezentace $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ v rozkladu vyskytuje.

iii. $\vec{k} = (-1,0)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) + (-1,0) = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \in \overline{D} - D$ leží na hraně, a proto jej vyřadíme.

iv. $\vec{k} = (0,-1)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) + (0,-1) = (\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) \in \overline{D} - D$ leží na hraně, a proto jej vyřadíme.

Celkem tedy: $\Gamma_{1,0} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$.

(b) Rozložme $\bigwedge^2 V \otimes S^- = (\Gamma_{1,1} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}) \oplus (\Gamma_{1,-1} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$.

i. Opět rozložme nejdříve první závorku. $\vec{m} = (1,1)$, $\vec{k} \in \{(1,1),(0,0),(-1,-1)\}$, $\vec{n} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $\vec{\tau} := \vec{\delta} + \vec{n} = (1,0) + (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

A. $\vec{k} = (1,1)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + (1,1) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \in D$, a proto se $\Gamma_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ vyskytuje v rozkladu.

B. $\vec{k} = (0,0)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + (0,0) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \in D$, a proto se $\Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ vyskytuje v rozkladu.

C. $\vec{k} = (-1,-1)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + (-1,-1) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \notin \overline{D}$ Aplikujeme-li transpozici (12) se současnou změnou znaménka, dostaneme $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in D$, a proto se $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ vyskytuje v rozkladu.

ii. Rozložme druhou závorku. V tomto případě je $\vec{m} = (1,-1), \vec{k} \in \{(1,-1),(0,0),(1,-1)\}$, $\vec{n} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\vec{\tau} = \vec{\delta} + \vec{n} = (1,0) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

A. $\vec{k} = (1,-1)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + (1,-1) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) \in D$, a proto se $\Gamma_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}$ vyskytuje v rozkladu.

B. $\vec{k} = (0,0)$. Tento případ poskytne stejný výsledek jako při rozkladu první závorky. $\Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ se vyskytuje v rozkladu.

C. $\vec{k} = (-1,1)$, $\vec{\tau} + \vec{k} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + (-1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ leží na hraně, a proto jej vyřadíme.

Celkem tedy dostaneme $\Gamma_{1,1} \otimes \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \Gamma_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} \oplus \Gamma_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

Nakonec se zabývejme jedním izomorfizmem. Dokážeme, že $\bigwedge^j V \simeq \bigwedge^{4-j} V$, $j = 0,...,4$, jako reprezentace. Víme, že $\bigwedge^j V \simeq \bigwedge^{4-j} V$ jako vektorové prostory. Definujme tento izomorfizmus explicitně. Nejprve zaveďme párování $(,) : \bigwedge^j V \times \bigwedge^{4-j} V \to \bigwedge^4 V$, definované $(e,f) := e \wedge f = gvol$, kde vol je forma objemu na V, a následně párování $<,>$: $\bigwedge^j V \times \bigwedge^{4-j} V \to \mathbb{C}$, definované $< e, f >:= g$. Snadno zjistíme, že toto párování je nedegenerované, a proto zadává dualitu. Navíc je toto párování invariantní vůči $SO(n)$, neboť rotace zachovávají objem. Pro $A \in SO(n)$ platí: $(Ae, Af) = Ae \wedge Af = gvol$, kde $(e,f) = gvol$. Tato invariance se přenáší na uroveň algeber. Odtud plyne, že $\bigwedge^j V \simeq \bigwedge^{4-j} V$ jako reprezentace, $j = 0,...,4$.

Věta 2: (Symetrické součiny spinorových reprezentací)

Pro každé $k, l \in \mathbb{N}_0$ je $\odot^k S^+ \otimes \odot^l S^-$ ireducibilní reprezentace algebry $so(4,\mathbb{C})$. Nejvyšší váha této reprezentace je $\vec{\alpha} = ((k+l)/2, (k-l)/2)$.

Důkaz: viz Bureš, Souček [11].

P o z n á m k a: Prvky těchto tenzorových součinů se v literatuře někdy nazývají *spinory*. My budeme považovat za spinory ideově tytéž objekty, definované však jinak - viz následující kapitolu.

Dík výpočtům předchozích rozkladů, výše učiněné úvaze o 1-1 korespondenci mezi ireducibilními konečnědimenzionálními reprezentacemi $Spin(1,l)_+$ a $so(n,\mathbb{C})$, předchozí větě a větě o unicitě a existenci můžeme výsledky shrnout v následující větu.

Věta 3: (O rozkladech tenzorových součinů reprezentací grupy $Spin(1,3)_+$)
Platí následující rozklady:

$$\begin{array}{cc}
\bigwedge^0 V\otimes S^+ = S^+ & \bigwedge^0 V\otimes S^- = S^- \\
\bigwedge^1 V\otimes S^+ = S^- \oplus (\odot^2 S^+ \otimes S^-) & \bigwedge^1 V\otimes S^- = S^+ \oplus (\odot^2 S^- \otimes S^+) \\
\bigwedge^2 V\otimes S^+ = S^+ \oplus (\odot^2 S^- \otimes S^+) \oplus \odot^3 S^+ & \bigwedge^2 V\otimes S^- = S^- \oplus (\odot^2 S^+ \otimes S^-) \oplus \odot^3 S^- \\
\bigwedge^3 V\otimes S^+ = S^- \oplus (\odot^2 S^+ \otimes S^-) & \bigwedge^3 V\otimes S^- = S^+ \oplus (\odot^2 S^- \otimes S^+) \\
\bigwedge^4 V\otimes S^+ = S^+ & \bigwedge^4 V\otimes S^- = S^-
\end{array}$$

§2. Reprezentace $Spin(1,3)_+$ pomocí grupy $SL(2,\mathbb{C})$.

Úvod. Tento paragraf může být vynechán, aniž se poruší návaznost v struktuře práce. Je v něm realizováno nakrytí λ pro speciální případ grupy $SO(1,3)_+$, které bylo v předchozí kapitole realizováno méně názorně a bez některých důkazů. Navíc pro reprezentaci $Spin(1,3)_+$ není třeba užívat v předchozím paragrafu uvedeného algoritmu, ale jednodnoduchou reprezentační teorii grupy $SL(2,\mathbb{C})$, jak v tomto paragrafu ukážeme.

Zkonstruujme univerzální nakrytí grupy $SO(1,3)_+$ (vlastní Lorentzovy grupy, tj. lineárních izometrií reálného Minkowského prostoročasu, které zachovávají časoprostorovou i časovou orientaci). Libovolnou hermitovskou matici řádu dva [3] lze jednoznačně zapsat ve formě

$$H = \begin{pmatrix} x^3+x^4 & x^1+ix^2 \\ x^1-ix^2 & -x^3+x^4 \end{pmatrix},$$

[3] Tj. matici H řádu dva, pro kterou platí $H^\dagger = H$. Vektorový prostor hermitovských matic řádu n označme $H(n,\mathbb{C})$.

kde $x^1, ..., x^4 \in \mathbb{R}$. Existuje tedy izomorfizmus vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a $H(2,\mathbb{C})$. Tento izomorfizmus označme σ, $\sigma : \mathbb{R}^4 \to H(2,\mathbb{C})$. Nechť $A \in SL(2,\mathbb{C})$ (orientaci zachovávající lineární izovolumina). Pro každou takovou matici A definujme zobrazení $M_A : H(2,\mathbb{C}) \to M(2,2;\mathbb{C})$ formulí $M_A(H) := AHA^\dagger$. Toto zobrazení je do $H(2,\mathbb{C})$, neboť $(M_A(H))^\dagger = (AHA^\dagger)^\dagger = AHA^\dagger = M_A(H)$. Zobrazení M_A zachovává determinant matice H, neboť $\det M_A(H) = \det(AHA^\dagger) = \det A \det H \det A^\dagger = 1 \det H 1 = \det H$. Zapišme matici $M_A(H)$ ve tvaru

$$M_A(H) = \begin{pmatrix} x'^3 + x'^4 & x'^1 + ix'^2 \\ x'^1 - ix'^2 & -x'^3 + x'^4 \end{pmatrix}.$$

Pro každou $A \in SL(2,\mathbb{C})$ definujme zobrazení $\Lambda_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\Lambda_A(x) := \sigma^{-1}(M_A\sigma(x))$.

Označme $x' := \Lambda_A(x)$. Jelikož $\eta(\Lambda_A x, \Lambda_A x)$ [4] $= \eta(x', x') = (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 - (x'^4)^2 = \det M_A(H) = \det(H) = (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$, tak $\eta(\Lambda_A(x), \Lambda_A(x)) = \eta(x, x)$, a proto Λ_A je Lorentzova transformace. Definujme zobrazení $\lambda : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(1,3)$ předpisem $\lambda : A \mapsto \Lambda_A$. Zobrazení λ je epimorfizmus $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$ a 2-1, viz Sternberg [12]. Jelikož $SL(2,\mathbb{C})$ je jednoduše souvislá Lieova grupa, je univerzálním nakrytím 2-souvislé vlastní Lorentzovy grupy $SO(1,3)_+$:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to SL(2,\mathbb{C}) \to SO(1,3)_+ \to 0.$$

Totéž je pravda pro grupu $Spin(1,3)_+$:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(1,3)_+ \to SO(1,3)_+ \to 0.$$

Proto $Spin(1,3)_+ \simeq SL(2,\mathbb{C})$ je reálný izomorfizmus reálných Lieových grup.

Při klasifikaci reprezentací grupy $SL(2,\mathbb{C})$ lze dík jednoduché souvislosti přejít k Lieově algebře $sl(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$. Jelikož komplexifikace $sl(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ není jednoduchá, platí, že každá ireducibilní reprezentace $sl(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ je tvaru $\Gamma_\lambda \otimes \overline{\Gamma}_\mu$, kde $\Gamma_\lambda, \Gamma_\mu$ jsou reprezentace $sl(2,\mathbb{C})$ (jednoznačně) příslušné k nejvyšším vahám μ, ν.

Dík výše ukázanému izomorfizmu $Spin(1,3)_+ \simeq SL(2,\mathbb{C})$ lze konečněrozměrné komplexní ireducibilní reprezentace grupy $Spin(1,3)_+$ klasifikovat pomocí tenzorových součinů $\Gamma_\mu \otimes \overline{\Gamma}_\nu$ komplexních reprezentací Γ_μ, Γ_ν komplexní algebry $sl(2,\mathbb{C})$.

[4] η je Minkowského metrika tj. symetrická bilineární 2-forma, jejíž matice $[\eta_{ab}]$ nabývá diagonálního tvaru $[\eta_{ab}] = diag(1,-1,-1,-1)$.

(Na symbolické úrovni nerozlišujeme mezi reprezentací jednoduše souvislé grupy a reprezentací odpovídající algebry.)

Strukturní a reprezentační teorie algebry $sl(2,\mathbb{C})$. Lieova algebra $sl(2,\mathbb{C})$ grupy $SL(2,\mathbb{C})$ je tvořena všemi maticemi řádu dva nad tělesem komplexních čísel s nulovou stopou: $sl(2,\mathbb{C}) = \{A \in M(2,2;\mathbb{C}) | Sp(A) = 0\}$. Algebra je jako vektorový prostor $\mathbb{C}$-generovaná maticemi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice splňují relace: $[X,Y] = H, [H,Y] = 2X, [H,X] = -2Y$.

Citujme známý výsledek z teorie reprezentací algebry $sl(2,\mathbb{C})$.

Věta 4:

Pro každou komplexní konečnědimenzionální ireducibilní reprezentaci ρ algebry $sl(2,\mathbb{C})$ existuje $k \in \mathrm{N}$, že $\rho \simeq \odot^k S$, kde S je fundamentální reprezentace $sl(2,\mathbb{C})$.

Důkaz: viz Fulton, Harris [10].

Poznámka: Z předchozí věty plyne, že reprezentace Γ_μ a $\overline{\Gamma}_\mu$ jsou ekvivalentní jako reprezentace $sl(2,\mathbb{C})$, neboť jsou téže dimenze a podle věty 4 existuje v každé dimenzi právě jedna ireducibilní reprezentace (až na ekvivalenci).

Za bázi algebry $sl(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ zvolíme matice

$$h_1 := H, h_2 := iH, x_1 := X, x_2 := iX, y_1 := Y, y_2 := iY.$$

Úmluva: Označme reprezentaci $\Gamma_\mu \otimes \overline{\Gamma}_\nu =: \Gamma_{\mu,\nu}$.

Jelikož Cartanova podalgebra algebry $sl(2,\mathbb{C})$ je jednodimenzionální, lze po volbě báze váhu μ identifikovat s celým nezáporným číslem μ. (Tj. používáme jinou konvenci než v minulém paragrafu.) Platí $\dim_\mathbb{C} \Gamma_\mu = \mu$. Protože $\dim_\mathbb{C} \odot^k S = k+1$, plyne odtud, že $\Gamma_{k+1} \simeq \odot^k S$, neboť v každé dimenzi existuje pouze jedna ireducibilní reprezentace.

Ú m l u v a: Označme $S^+ := S, S^- := \overline{S}$ reprezentace $sl(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$.

Na základě výše dokázaného izomorfizmu $SL(2,\mathbb{C}) \simeq Spin(1,3)_+$ dostáváme:

Věta 5: (Reprezentace $Spin(1,3)_+$)
Existuje 1-1 korespondence mezi třídami ekvivalentních komplexních ireducibilních konečnědimenzionálních reprezentací grupy $Spin(1,3)_+$ a množinou $C := \{[k,l] | k,l \in \mathrm{N}_0\}$. Každá taková reprezentace ρ splňuje $\rho \simeq \odot^k S^+ \otimes \odot^l S^-$. Dimenze této reprezentace je $dim\rho = (k+1)(l+1)$.

P o z n á m k a: Z izomorfizmu $sl(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ a $spin(1,3)$ plyne, že je možno při rozkladu tenzorových součinů reprezentací algebry $spin(1,3)$ používat *Clebsch-Gordanovy řady.* Clebsch-Gordanova řada je následující rozklad na ireducibilní komponenty:

$$\Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu = \Gamma_{|\mu-\nu|+1} \oplus \Gamma_{|\mu-\mu|+3} \oplus ... \oplus \Gamma_{\mu+\mu-3} \oplus \Gamma_{\mu+\nu-1}$$

Odtud je snadno vidět, že např. k rozkladu reprezentace $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \otimes \Gamma_{1,0}$, který jsme počítali v minulém paragrafu, lze dospět jednodušeji. Jedná se o dekompozici $S^+ \otimes (S^+ \otimes S^-) = (S^+ \otimes S^+) \otimes S^- = (\Gamma_2 \otimes \Gamma_2) \otimes S^- = (\Gamma_1 \oplus \Gamma_3) \otimes S^- = (\Gamma_1 \otimes S^-) \oplus (\Gamma_3 \otimes S^-) = S^- \oplus (\odot^2 S^+ \otimes S^-)$, která je identická s dekompozicí, kterou jsme obdrželi v předchozím paragrafu, viz větu o rozkladu reprezentací grupy $Spin(1,3)_+$.

5 Metoda abstraktních indexů.

Úvod. V této kapitole zavedeme tzv. (Penroseovu) metodu abstraktních indexů. Na první pohled by se mohlo zdát, že namísto toho, abychom počítali s tenzory abstraktně (a tenzor považovali za multilineární funkcionál), provádíme výpočty ve složkách, a tak se vystavujeme obtížím s tím spojeným (např. závislosti výsledku nebo definice na zvolené bázi). Opak je pravdou, metoda abstraktních indexů sice indexy používá, ale nejedná se o výpočty v konkrétní bázi.

§1. Abstraktní indexy pro libovolnou tenzorovou algebru.

1.1 Vektory a kovektory.

1. Nechť H^+ je libovolný H-modul, kde H je libovolný okruh. Nechť H_+ je jeho duál. Nechť $L = \{\alpha, \beta, ..., \omega\}$ je množina symbolů, kterou pro naše účely budeme nazývat *množinou návěští*.

2. Pro každé $\phi \in L$ definujme $H^\phi := H^+ \times \{\phi\}$. Pro $\xi \in H^+$ označme jemu odpovídající element v H^ϕ symbolem $\xi^\phi \in H^\phi$, definovaným $\xi^\phi := (\xi, \phi)$. Pro $\xi^\phi, \eta^\phi \in H^\phi$ definujme $\xi^\phi + \eta^\phi := (\xi + \eta)^\phi = ((\xi + \eta), \phi)$. Násobení definujme $r\xi^\phi = (r\xi)^\phi = ((r\xi), \phi), r \in H$. S těmito operacemi je H^ϕ H-modul.

3. Dále definujme H_ϕ pro H_+, $H_\phi := H_+ \times \{\phi\}, \phi \in L$. Nechť $\eta_\phi \in H_\phi$, tj. $\eta_\phi := (\eta, \phi)$ pro $\eta \in H_+$. Nechť $\xi^\phi \in H^\phi$, $\eta_\phi \xi^\phi := \eta_\phi(\xi^\phi) = \eta(\xi) \in H$. Tato definice umožňuje H_ϕ považovat za duál k H^ϕ. Strukturu H-modulu na H_ϕ definujme analogicky případu H^ϕ.

1.2 Tenzory.

Nechť $p, q \in \mathrm{N}_0$, $\{\alpha, ..., \delta\} \subseteq L$ resp. $\{\lambda, ..., \nu\} \subseteq L$ jsou dvě množiny s prázdným průnikem o počtu prvků p resp. q. *Tenzorem* $A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}$ *typu* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ nazveme libovolné H-lineární zobrazení

$$A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu} : H_\alpha \times ... \times H_\delta \times H^\lambda \times ... \times H^\nu \to H$$

Množinu těchto tenzorů značme $H^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}$. Namísto $A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}(Q_\alpha, ..., T_\delta, U^\lambda, ..., W^\nu)$ pišme $A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}Q_\alpha...T_\delta U^\lambda...W^\nu$. Z tohoto zápisu je vidět, že na pořadí vektorů nebo kovektorů nezávisí, neboť jsou vybaveny návěštím, které umožňuje identifikovat jejich "správnou" polohu. Proto např.

$$A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}Q_\alpha R_\beta...T_\delta U^\lambda...W^\nu = A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}R_\beta Q_\alpha...T_\delta U^\lambda...W^\nu.$$

Samozřejmě nelze (obecně) identifikovat např.

$$A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}Q_\beta R_\alpha...T_\delta U^\lambda...W^\nu = A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}R_\beta Q_\alpha...T_\delta U^\lambda...W^\nu.$$

1.3 Tenzorové operace.

1. Součet je zobrazení $H^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu} \times H^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu} \to H^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}$ definované pro libovolné podmnožiny množiny návěští, pro něž $\{\alpha, ..., \delta\} \cap \{\lambda, ..., \nu\} = \emptyset$. Pro $A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}$, $B^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}$ definujeme součet

$$(A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu} + B^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu})Q_\alpha...R_\delta U^\lambda...W^\nu := A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}Q_\alpha...R_\delta U^\lambda...W^\nu + B^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}Q_\alpha...R_\delta U^\lambda...W^\nu.$$

Takto definovaný součet je zřejmě komutativní a asociativní.

Nyní definujme operaci součinu. Zde se poprvé objeví přednost metody abstraktních indexů, neboť v jejich formalizmu se bude jevit součin komutativní.

2. Součin je zobrazení $H^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu} \times H^{\rho...\tau}_{\phi...\psi} \to H^{\alpha...\delta\rho...\tau}_{\lambda...\nu\phi...\psi}$ definované pro libovolnou čtveřici po dvou disjunktních podmnožin $\{\alpha, ..., \delta\}, \{\lambda, ..., \nu\}, \{\rho, ..., \tau\}, \{\phi, ..., \psi\}$ množiny návěští L předpisem:

$$(A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}B^{\rho...\tau}_{\phi...\psi})Q_\alpha...T_\delta E_\rho...H_\tau U^\lambda...W^\nu I^\phi...L^\psi := (A^{\alpha...\delta}_{\lambda...\nu}Q_\alpha...T_\delta U^\lambda...W^\nu)(B^{\rho...\tau}_{\phi...\psi}E_\rho...H_\tau I^\phi...L^\psi).$$

Z této definice lze vidět, že součin je komutativní, což se může jevit paradoxně, uvážíme-li, že "invariantní" tenzorový součin obecně komutativní není ($A \otimes B \neq B \otimes A$). Je tomu tak právě dík metodě abstraktních indexů. Nekomutativnosti v "invariantním" případě odpovídá v našem formalizmu zřejmý vztah:

$A^{\alpha \ldots}_{\lambda \ldots} B^{\ldots}_{\ldots} \neq B^{\alpha \ldots}_{\lambda \ldots} A^{\ldots}_{\ldots}$

Součin je distributivní vůči součtu a asociativní.

3. Záměna indexů je zobrazení $H^{\alpha \ldots \delta}_{\lambda \ldots \nu} \to H^{\pi \ldots \tau}_{\phi \ldots \psi}$ definované na každém $H^{\ldots}_{\ldots}$ pro libovolné podmnožiny množiny návěští L, pro něž $\{\alpha, ..., \delta\}$ má stejný počet prvků jako $\{\pi, ..., \tau\}$, zrovna tak jako $\{\lambda, ..., \nu\}$ má stejný počet prvků jako $\{\phi, ..., \psi\}$. Navíc není nutné, aby $\{\alpha, ..., \delta, \lambda, ..., \nu\} \cap \{\pi, ..., \tau, \phi, ..., \psi\} = \emptyset$. Stále předpokládáme, že $\{\alpha, ..., \delta\}$ a $\{\lambda, ..., \nu\}$ resp. $\{\pi, ..., \tau\}$ a $\{\phi, ..., \psi\}$ představují páry, jejichž členy se v rámci každého páru neprotínají. Nechť $\sigma : \{\alpha, ..., \delta\} \to \{\pi, ..., \tau\}$, $\sigma' : \{\lambda, ..., \nu\} \to \{\phi, ..., \psi\}$ jsou bijekce příslušných množin. Pro $A^{\alpha \ldots \delta}_{\lambda \ldots \nu}$ definujme $A^{\sigma(\alpha) \ldots \sigma(\delta)}_{\sigma'(\lambda) \ldots \sigma'(\nu)}$ formulí

$$A^{\sigma(\alpha) \ldots \sigma(\delta)}_{\sigma'(\lambda) \ldots \sigma'(\nu)} Q_{\sigma(\alpha)} \ldots R_{\sigma(\delta)} U^{\sigma'(\lambda)} \ldots W^{\sigma'(\nu)} := A^{\alpha \ldots \delta}_{\lambda \ldots \nu} Q_{\sigma(\alpha)} \ldots R_{\sigma(\delta)} U^{\sigma'(\lambda)} \ldots W^{\sigma'(\nu)}.$$

Operace záměny indexů samozřejmě komutuje s výše definovaným sčítáním i se součinem.

Speciální případ záměny indexů představuje *permutace indexů*. Tehdy za $\{\pi, ..., \tau\}$ vezmeme $\{\alpha, ..., \delta\}$ a analogicky za $\{\phi, ..., \psi\}$ vezmeme $\{\lambda, ..., \nu\}$. Permutaci indexů využijeme k definici symetrizace resp. antisymetrizace v párech indexů. Definici uveďme na příkladu. Nechť $A_{\alpha\beta} \in H_{\alpha\beta}$, definujme $B_{\alpha\beta} \in H_{\alpha\beta}$, který vznikne permutací indexů $A_{\alpha\beta} \mapsto A_{\beta\alpha} \in H_{\alpha\beta} : B_{\alpha\beta} := A_{\beta\alpha}$. *Antisymetrizace* je definována $A_{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta})$. *Symetrizace* $A_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta})$.

4. $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$**-kontrakce** je zobrazení $H^{\alpha \ldots \delta\xi}_{\lambda \ldots \nu\eta} \to H^{\alpha \ldots \delta}_{\lambda \ldots \nu}$ definované pro libovolné neprotínající se množiny indexů $\{\alpha, ..., \delta\}$, $\{\lambda, ..., \nu\}$ a navíc ani ξ, ani η nejsou prvky $\{\alpha, ..., \delta\} \cup \{\lambda, ..., \nu\}$.

Jelikož budeme v dalším textu potřebovat pouze moduly s konečnou bází, omezme naši definici kontrakce na tento případ. (Obecně lze definovat kontrakci pro tenzory, které Penrose nazývá typu II, a v případě tzv. úplně reflexivních modulů ukázat ekvivalenci definic.)

Nechť $\delta^{\alpha}_{\mathbf{1}}, ..., \delta^{\alpha}_{\mathbf{n}}$ je báze modulu H^{α} (předpokládáme, že taková báze existuje), tj.

$\delta_{\mathbf{i}}^{\alpha} \in H^{\alpha}$, $\mathbf{i} = \mathbf{1}, ..., \mathbf{n}$, a pro každý $V^{\alpha} \in H^{\alpha}$ existují jednoznačně určená $V^{\mathbf{1}}, ..., V^{\mathbf{n}} \in H$, že $V^{\alpha} = V^{\mathbf{1}}\delta_{\mathbf{1}}^{\alpha} + ... + V^{\mathbf{n}}\delta_{\mathbf{n}}^{\alpha} (= V^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^{\alpha})$. V členu v závorce jsme použili sumační konvence.

Poznámka: Sumační konvenci jsme dosud v zápisu pomocí abstraktních indexů nepoužili, ačkoliv se již několikrát vyskytly tytéž indexy v poloze jak dole, tak nahoře. Aby nedošlo k nedorozumění, budeme sumační konvenci používat jen pro tučně sázené indexy.

Definujme duální bázi $\{\delta_{\alpha}^{\mathbf{1}}, ..., \delta_{\alpha}^{\mathbf{n}}\} \subseteq H_{\alpha}$ k bázi $\{\delta_{\mathbf{1}}^{\alpha}, ..., \delta_{\mathbf{n}}^{\alpha}\}$, tj. její prvky splňují: $\delta_{\mathbf{i}}^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\mathbf{j}} = \delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$, kde $\delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ je Kroneckerovo delta (indexy jsou tučné!).

Pomocí těchto bází definujme $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$-kontrakci tenzoru $A_{\lambda...\nu\eta}^{\alpha...\delta\xi}$ jako tenzor, který označíme $A_{\lambda...\nu\xi}^{\alpha...\delta\xi}$, $A_{\lambda...\nu\xi}^{\alpha...\delta\xi} := A_{\lambda...\nu\eta}^{\alpha...\delta\xi}\delta_{\xi}^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^{\eta}$.

Poznámka: Výsledek kontrakce nezávisí na volbě báze modulu H^{α}.

5. Komponenty

Nechť $\{\delta_{\mathbf{a}}^{\alpha}\}_{i=1,...,n}$ je báze H^{α}. Pak *komponenty* $Q_{\mathbf{l}...\mathbf{n}}^{\mathbf{a}...\mathbf{d}}$ tenzoru $Q_{\lambda...\nu}^{\alpha...\delta} \in S_{\lambda...\nu}^{\alpha...\delta}$ jsou definovány předpisem

$$Q_{\mathbf{l}...\mathbf{n}}^{\mathbf{a}...\mathbf{d}} := Q_{\lambda...\nu}^{\alpha...\delta}\delta_{\alpha}^{\mathbf{a}}...\delta_{\delta}^{\mathbf{d}}\delta_{\mathbf{l}}^{\lambda}...\delta_{\mathbf{n}}^{\nu}$$

§2. Abstraktní indexy pro spinorovou algebru.

V tomto paragrafu budeme definovat jeden vektorový prostor, tzv. spinorový prostor. Ukážeme, že tento vektorový prostor je symplektickým vektorovým prostorem. Dále zavedeme spinorovou algebru, tj. tenzorovou algebrou spinorového prostoru, a budeme na ni aplikovat metodu abstraktních indexů.

Definice 6: (Spinorový prostor)

Každý komplexní prostor S, na němž existuje antisymetrická $\mathbb{C}$-bilineární forma $\{,\} : S \times S \to \mathbb{C}$, splňující

1. Leibnizovo pravidlo: $(\forall \phi, \psi, \xi \in S)(\{\phi, \psi\}\xi + \{\xi, \phi\}\psi + \{\psi, \xi\}\phi = 0)$ a zároveň

2. $(\exists \psi, \phi \in S)(\{\psi, \phi\} \neq 0)$,

nazveme *spinorovým prostorem.*

Ú m l u v a: Někdy budeme bilineární formu $\{,\}$ nazývat jednoduše *součinem.*

P o z n á m k a: Z definice plyne, že spinorový prostor je speciálním presymplektickým vektorovým prostorem. K tomu, abychom dokázali, že je symplektickým vektorovým prostorem, postačuje dokázat následující lemma.

Lemma:

Spinorový prostor je komplexní vektorový prostor (komplexní) dimenze 2, $\dim_{\mathbb{C}} S = 2$.

Důkaz: Nechť $\psi, \phi \in S$ splňují $\{\psi, \phi\} \neq 0$. Jejich existence je zaručena druhou podmínkou kladenou na spinorový prostor v jeho definici. Z antisymetrie a bilinearity plyne, že $\{\psi, \lambda\psi\} = \lambda\{\psi, \psi\} = 0$. Odtud plyne, že ψ a ϕ jsou lineárně nezávislé vektory. Na druhou stranu, nechť $\xi \in S$ je libovolný prvek spinorového prostoru, z Leibnizovy podmínky dostaneme, že platí:

$$\{\phi, \psi\}\xi = -\{\xi, \phi\}\psi - \{\psi, \xi\}\phi.$$

Jelikož $\{\phi, \psi\} \neq 0$, dostáváme, že ξ je lineární kombinací ϕ a ψ.

P o z n á m k a: Protože prostor S je dvoudimenzionální, je matice vzhledem k některé bázi spinorového prostoru S bilineární formy $\{,\}$ antisymetrickou maticí 2×2. Všechny antisymetrické matice typu 2×2 jsou násobky matice $e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pokud by matice formy $\{,\}$ byla nulovým násobkem předchozí matice, nebyla by splněna druhá podmínka v definici spinorového prostoru. Odtud plyne, že součin $\{,\}$ je nedegenerovaný. Z tohoto důvodu je spinorový prostor nejen presymplektickým, ale i symplektickým vektorovým prostorem.

P o z n á m k a (Unicita $(S; \{,\})$): Z předchozího lemmatu plyne, že spinorový prostor S je ve smyslu izomorfizmu vektorových prostorů jediný. Navíc matice součinu je nenulovým násobkem v předchozí poznámce uvedené antisymetrické matice e. Odtud plyne, že až na volbu báze a nenulový násobek je spinorový prostor $(S; \{,\})$ určen jednoznačně. Alternativně by bylo lze definovat spinorový prostor jako až na izomorfizmus jediný dvoudimenzionální symplektický vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel.

Definice 7: (Spinorová báze)

Každá báze $\{\iota, o\}$ spinorového prostoru S se nazývá *spinorovou bází* S, pokud $\{\iota, o\} = 1$. Existence spinorové báze je dokázána v následující poznámce.

Poznámka (Konstrukce spinorové báze): Vezměme $\psi, \phi \in S$, že $\{\psi, \phi\} \neq 0$, nechť bez újmy na obecnosti je $\{\psi, \phi\} > 0$. Definujme: $\iota := \{\psi, \phi\}^{-\frac{1}{2}}\psi$ a $o := \{\psi, \phi\}^{-\frac{1}{2}}\phi$. Potom $\{o, \iota\}$ je spinorová báze, jak lze snadno ověřit.

Zaveďme tenzorovou algebru $S^{\cdots}_{\cdots}$ spinorového prostoru S. Používejme pro ni metody abstraktních indexů, popsané v předchozím paragrafu. Za množinu návěští této tenzorové algebry vezměme $L = \{A, B, ..., Z\}$. (Později tuto množinu rozšíříme o další prvky.) Prvky této tenzorové algebry nazývejme prozatím spinory, později definici rozšíříme.

$\epsilon-$ **spinory.** Ve formalizmu abstraktních indexů lze zřejmě součin $\{,\} : S \times S \to \mathbb{C}$ identifikovat s nějakým prvkem $\epsilon_{AB} \in S_{AB}$. ϵ_{AB} je antisymterickým tenzorem, neboť z antisymetrie součinu $\{,\}$ plyne: $\epsilon_{AB}t^A u^B = \{t^A, u^B\} = -\{u^B, t^A\} = -\epsilon_{BA}u^B t^A = -\epsilon_{BA}t^A u^B$, odkud $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$. Obraz tenzoru ϵ_{AB} v duálním prostoru S^{AB} značme ϵ^{AB}.

Jelikož součin $\{,\}$ je nedegenerovaný, zadává dualitu $S^A \to S_A$, a tak lze pomocí něj zvedat nebo spouštět indexy. Pro $\xi^A \in S^A$ definujme $\xi_B := \epsilon_{AB}\xi^A$. Analogicky pro $\eta_A \in S_A$ definujme $\eta^B := \epsilon^{BA}\eta_A$. Protože součin $\{,\}$ není symetrický, při zvedání či spouštění indexů záleží na jejich pořadí. Běžně je užívána konvence stanovující, že při spouštění indexu stojí kontrahovaný index u ϵ na prvním místě; naopak při zvyšování indexů stojí kontrahovaný index na místě druhém. Užívajíce této konvence, dostaneme pro součin $\{,\}$ následující vyjádření: $\{\kappa, \omega\} = \epsilon_{AB}\kappa^A\omega^B = \kappa_B\omega^B = -\kappa^A\omega_A$. Pro libovolný spinor $\xi^A \in S^A$ platí: $\xi^C {\delta_C}^A = \xi^A = \epsilon^{AB}\xi_B = \epsilon^{AB}\epsilon_{CB}\xi^C$. Odtud plyne, že ${\delta_C}^A = \epsilon^{AB}\epsilon_{CB} = \epsilon_{CB}\epsilon^{AB}$. Obdobně ${\delta^C}_B = \epsilon^{AC}\epsilon_{BC}$. Odkud plyne, že ${\delta_A}^B = {\epsilon_A}^B = -{\epsilon^B}_A$.

Opererace sdružení. Až budeme chtít uvést spinory do souvislosti s časoprostorovými vektory, budeme potřebovat vyjádřit komplexní sdružení spinorů. Prostor, do kterého komplexní sdružení zobrazuje, není shodný s prostorem, ze kterého zobrazuje, tj. se spinorovým prostorem S. Jinak bychom měli na prostoru S definovanou reálnou strukturu (např. předpisem, který by reálnými určil právě ty spinory ξ, které by splňovaly: $\xi = \overline{\xi}$), která by však nebyla zachovávána Lorentzovými transformacemi. Z fyzikálního hlediska by z perspektivy požadavku lorentzovské kovariance neměla smysl.

Pro spinorový prostor S^A definujme jeho (anti)izomorfní kopii, kterou značme $S^{\dot{A}}$. Antiizomorfizmus nazývejme *operací sdružení.* Používáme následující označení: $^- : \xi^A \mapsto \overline{\xi^A} =: \xi^{\dot{A}}$, $S^A \to S^{\dot{A}}$. Z antiizomorfnosti operace sdružení plyne:

$$\overline{\lambda\xi^A + \mu\eta^A} = \overline{\lambda}\ \xi^{\dot{A}} + \overline{\mu}\ \eta^{\dot{A}}, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \xi^A, \eta^A \in S,$$

kde $\overline{\lambda}$ resp. $\overline{\mu}$ je komplexně sdružené komplexní číslo λ resp. μ.

Můžeme uvažovat, že operace sdružení je definována i na $S^{\dot{A}}$; označení zůstane stejné. Jediným požadavkem bude, aby takto rozšířená operace sdružení byla (anti)involucí, tj.

$$\overline{\xi^{\dot{A}}} = \xi^A.$$

Ú m l u v a: Vektory prostoru $S^{\dot{A}}$ jsme označili $\xi^{\dot{A}}$. Toto značení si vynucuje definovat novou množinu návěští: $L := \{A, \dot{A}, B, \dot{B}, ..., Z, \dot{Z}\}$.

Pomocí prostoru S^A, jeho antiizomorfní kopie $S^{\dot{A}}$ a jejich duálů vytvoříme pomocí operace záměny indexů a násobení celou spinorovou algebru. Uveďme definici spinoru a spinorové algebry explicite.

Definice 8: (Spinor typu $\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$)
Každý multilineární funkcionál

$$\xi_{L...N\dot{U}...\dot{W}}{}^{A...D\dot{P}...\dot{R}} : S_A \times ... \times S_D \times S_{\dot{P}} \times ... \times S_{\dot{R}} \times S^L \times ... \times S^N \times S^{\dot{U}} \times ... \times S^{\dot{W}} \to \mathbb{C}$$

nazveme *spinorem typu* $\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$. Tenzorovou algebru $S^{AB...D\dot{E}\dot{F}...\dot{H}}_{RS...U\dot{V}\dot{W}...\dot{Y}}$, tj. tenzorovou algebru spinorového prostoru S, vybavenou navíc antiinvolucí operace sdružení, nazývejme *spinorovou algebrou.*

Pokud $\{\iota^A, o^A\}$ je spinorová báze S^A, potom $\{\iota^{\dot{A}}, o^{\dot{A}}\}, \{\iota_A, o_A\}, \{\iota_{\dot{A}}, o_{\dot{A}}\}$ jsou spinorové báze prostorů $S^{\dot{A}}, S_A, S_{\dot{A}}$.

P o z n á m k a: Jak bylo uvedeno v kapitole Spinory, lze spinory definovat pomocí reprezentace grupy $Spin(1,3)_+$ resp. $SL(2,\mathbb{C})$. Je tomu tak právě proto, že S^A je reprezentační prostor fundamentální reprezentace S^+ a $S^{\dot{A}}$ je reprezentační prostor fundamentální reprezentace S^-. Navíc z teorie reprezentací Lieových grup je známo, že na reprezentačních prostorech algebry $so(2k,\mathbb{C})$ lze definovat invariantní antisymetrický skalární součin. Tento součin je v našem případě reprezentován bilineární formou $\{,\}$. Její invariance je zřejmá z následujícího výpočtu: $\{\phi,\psi\} = [\phi]^T e[\psi] = \det\begin{pmatrix} \phi^1 & \psi^1 \\ \phi^2 & \psi^2 \end{pmatrix}$, který platí až na libovolný nenulový násobek indiference formy $\{,\}$. Uvědomíme-li si, že prvky grupy $SL(2,\mathbb{C})$ zachovávají objem, dostaneme požadovanou invarianci.

V posledním oddílu tohoto paragrafu dokážeme jednu formuli.

Antisymetrické spinory jsou čisté stopy. Leibnizovo pravidlo, které zajišťuje existenci dvouprvkové báze spinorového prostoru S, implikuje rovnost
$0 = \kappa_A\omega^A\tau^B + \omega_A\tau^A\kappa^B + \tau_A\kappa^A\omega^B$. Provedeme-li záměnu a zvýšení některých indexů, dostaneme $\kappa^A\omega^B\tau^C(\epsilon_{AB}\epsilon_C{}^D + \epsilon_{BC}\epsilon_A{}^D + \epsilon_{CA}\epsilon_B{}^D) = 0$.

Jelikož předchozí vztah platí pro všechna $\kappa^A, \omega^B, \tau^C$, dostaneme:

$$\epsilon_{AB}\epsilon_C{}^D + \epsilon_{BC}\epsilon_A{}^D + \epsilon_{CA}\epsilon_B{}^D = 0.$$

Spuštěním indexu D dostaneme:

$$\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{BC}\epsilon_{AD} + \epsilon_{CA}\epsilon_{BD} = 0$$

Naopak zdvihnutím indexu C získáme:

$$\epsilon_A{}^C\epsilon_B{}^D - \epsilon_B{}^C\epsilon_A{}^D = \epsilon_{AB}\epsilon^{CD}.$$

Vynásobíme-li tuto identitu ϕ_{CD}, dostaneme vztah, který později využijeme:

$$\phi_{AB} - \phi_{BA} = \epsilon_{AB}\phi_C{}^C.$$

Odtud plyne, že antisymetrické spinory jsou tzv. čisté stopy, tj. platí

$$\phi_{[AB]} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\phi_C{}^C,$$

což je hledaná formule.

Tato formule implikuje:

$$\phi_{AB} = \phi_{(AB)} + \phi_{[AB]} = \phi_{(AB)} + \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\phi_C{}^C.$$

§3. Spinory a časoprostorové vektory.

V tomto paragrafu zavedeme tenzorovou algebru časoprostorových vektorů. (Motivaci k níže popsané definici časoprostorových vektorů nalezneme v paragrafu Reprezentace $Spin(1,3)_+$ pomocí $SL(2,\mathbb{C})$.)

Pro označení spinorů budeme používat množinu návěští $L := \{A, \dot{A}, B, \dot{B}, ..., Z, \dot{Z}\}$ a prostor spinorů bude modelován spinorovou algebrou. *Tenzorová algebra časoprostorových vektorů* vznikne z algebry spinorů sdružením indexů $a = A\dot{A}, b = B\dot{B}, ..., z = Z\dot{Z}$. Pro označení časoprostorových vektorů budeme používat množinu návěští $M := \{a, b, ..., z\}$. Pro označení komponent používejme množinu (nenazývejme ji množinou návěští, abychom odlišilili její úlohu od úlohy indexů, které hrají roli ve formalizmu abstraktních indexů) $N := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{z}\}$. Analogicky indexy komponent spinorů sdružme do množiny $O := \{\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, ..., \mathbf{Z}, \dot{\mathbf{Z}}\}$.

Pomocí $\epsilon-$spinorů definujme *metrický tenzor*:

$$g_{ab} := \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}},$$

$$g_a{}^b := \epsilon_A{}^B\epsilon_{\dot{A}}{}^{\dot{B}},$$

$$g^{ab} := \epsilon^{AB}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}.$$

Z antisymetrie $\epsilon-$spinorů plyne: $g_{ab} = \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{BA}\epsilon_{\dot{B}\dot{A}} = g_{ba}$. Analogicky $g^{ab} = g^{ba}$. Tenzory g_{ab} a g^{bc} jsou vzájemně inverzní. Pomocí metrického tenzoru budeme zvedat či spouštět indexy.

Definujme *symboly Infeld - van der Waerdena*:

$$g_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}} := g_{\mathbf{a}}{}^a\epsilon_A{}^{\mathbf{A}}\epsilon_{\dot{A}}{}^{\dot{\mathbf{A}}},$$

$$g^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}} := \epsilon_{\mathbf{A}}{}^A\epsilon_{\dot{\mathbf{A}}}{}^{\dot{A}}g_a{}^{\mathbf{a}}.$$

Infeld - van der Waerdenovy symboly nabývají následujících maticových tvarů:

$$[g_0^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[g_1^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[g_2^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[g_3^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Van-der Infeldovy symboly jsou násobky Pauliho matic, a proto generují vektorový prostor všech hermitovských matic řádu 2.

Úmluva: Pro každý spinor $\xi^{A\dot{A}} \in S^{A\dot{A}}$ definujme jemu odpovídající čtyřvektor $\xi^a := g^a_{A\dot{A}} \xi^{A\dot{A}}$ a analogicky pro vícekomponentové spinory.

6 Pohybové rovnice pro nehmotná pole

Úvod. V této kapitole je především explicitně předvedeno, jak zacházet s abstraktními indexy. Konkrétně, jak přejít ze zápisu pomocí abstraktních indexů spinorové algebry k zápisu pomocí "čtyřvektorů". Jsou prezentovány parciální diferenciální rovnice pro nehmotná fyzikální pole částic s libovolným spinem. V prvním oddílu se budeme zabývat rovnicí pro elektromagnetické pole, tj. pro pole se spinem $s = 1$. Dokážeme ekvivalenci soustavy Maxwellových rovnic s rovnicí pro nehmotná pole o spinu 1. V druhém oddíle se zmíníme o dalších rovnicích: Diracově, Weylově a pro nehmotná pole s obecným spinem. Pro konzistenci práce není tato kapitola podstatná.

0.1 Maxwellovy rovnice.

Zvolme ortonormální bázi $\{\vec{e_0}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ Minkowského časoprostoru, kde časová souřadnice míří ve směru bázového vektoru $\vec{e_0}$. Derivace podle těchto vektorů značme ∂_i. Nechť $\vec{E} : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{B} : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^3$ jsou libovolné vektorové diferencovatelné funkce definované na Minkowského časoprostoru. Definujme maticovou funkci

$$[F_{ab}] := \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato maticová funkce F_{ab} je antisymetrické tenzorové pole typu $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, tzv. *bivektor elektromagnetického pole.*

P o z n á m k a: Geometricky lze bivektory reprezentovat pomocí tzv. nulových vlajek, viz Naber [13].

Definujme spinory

$$F_{A\dot{X}B\dot{Y}} := g^a_{A\dot{X}} g^b_{B\dot{Y}} F_{ab},$$

$$\phi_{AB} := \frac{1}{2} F_{\dot{U}A}{}^{\dot{U}}{}_B.$$

Definice 9:

Rovnice pro nehmotná pole o spinu $s = 1$ je následující lineární parciální diferenciální rovnice (soustava rovnic):

$$\nabla^{A\dot{X}}\phi_{AB} = 0; A = 0,1, \dot{X} = \dot{0}, \dot{1}.$$

Definice 10:

Soustava Maxwellových rovnic pro vakuum je následující "čtveřice" lineárních parciálních diferenciálních rovnic:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0\vec{E} = \vec{0} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_0\vec{B} = \vec{0}. \tag{4}$$

P o z n á m k a : První rovnice se nazývá *Gassův zákon pro vakuum*, druhá rovnice se nazývá *Faradayův zákon elektromagnetické indukce*, třetí *o neexistenci magnetických monopólů* a čtvrtá je *Ampérův zákon pro vakuum.*

Věta 6:

Soustava Maxwellových rovnic pro vakuum je ekvivalentní rovnici pro nehmotná pole o spinu $s = 1$.

Důkaz: Nejdříve spočtěme spinorové ekvivalenty $\nabla^{A\dot{X}}$ diferenciálních operátorů ∂_a: $\nabla^{A\dot{X}} = g_a^{A\dot{X}}\partial^a = g_a^{A\dot{X}}g^{ab}\partial_b$.

$\nabla^{1\dot{1}} = g_a^{1\dot{1}}\partial^a = g_1^{1\dot{1}}\partial^1 + g_2^{1\dot{1}}\partial^2 + g_3^{1\dot{1}}\partial^3 + g_0^{1\dot{1}}\partial^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 - \partial_0)$.

Obdobně:

$\nabla^{1\dot{0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2)$

$\nabla^{0\dot{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2)$

$\nabla^{0\dot{0}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 + \partial_4)$

Proveďme následující výpočet:

$\phi_{AB} := \frac{1}{2}F_{\dot{U}A}{}^{\dot{U}}{}_B = \frac{1}{2}(F_{\dot{1}A}{}^{\dot{1}}{}_B + F_{\dot{0}A}{}^{\dot{0}}{}_B) = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\dot{1}\dot{X}}F_{\dot{1}A\dot{X}B} + \epsilon^{\dot{0}\dot{X}}F_{\dot{0}A\dot{X}B}\right) = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\dot{1}\dot{0}}F_{\dot{1}A\dot{0}B} + \epsilon^{\dot{0}\dot{1}}F_{\dot{0}A\dot{1}B}\right) = \frac{1}{2}\left(-F_{\dot{1}A\dot{0}B} + F_{\dot{0}A\dot{1}B}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{A\dot{0}B\dot{1}} - F_{A\dot{1}B\dot{0}}\right).$

Spočtěme postupně $\phi_{11}, \phi_{10}, \phi_{01}, \phi_{00}$.

$\phi_{11} = \frac{1}{2}\left(F_{1\dot{0}1\dot{1}} - F_{1\dot{1}1\dot{0}}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{1\dot{0}1\dot{1}} - (-F_{1\dot{0}1\dot{1}})\right) = F_{1\dot{0}1\dot{1}} = g^a_{1\dot{0}}g^b_{1\dot{1}}F_{ab}$. Uvážíme-li, že koeficienty $1\dot{0}$ resp. $1\dot{1}$ v Infeld-van der Waerdenových symbolech jsou nenulové jen pro případ $a = 1, 2$ resp. $b = 0, 3$, dostaneme, že stačí použít členy pro $ab = 13, 10, 23, 20$, tj.

$\phi_{11} = g^1_{1\dot{0}}g^3_{1\dot{1}}F_{13} + g^1_{1\dot{0}}g^0_{1\dot{1}}F_{10} + g^2_{1\dot{0}}g^3_{1\dot{1}}F_{23} + g^2_{1\dot{0}}g^0_{1\dot{1}}F_{20} = (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}})F_{13} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}})F_{10} + (\frac{i}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}})F_{23} + (\frac{i}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}})F_{20} = \frac{1}{2}\left[(F_{13} + F_{10}) - i(F_{23} + F_{20})\right] = \frac{1}{2}\left[(-B^2 + E^1) - i(B^1 + E^2)\right].$

Obdobně zjistíme, že platí:

$\phi_{10} = \phi_{01} = \frac{1}{2}(-E^3 + iB^3)$

$\phi_{00} = \frac{1}{2}\left[-(E^1 + B^2) + i(-E^2 + B^1)\right].$

Spočtěmě

$$\begin{aligned}
\nabla^{A\dot{1}}\phi_{A0} &= \nabla^{1\dot{1}}\phi_{10} + \nabla^{0\dot{1}}\phi_{00} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\partial_3 - \partial_0)(-E^3 + iB^3) + (\partial_1 - i\partial_2)\left[-(E^1 + B^2) + i(-E^2 + B^1)\right]\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\partial_3 E^3 + i\partial_3 B^3 + \partial_0 E^3 - i\partial_0 B^3 - \right. \\
&- \left. \partial_1 E^1 - \partial_1 B^2 - i\partial_1 E^2 + i\partial_1 B^1 + i\partial_2 E^1 + i\partial_2 B^2 - \partial_2 E^2 + \partial_2 B^1\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\vec{\nabla}.\vec{E} - \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right).\vec{e_3} + \partial_0 E^3 + i\left[\vec{\nabla}.\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{E}).\vec{e_3} - \partial_0 B^3\right]\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^{A\dot{0}}\phi_{A1} &= \nabla^{1\dot{0}}\phi_{11} + \nabla^{0\dot{0}}\phi_{01} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\partial_1 + i\partial_2)\left[(E^1 - B^2) - i(E^2 + B^1)\right] - (\partial_3 + \partial_0)(-E^3 + iB^3)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\partial_1 E^1 + \partial_3 E^3 + \partial_2 E_2 + \partial_2 B^1 - \partial_1 B^2 + \partial_0 E^3 + \right. \\
&+ \left. +i\left(-\partial_3 B^3 - \partial_2 B^2 - \partial_1 B^1 + \partial_2 E^1 - \partial_1 E^2 - \partial_0 B^3\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\vec{\nabla}.\vec{E} - (\vec{\nabla}\times\vec{B}).\vec{e_3} + \partial_0 E^3 + i\left[-\vec{\nabla}.\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{E}).\vec{e_3} - \partial_0 B^3\right]\right].
\end{aligned}$$

Dále

$$
\begin{aligned}
\nabla^{A\dot{1}}\phi_{A\dot{1}} &= \nabla^{1\dot{1}}\phi_{1\dot{1}} + \nabla^{0\dot{1}}\phi_{0\dot{1}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\partial_3-\partial_0)\left[\left(E^1-B^2\right)-i\left(E^2+B^1\right)\right]+(\partial_1-i\partial_2)\left(-E^3+iB^3\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\partial_3E^1-\partial_3B^2-i\partial_3E^2-i\partial_3B^1-\partial_0E^1+\partial_0B^2+i\partial_0E^2+i\partial_0B^1-\right. \\
&- \left.\partial_1E^3+i\partial_1B^3+i\partial_2E^3+\partial_2B^3\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).\vec{e_2}+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right).\vec{e_1}-\partial_0E^1+\partial_0B^2+\right. \\
&+ \left. i\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).\vec{e_1}-\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right).\vec{e_2}+\partial_0E^2+\partial_0B^1\right]\right].
\end{aligned}
$$

Poslední člen

$$
\begin{aligned}
\nabla^{A\dot{0}}\phi_{A\dot{0}} &= \nabla^{1\dot{0}}\phi_{1\dot{0}} + \nabla^{0\dot{0}}\phi_{0\dot{0}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\partial_1+\partial_2)\left(-E^3+iB^3\right)-(\partial_3+\partial_0)\left[-\left(E^1+B^2\right)+i\left(-E^2+B^1\right)\right]\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\partial_1E^3+i\partial_1B^3-i\partial_2E^3-\partial_2B^3-\right. \\
&- \left. i\partial_3E^1-i\partial_3B^1+\partial_0E^1+\partial_0B^2+i\partial_0E^2-i\partial_0B^1\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).\vec{e_2}-\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right).\vec{e_1}+\partial_0B^2+\partial_0E^1+\right. \\
&+ \left. i\left[-\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).\vec{e_1}-\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right).\vec{e_2}+\partial_0E^2-\partial_0B^1\right]\right].
\end{aligned}
$$

Zapišme nyní podmínky na nulovost výše vypočtených členů (imaginární a reálnou komponentu odděleně):

$$-\vec{\nabla}.\vec{E}-(\vec{\nabla}\times\vec{B}).\vec{e_3}+\partial_0E^3=0 \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}-(\vec{\nabla}\times\vec{E}).\vec{e_3}-\partial_0B^3=0 \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E}-(\vec{\nabla}\times\vec{B}).\vec{e_3}+\partial_0E^3=0 \tag{7}$$

$$-\vec{\nabla}.\vec{B}-(\vec{\nabla}\times\vec{E}).\vec{e_3}-\partial_0B^3=0 \tag{8}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_2} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_1} - \partial_0 E^1 + \partial_0 B^2 = 0 \tag{9}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_1} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_2} + \partial_0 E^2 + \partial_0 B^1 = 0 \tag{10}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_2} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_1} + \partial_0 B^2 + \partial_0 E^1 = 0 \tag{11}$$

$$-(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_1} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_2} + \partial_0 E^2 - \partial_0 B^1 = 0 \tag{12}$$

Sečteme-li (9)+(11), dostaneme

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_2} = -\partial_0 B^2 \tag{13}$$

Odečteme-li (10)-(12), dostanenem

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_1} = -\partial_0 B^1 \tag{14}$$

Sečteme-li (8)+(6), dostaneme

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}).\vec{e_3} = -\partial_0 B^3 \tag{15}$$

Odečteme-li (9)-(11), dostaneme

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_1} = \partial_0 E^1 \tag{16}$$

Sečteme-li (10)+(12), dostaneme

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_2} = \partial_0 E^2 \tag{17}$$

Sečteme-li (5)+(7), dostaneme

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{e_3} = \partial_0 E^3 \tag{18}$$

Odečteme-li (5)-(7), dostaneme

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \tag{19}$$

Odečteme-li (6)-(8), dostaneme

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{20}$$

Rovnice (13), (14), (15) dávají ekvivalenci s Faradayovým zákonem pro vakuum. Rovnice (16), (17), (18) dávají ekvivalenci s Ampérovým zákonem pro vakuum. Rovnice (19) resp. (20) představují Gaussův zákon pro vakuum resp. neexistenci magnetických monopólů.

Obráceně: O tom, že jsou-li splněny Maxwellovy rovnice, vynulují se výše uvedené členy, se lze snadno přesvědčit dosazením.

Z tohoto rozboru vyplývá dokazovaná ekvivalence.

P o z n á m k a : Rovnice pro nehmotné pole o spinu $s = 1$ je nejen relativisticky invariantní, ale i invariantní vůči Möbiově grupě konformních zobrazení.

0.2 Rovnice pro nehmotná pole s obecným spinem s.

Weylova rovnice je parciální diferenciální rovnice pro nehmotná pole o spinu $s = 1/2$ následujícího tvaru:

$$\nabla^{A\dot{X}}\phi_A = 0; \dot{X} = \dot{1}, \dot{0}.$$

Pole, které Weylovu rovnici splňuje, se nazývá *(Weylovo) neutrino*. Tato rovnice, ale navíc s pravou stranou rovnou nenulovému násobku (=: hmotě) pole ϕ_A, se někdy nazývá *rovnicí Diracovou*, ačkoliv ve fyzikální literatuře bývá zvykem za Diracovu rovnici považovat rovnici

$$\nabla\Psi = -im\Psi,$$

kde $m \in \mathbb{R}$, pro tzv. dvoukomponentový spinor. Vysvětlení symbolů v této rovnici viz v monografii Ward, Wells [14] .

Pro úplnost uveďme znovu rovnici pro nehmotná pole o spinu $s = 1$:

$$\nabla^{A\dot{X}}\phi_{AB} = 0,$$

kde ϕ_{AB} je symetrický spinor. Pole, které splňuje rovnici pro nehmotná pole o spinu $s = 1$, se nazývá *foton*.

Rovnice pro nehmotná pole o spinu 3/2 je parciální diferenciální rovnice následujícího tvaru:

$$\nabla^{A\dot{X}}\phi_{ABC} = 0,$$

kde ϕ_{ABC} je symetrický spinor.

Přímé zobecnění Weylovy rovnice a rovnic pro nehmotné pole o spinu $s = 1, 3/2$ tvoří následující rovnice pro symetrický spinor $\phi_{A_1...A_n} = \phi_{(A_1...A_n)}$ typu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix}$:

$$\nabla^{A\dot{X}}\phi_{AA_2...A_n} = 0; A_2, ..., A_n = 1, 0, \dot{X} = \dot{1}, \dot{0},$$

tzv. *rovnice pro nehmotné pole o spinu* $\frac{1}{2}n$. Řešení této rovnice se nazývá *nehmotné pole o spinu* $\frac{1}{2}n$.

Uveďme rovnici, která narozdíl od předchozích rovnic není pohybovou rovnicí pro nějaké pole, tzv. *twistorovou rovnici:*

$$\nabla^{\dot{A}}{}_{(A}\phi_{A_1...A_n)} = 0,$$

kde $\phi_{A_1...A_n}$ je symetrický spinor typu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix}$.

7 Geometrický základ.

Úvod. V této kapitole uvedeme základní definice a vlastnosti časoprostorů, na nichž budeme formulovat hlavní výsledek této práce, tj. exaktní posloupnost svazků určitých vnějších diferenciálních forem s hodnotami ve vhodném vektorovém fíbrovaném bandlu nad bází, kterou bude tvořit právě časoprostor.

Časoprostor. Nechť (M, g) je *pseudoriemannova varieta* dimenze n se signaturou $(k, n-k)$, kde $1 \leq k \leq n$. Tj. $g \in \Gamma(M, \odot^2(T^*M))$ je symetrické tenzorové pole typu $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ na varietě M a navíc $\forall m \in M$ je g_m (symetrická bilineární) forma signatury $(k, n-k)$.

Pro varietu M existuje $g \in \Gamma(M, \odot^2(T^*M))$, že (M, g) je pseudoriemannova varieta signatury $(k, n-k)$, právě když existuje podbandl bandlu TM dimenze k.

Pro pseudoriemannovu varietu (M, g) signatury $(k, n-k)$ existuje rozklad tečného bandlu TM na podbandly $\xi, \eta \subseteq TM$ dimenze k, $n-k$ takové, že ξ resp. η je *časový* resp. *prostorový podbandl*, tj. $\forall X \in \xi$ resp. $\forall Y \in \eta$, že $g(X, X) > 0$ resp. $g(Y, Y) < 0$. Rozklad existuje ve smyslu $TM = \xi \oplus \eta$, kde $\oplus$ značí Whitneyovu sumu.

Pseudoriemannova varieta se nazývá *časově orientovatelná*, pokud je alespoň jeden časový podbandl orientovatelný.

Každou orientovatelnou a časově orientovatelnou pseudoriemannovu varietu (M, g) signatury $(1, 3)$ dimenze 4 nazveme (pro naš účely) *časoprostorem.*

$Spin$**-struktura.** Nechť $(X, p, M, SO(1,3)_+)$ je hlavní fíbrovaný prostor se strukturní grupou $SO(1,3)_+$ (vlastní Lorentzova grupa). Řekneme, že na M *existuje Spin-struktura*, pokud existuje varieta P taková, že $(P, \pi, M, Spin(1,3)_+)$ je hlavní fíbrovaný bandl se strukturní grupou $Spin(1,3)_+$ a navíc existuje dvoulisté nakrytí $\Lambda : P \to X$, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
P \times Spin(1,3)_+ \arrow[r] \arrow[dd, "\Lambda\times\lambda"'] & P \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\Lambda"'] & \\
& & M \\
X \times SO(1,3)_+ \arrow[r] & X \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Horizontální šipky značí akci příslušných grup na totálních prostorech.

Dvojici (M, Λ) nazveme *Spin-struktura na M.*

P o z n á m k a: O postačujících podmínkách (formulovaných pomocí obstrukcí na Chernovy kohomologické třídy), které je třeba/stačí klást na varietu, aby na ní existovala *Spin*-struktura, lze nalézt v knize H. Baum(ové), viz Baum [8].

Konexe a (indukovaná) kovariantní derivace. Nechť (P, π, M, G) je hlavní fíbrovaný bandl se strukturní grupou G. Lieovu algebru Lieovy grupy G označme g. Pro každé $X \in g$ definujme vektorové pole $\tilde{X}$ na P předpisem: $\tilde{X}_m := (\Phi(exp(-tX), m))_{*0}(\frac{d}{dt})_0$, kde $m \in P$ a $\Phi : G \times P \to P$ je akce Lieovy grupy G na totálním prostoru P hlavního fíbrovaného bandlu. Toto pole se nazývá *fundamentální vektorové pole akce G na totálním prostoru.* Řez $Z \in \Gamma(P, T^*P \otimes g)$ (tj. Z je diferenciální 1-forma na P s hodnotami v g) splňující:

1. pro každé fundamentální vektorové pole $\tilde{X}$ akce G na totálním prostoru P platí: $Z(\tilde{X}) = X$ a

2. pro každý $a \in G$ je $Z \circ (R_a)_* = Ad_G(a^{-1})Z$ - (ekvivariance) [5]

nazveme *konexí na hlavním fíbrovaném bandlu.*

Nechť (E, p, M) je vektorový fíbrovaný bandl. Zobrazení $\nabla : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, T^*M \otimes E)$ nazveme *kovariantní derivací* na (E, p, M), pokud:

1. ∇ je homomorfizmus vektorových prostorů a

2. $\forall e \in \Gamma(M, E)$ a $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ platí "Leibnizovo pravidlo"

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e. \tag{21}$$

[5] Zobrazení $Ad_G : G \to End(g)$ je definováno předpisem:$\forall f \in G$ je $Ad_G(f) := (\alpha_f)_*$, kde $\alpha_f : G \to G$ je konjugace: $\alpha_g(a) = gag^{-1}$, $\forall g \in G$.
Zobrazení R_a, definováno pro každý $a \in G$, je pravé násobení prvkem a, tj. $R_a(g) := g.a$.

Tuto kovariantní derivaci lze jednoznačně rozšířit na homomorfizmus mezi $\Gamma(M, \bigwedge^q(T^*M) \otimes E)$ a $\Gamma(M, \bigwedge^{q+1}(T^*M) \otimes E)$, pro $q = 0, ..., n := dimM$, předpisem pro monom $e \otimes \omega$:

$$\nabla(e \otimes \omega) := (\nabla e) \otimes \omega + (\nabla \omega)e,$$

kde $e \in \Gamma(M, E)$ a $\omega \in \Gamma(M, \bigwedge^k(T^*M))$, a dále lineárně.

Tuto kovariantní derivaci budeme nazývat *k-tým rozšířením kovariantní derivace* a používat pro ni symbol ∇_k.

Ke každému hlavnímu fíbrovenému bandlu (P, π, M, G) s konexí Z a reprezentaci $\rho : G \to Aut(V)$, kde V je vektorový prostor konečné dimenze, lze přiřadit kovariantní dericvaci ∇ na asociovaném vektorovém fíbrovaném bandlu $(E := P \times_\rho V, p, M)$. Tuto kovariantní derivaci ∇ na (E, p, M) budeme nazývat *prostřednictvím ρ indukovanou kovariantní derivací* ke konexi Z na (P, π, M, G). Definici indukované kovariantní derivace viz Baum [8].

Tenzory definované pomocí Levi-Civiteovy kovariantní derivace.

Definujme následující tenzorová pole:

$$T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\text{-}\textit{tenzorové pole torze},$$

$$R^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\text{-}\textit{tenzorové pole křivosti},$$

kde $X, Y, Z \in \Gamma(M, TM)$.

Analogií základní věty Riemannovy geometrie je následující věta:

Věta 7: (Základní věta pseudoriemannovy gemetrie)

Nechť (M, g) je pseudoriemannova varieta dimenze n signatury $(k, n-k)$. Nechť (TM, π, M) je tečný bandl k M. Potom existuje právě jedna kovariantní derivace ∇ na (TM, π, M) pro jejíž rozšíření $\nabla_k : \Gamma(M, \bigwedge^k(T^*M)) \to \Gamma(M, \bigwedge^{k+1}(T^*M) \otimes TM)$ platí:

1. $\nabla g = 0$ a

2. tenzorové pole torze T^∇ splňuje $T^\nabla = 0$.

Tato kovariantní derivace se nazývá *Levi-Civiteovou kovariantní derivací* a označuje se ∇^g. (V některých publikacích se Levi-Civiteovou kovariantní derivací míní kovariantní derivace indukovaná na některou její podvarietu a v předchozí větě zmíněná kovariantní derivace se nazývá pseudoriemannovou kovariantní derivací.)

Pro pseudoriemannovu varietu (M, g) a jí příslušející Levi-Civiteovu kovariantní derivaci ∇^g nazveme tenzorové pole křivosti R^{∇^g} *Riemannovým tenzorem křivosti* a označíme jej R^g.

Definujme další tenzorová pole asociovaná k Levi-Civiteově kovariantní derivaci. Zvolme pro nějaké souřadnicové okolí $U \subseteq M$ ortonormální bázi $\{e_i\}_{i=1,..,n}$ na $TM_{|U}$ a definujme pomocí $R_{ijkl} := g(R^g(e_i, e_j)e_l, e_k)$ *Ricciovu křivost, skalární křivost, bezestopý Ricciův tenzor a Weylovu křivost*:

1. $Ric_{ij} := \sum_{k=1}^{n} R_i{}^k{}_{jk}$,
2. $\kappa := \sum_{k=1}^{n} Ric_k{}^k$,
3. $Ric^0_{ij} := Ric_{ij} - \frac{1}{n}\kappa g_{ij}$,
4. $W_{ijkl} := R_{ijkl} - \frac{1}{n}\kappa g_{ij}$,

kde $g_{ij} := g(e_i, e_j)$.

Definice 11:

Pseudoriemanovu varietu (M, g) nazveme *konformně plochou* resp. *Einsteinovu* resp. *plochou* resp. *s nulovou skalární křivostí*, pokud $W = 0$ resp. $Ric^0_{ij} = 0$ resp. $R_{ijkl} = 0$ resp. $\kappa = 0$.

8 Rezoluce twistorů pro nehmotná pole se spinem $3/2$.

Úvod. V této kapitole se budeme věnovat hlavnímu výsledku práce, posloupnosti spinorhodnotových vnějších diferenciálních forem (viz Úvod). Její konstrukce bude vycházet z z pohybové rovnice pro nehmotná pole o spinu 3/2. Z matematického hlediska je posloupnost jistou variantou BGG-rezoluce pro spinory. R. Penrose tento komplex použil až na drobné modifikace v sérii článků v Twistor Newsletter (viz Penrose [1-5]), v nichž se snažil interpretovat twistory jako náboje nehmotných polí o spinu 3/2, viz úvod.

Kapitola se skládá ze dvou paragrafů. V prvním z nich uvedeme známá fakta vztahující se k BGG-rezoluci pro spinory. V druhém paragrafu budeme definovat výše zmíněnou posloupnost a dokážeme její exaktnost.

§1. BGG-rezoluce pro spinory.

V tomto paragrafu definujme BGG-rezoluci pro spinory pro obecnější situaci, než kterou se budeme nakonec (v druhém paragrafu) zabývat.

Nechť (M, g) je pseudoriemannova varieta dimenze $m = 2n$ signatury (k, l), $k + l = m$. Nechť $(X, p, M, SO(k, l)_+)$ je hlavní fíbrovaný bandl orientovaných ortonormálních repérů (hlavní fíbrovaný bandl se strukturní grupou $SO(k, l)_+$). Nechť na M existuje $Spin$-struktura (M, Λ), $\Lambda : P \to X$, tj. $(P, \pi, M, Spin(k, l)_+)$ je hlavní fíbrovaný prostor se strukturní grupou $Spin(k, l)_+$ a diagram na následujícím obr. komutuje (horizontální šipky znači akci příslušných grup na totálním prostoru).

$$\begin{tikzcd}
P \times Spin(1,3)_+ \arrow[r] \arrow[dd, "\Lambda\times\lambda"'] & P \arrow[dd, "\Lambda"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & M \\
X \times SO(1,3)_+ \arrow[r] & X \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Nechť $(S_\pm, q, M)$ je prostřednictvím $(\pm)$-spinorové reprezentace[6] -, $S^\pm$, grupy

[6] $(\pm)$-spinorové reprezentace se definují analogicky případu $m = 4$, $S^+ := \Gamma_{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}}, S^- := \Gamma_{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

$Spin(k,l)_+$ asociovaný vektorový fíbrovaný bandl, tzv. *spinorový bandl*, k hlavnímu fíbrovanému bandlu $(P,\pi,M,Spin(k,l)_+)$. Označme $\nabla : \Gamma(M,T^*M) \to \Gamma(M,T^*M\otimes TM)$ Levi-Civitovu kovariantní derivaci na (M,g). Konexi na (X,p,M) příslušnou k této Levi-Civiteově kovariantní derivaci označme Z. Konexe Z definuje konexi Z' na $(P,\pi,M,Spin(k,l)_+)$. Konečně, k této konexi Z' definujme prostřednictvím $(\pm)$-spinorové reprezentace asociovanou kovariantní derivaci $\nabla^{S_\pm}$ na $(S_\pm,q,M)$. k-té rozšíření kovariantní derivace $\nabla^{S_\pm}$ budeme značit $\nabla^{S_\pm}_k : \Gamma(M,\bigwedge^k(T^*M)\otimes S_\pm) \to \Gamma(M,\bigwedge^{k+1}(T^*M)\otimes S_\pm)$.

Označme: $E^i_\pm := \Gamma(M,\bigwedge^i(T^*M)\otimes S_\pm)\otimes\mathbb{C}$. [7] Tento tenzorový součin nepředstavuje obecně ireducibilní reprezentace grupy $Spin(k,l)_+$, jak jsme se o tom ve speciálním případě přesvědčili v kapitole 4, kde jsme vyšetřovali tyto tenzorové součiny pro speciální případ: $k=1, l=3$. Pomocí tam užitého algoritmu lze ukázat, že se tyto součiny rozpadají analogicky jako v tam uvažovaném případu. (Tento fakt nebudeme dokazovat, neboť jej budeme v následujícím paragrafu potřebovat jen pro již dokázaný případ $k=1, l=3$.) Schematicky lze tuto dekompozici pro $k=1, l=3$ a $(+)$-spinorový bandl vystihnout následujícím obrázkem:

$$\begin{array}{ccccc}
E^{0,0}_+ & E^{1,0}_+ & E^{2,0}_+ & E^{3,0}_+ & E^{4,0}_+ \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & \\
 & E^{1,1}_+ & E^{2,1}_+ & E^{3,1}_+ & \\
 & & \oplus & & \\
 & & E^{2,2}_+ & &
\end{array}$$

Definujme následující operátory.

Definice 12: (Operátory D, T, S)

Nechť $\pi^{k,j}_\pm$ značí invariantní projekci prostoru $E^k_\pm$ na jeho j-tou ireducibilní komponentu (číslování komponent viz předchozí obr.). Označme následující operátory

[7] E^i je tedy svazek komplexifikovaných vektorových prostorů spinorhodnotových vnějších diferenciálních forem na M.

prvního řádu:

1. $D^{k,j}_{\pm} := \pi^{k+1,j}_{\pm} \circ \nabla^{S_{\pm}}_{k} : E^{k,j}_{\pm} \to E^{k+1,j}_{\pm}$,
2. $T^{k,j}_{\pm} := \pi^{k+1,j+1}_{\pm} \circ \nabla^{S_{\pm}}_{k} : E^{k,j}_{\pm} \to E^{k+1,j+1}_{\pm}$,
3. $S^{k,j}_{\pm} := \pi^{k+1,j-1}_{\pm} \circ \nabla^{S_{\pm}}_{k} : E^{k,j}_{\pm} \to E^{k+1,j-1}_{\pm}$

pro všechny vhodné hodnoty indexů j, k.

Poznámka: Operátory D resp. T bývá zvykem nazývat po řadě *Diracův* resp. *twistorový* operátor.

Definice 13: Operátory X, Y

Operátor $X : E^{\cdot}_{\pm} \to E^{\cdot}_{\mp}$ je definován předpisem

$$X(\omega \otimes s) := \sum_{i=1}^{m} e^i \wedge \omega \otimes e_i s$$

Operátor $Y : E^{\cdot}_{\pm} \to E^{\cdot}_{\mp}$ je definován předpisem:

$$Y(\omega \otimes s) := \sum_{i=1}^{m} \iota_{e_i}\omega \otimes e_i s,$$

kde $\omega \in \Gamma(M, \bigwedge^{\cdot}(T^*M))$, $s \in \Gamma(M, S_{\pm})$, $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$ je nějaká lokální ortonormální báze $TM_{|U}$ a $\{e^i\}_{i=1,\dots,m}$ je k ní duální báze. $e_i s$ značí Cliffordovo násobení (viz Baum [8]) prvku e_i a s.

Nyní již můžeme formulovat základní prostředek, který budeme používat, BGG-rezoluci pro spinory.

Lemma (BGG-rezoluce pro spinory):

Nechť (M, g) je konformně plochá pseudoriemannova varieta. Posloupnost $(A_j, d_j)_{j=0,\dots,2n}$,
kde $A^j := E^{j,j}_{+}, j = 0, ..., n-1$,
$A^n := E^{n,n}_{+} \oplus E^{n,n}_{-}$,
$A^{j+n} := E^{n+j,n-j}, j = 1, ..., n$.
$d_j := T^j_{+}, j = 0, ..., n-2$,
$d_j := S^{2n-j}_{-}, j = n+1, ..., 2n-1$,

$d_{n-1} := T_+^{n-1} + T_-^{n-1} \circ Y \circ D_+^{n-1}, d_n := D_-^{n-1} \circ Y \circ S_+^n + S_-^n$, je exaktní komplex. Nazývá se *BGG-rezoluce pro spinory.*

Důkaz: viz Severa [15].

Důležitý prostředek důkazu exaktnosti posloupnosti tvoří následující lemma.

Lemma (O antikomutativnosti):

Pokud skalární křivost κ pseudoriemannovy variety (M, g) je rovna nule, potom diagram na následujícím obr. antikomutuje.

$$\begin{tikzcd} E_+^{0,0} \arrow[r, "D_+^{0,0}"] \arrow[dr, "T_+^{0,0}"'] & E_+^{1,0} \arrow[r, "D_+^{1,0}"] & E_+^{2,0} \\ & E_+^{1,1} \arrow[ur, "S_+^{1,1}"'] & \end{tikzcd}$$

Důkaz: viz Severa [15].

§2. Exaktní posloupnost pro nehmotná pole se spinem $s = 3/2$.

Specifikujme geometrickou strukturu, na níž budeme formulovat výsledek práce: Nechť (M, g) je časoprostor a (M, Λ) *Spin*-struktura na tomto časoprostoru. (Tento předpoklad lze pro další oslabit, např. vypuštěním časové orientovatelnosti. Tato podmínka však z fyzikálního pohledu nijak omezující není.)

Věta 8:

Na základě věty o rozkladu $Spin(1,3)_+$-reprezentací platí (jedná se zároveň o označení):

$E_\pm^{0,0} := \Gamma(M, S_\pm)$,

$E_\pm^{1,0} := \Gamma(M, S_\mp)$,

$E_\pm^{1,1} := \Gamma(M, \odot^2 S_\pm \otimes S_\mp)$,

$E_\pm^{2,0} := \Gamma(M, S_\pm)$,

$E_\pm^{2,1} := \Gamma(M, \odot^2 S_\mp \otimes S_\pm)$,

$E_\pm^{2,2} := \Gamma(M, \odot^3 S_\pm)$,

$E_\pm^{3,0} := \Gamma(M, S_\mp)$,

$E_\pm^{3,1} := \Gamma(M, \odot^2 S_\pm \otimes S_\mp)$,

$E^{4,0}_{\pm} := \Gamma(M, S_{\pm})$.

Výše uvedené řezy považujeme za svazky $Spin(1,3)_+$-modulů.

Důkaz: Plyne z věty o rozkladu reprezentací grupy $Spin(1,3)_+$.

Nyní můžeme přistoupit k definici posloupnosti, která spolu s důkazem její exaktnosti tvoří hlavní výsledek práce.

Definujme posloupnost

$$0 \xrightarrow{0} S \xrightarrow{s} T \xrightarrow{t} U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{0} 0,$$

kde jednotlivé atomy představují níže definované svazky:

1. $S' := E^{0,0}_{+}$,
   $S'' := \{\Pi_{\dot{A}} \in E^{0,0}_{-} | \nabla_{A\dot{A}} \Pi_{\dot{B}} = 0\}$,
   $S := \{(\Omega_A, \Pi_{\dot{A}}) \in S' \oplus S'' | \nabla_{\dot{A}A} \Omega_B = -i\epsilon_{AB} \Pi_{\dot{A}}\}$.

2. $T' := E^{0,0}_{+}$,
   $T'' := \{\pi_{\dot{A}} \in E^{0,0}_{-} | \nabla_B{}^{\dot{A}} \pi_{\dot{A}} = 0\}$,
   $T := \{(\omega_B, \pi_{\dot{A}}) \in T' \oplus T'' | \nabla_{\dot{A}}{}^B \omega_B = 2i\pi_{\dot{A}}\}$.

3. $U' := \{\rho_{\dot{A}BC} \in E^{1,1}_{+} | \nabla_A{}^{\dot{A}} \rho_{\dot{A}BC} = 0\}$,
   $U'' := \{\sigma_{\dot{A}\dot{B}C} \in E^{1,1}_{-} | \nabla_{(B}{}^{\dot{B}} \sigma_{|\dot{A}\dot{B}|C)} = 0\}$,
   $U := \{(\rho_{\dot{A}BC}, \sigma_{\dot{A}\dot{B}C}) \in U' \oplus U'' | \nabla_{(\dot{B}}{}^B \rho_{\dot{A})BC} = 2i\sigma_{\dot{A}\dot{B}C}\}$.

4. $V' := 0$,
   $V'' := E^{2,2}_{-}$,
   $V := \{(0, \psi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}}) \in V' \oplus V'' | (\exists (0, \sigma_{\dot{A}\dot{B}C}) \in U)(\nabla_{\dot{C}}{}^C \sigma_{\dot{A}\dot{B}C} = \psi_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}})\}$.

Nyní definujme zobrazení s, t, u:

1. $s := id_{|S}$,

2. $t(\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}}) := \nabla_{\dot{A}(C} \omega_{B)} \oplus \nabla_{C(\dot{B}} \pi_{\dot{A})}$,

3. $u(\rho_{\dot{A}BC} \oplus \sigma_{\dot{A}\dot{B}C}) := \nabla_{(A}{}^{\dot{A}} \rho_{BC)\dot{A}} \oplus \nabla_{(\dot{C}}{}^C \sigma_{\dot{A}\dot{B})C}$.

Věta 9:

Pro každý plochý ($R^g = 0$) časoprostor (M, g) se $Spin$-strukturou (M, Λ) je posloupnost

$$0 \xrightarrow{0} S \xrightarrow{s} T \xrightarrow{t} U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{0} 0,$$

kde atomy S, T, U, V a zobrazení s, t, u jsou definovány výše, exaktní posloupností svazků.

Důkaz:

1. Nejprve ověřme, že zobrazení mezi atomy řetězce jsou "do".

   (a) zobrazení 0 je samozřejmě do S.

   (b) s je do T, neboť

      i. pokud $\Pi_{\dot A} \in S''$, potom $\nabla_B{}^{\dot A}\Pi_{\dot A} = \epsilon^{\dot A\dot B}\nabla_{B\dot B}\Pi_{\dot A} = \epsilon^{\dot A\dot B}0 = 0$ dík definici S''. Odtud $s(\Pi_{\dot A}) \in T''$.

      ii. $\Pi_{\dot A} \in S$ implikuje $\exists\ \Omega_B \in S'$, že $\nabla_{\dot AA}\Omega_B = -i\epsilon_{AB}\Pi_{\dot A}$. Používajíce toho dostaneme:
      $\nabla_{\dot A}{}^B\Omega_B = \epsilon^{BA}\nabla_{\dot AA}\Omega_B = -\epsilon^{BA}i\epsilon_{AB}\Pi_{\dot A} = i\underbrace{\epsilon^{AB}\epsilon_{AB}}_{2}\Pi_{\dot A} = 2i\Pi_{\dot A}$.

   (c) t je do U. Označme $\rho_{\dot ABC} := \nabla_{\dot A(B}\omega_{C)}$, $\sigma_{\dot A\dot BC} := \nabla_{C(\dot B}\pi_{\dot A)}$.

      i. $\nabla_{(A}{}^{\dot A}\rho_{|\dot A|BC)} = \nabla_{(A}{}^{\dot A}\nabla_{|\dot A|(C}\omega_{B))} = \nabla_{(A}{}^{\dot A}\nabla_{|\dot A|C}\omega_{B)} = 0$ dík tomu, že BGG-rezoluce je komplex.

      ii. Užijme-li antikomutativnosti diagramu na následujícím obrázku,

$$\begin{tikzcd} E_+^{0,0} \arrow[r, "D_+^{0,0}"] \arrow[dr, "T_+^{0,0}"'] & E_+^{1,0} \arrow[r, "D_+^{1,0}"] & E_+^{2,0} \\ & E_+^{1,1} \arrow[ur, "S_+^{1,1}"'] & \end{tikzcd}$$

      dostaneme, že platí: [8]
      $(\pi_+^{2,0}\nabla)\rho_{\dot ABC} = (\pi_+^{2,0}\nabla)(\nabla_{\dot A(C}\omega_{B)}) = -\nabla_A{}^{\dot B}\nabla_{\dot B}{}^C\omega_C = -\nabla_A{}^{\dot B}2i\pi_{\dot B} = -2i\nabla_A{}^{\dot B}\pi_{\dot B} = -2i0 = 0$, kde v předposlední rovnosti jsme užili definici T'' a v třetí rovnosti definici T.

[8] Pokud Riemannova křivost $R \neq 0$, je antikomutativita stále ještě platná, předpokládáme-li, že skalární křivost κ je nulová, $\kappa = 0$.

iii. Proveďme následující výpočet

$\nabla_{(B}{}^{\dot{B}}\sigma_{|\dot{A}\dot{B}|C)} = \nabla_{(B}{}^{\dot{B}}\nabla_{C)(\dot{B}}\pi_{\dot{A})} = \nabla_{(B}{}^{\dot{B}}\nabla_{C)(\dot{A}}\pi_{\dot{B})} = 0$ dík definici T''.

iv. $\nabla_{(\dot{B}}{}^{B}\rho_{\dot{A})BC} = \nabla_{(\dot{B}}{}^{B}\nabla_{\dot{A})(C}\omega_{B)} = 2i\nabla_{C(\dot{A}}\pi_{\dot{B})} = 2i\sigma_{\dot{A}\dot{B}C}$, kde jsme užili definici ω_B a $\pi_{\dot{A}}$.

Odtud plyne, že $t(\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}}) \in U$.

(d) u je do V, neboť: $u(\rho_{\dot{A}BC}) = \nabla_{(A}{}^{\dot{A}}\rho_{BC)\dot{A}} = 0$, jak plyne z definice U'. $u(\rho_{\dot{A}BC} \oplus \sigma_{C\dot{A}\dot{B}}) = (0, u(\sigma_{C\dot{A}\dot{B}}))$. Odtud plyne, že (vzhledem k definici V) je u do V.

2. Nyní ukážeme, že výše definovaný řetězec je řetězcový komplex.

(a) $s \circ 0 = 0$

(b) Spočítejme $t \circ s$.

i. Nechť $(\Omega_B, \Pi_{\dot{A}}) \in S$. Jelikož s je identita, stačí tento prvek zobrazit via t. $t(\Omega_B) = \nabla_{\dot{A}(C}\Omega_{B)} = -i\epsilon_{(CB)}\Pi_{\dot{A}} = 0$, kde jsme využili definičního vztahu $\nabla_{A\dot{A}}\Omega_B = -i\epsilon_{AB}\Pi_{\dot{A}}$.

ii. Z definice S'' plyne: $t(\Pi_{\dot{A}}) = \nabla_{C(\dot{B}}\Pi_{\dot{A})} = 0$.

(c) $u \circ t = 0$, neboť BGG-rezoluce je komplex.

(d) $u \circ 0 = 0$ je samozřejmě splněno.

3. V tomto bodu se budeme zabývat exaktností komplexu.

(a) Exaktnost v druhém bodě posloupnosti je ekvivalentní injektivitě zobrazení s. Jelikož $s = id$, je exaktnost evidentní.

(b) Exaktnost v třetím bodě je dík odstavci 2 ekvivalentní inkluzi: $Kert \subseteq Ims$, kterou nyní dokážeme:

Nechť $\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}} \in T$ a splňují: $\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}} \in Kert$, tj. platí

$$\nabla_{\dot{A}(C}\omega_{B)} = 0 \tag{22}$$

$$\nabla_{C(\dot{B}}\pi_{\dot{A})} = 0 \tag{23}$$

Zvolme $\Omega_B := \omega_B$ a $\Pi_{\dot{A}} := \pi_{\dot{A}}$ jako kandidáty na vzory s. Zřejmě $s(\Omega_B \oplus \Pi_{\dot{A}}) = \omega_B \oplus \pi_{\dot{A}}$. Ověřme, že $\Omega_B \oplus \Pi_{\dot{A}} \in S$.

i. V následujícím výpočtu použijeme tvrzení, které říká, že antisymetrické spinory jsou čisté stopy, a které jsme dokázali v předchozí kapitole. $\nabla_{A\dot{A}}\Pi_{\dot{B}} = \nabla_{A\dot{A}}\pi_{\dot{B}} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\nabla_{A}{}^{\dot{C}}\pi_{\dot{C}} + \nabla_{A(\dot{A}}\pi_{\dot{B})} = 0 + 0 = 0$, přičemž nulovost prvního členu plyne z definice T'' a druhého z rovnice (6).

ii. $\nabla_{A\dot{A}}\Omega_B = \nabla_{A\dot{A}}\omega_B = \nabla_{\dot{A}(A}\omega_{B)}$[9] $+ \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\nabla_{\dot{A}C}\omega^C = 0 + \frac{1}{2}2i\epsilon_{AB}(-\pi_{\dot{A}}) = -i\epsilon_{AB}\pi_{\dot{A}}$. Tím jsme dokázali exaktnost v bodě T.

(c) Exaktnost ve čtvrtém bodě: $Keru \subseteq Imt$. Nechť $\rho_{\dot{A}BC} \oplus \sigma_{\dot{A}\dot{B}C} \in U$ a $u(\rho_{\dot{A}BC} \oplus \sigma_{\dot{A}\dot{B}C}) = 0$. Z exaktnosti BGG plyne existence ω_B takové, že $\nabla_{\dot{A}(C}\omega_{B)} = \rho_{\dot{A}BC}$. [10]

Definujme $\pi_{\dot{A}} := -\frac{1}{2}i\nabla_{\dot{A}}{}^{B}\omega_B$. Direktní suma $\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}}$ bude kandidátem na vzor. Stačí ukázat, že $\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}} \in T$. Fakt $t(\omega_B \oplus \pi_{\dot{A}}) = \rho_{\dot{A}BC} \oplus \sigma_{\dot{A}\dot{B}C}$ totiž plyne z konstrukce kandidáta. Použijeme-li antikomutativnosti diagramu na následujícím obrázku,

$$\begin{tikzcd} E^{0,0}_+ \arrow[r, "D^{0,0}_+"] \arrow[dr, "T^{0,0}_+"'] & E^{1,0}_+ \arrow[r, "D^{1,0}_+"] & E^{2,0}_+ \\ & E^{1,1}_+ \arrow[ur, "S^{1,1}_+"'] & \end{tikzcd}$$

dostaneme:

$$\nabla_B{}^{\dot{A}}\nabla_{\dot{A}}{}^{C}\omega_C = -\pi^{2,0}_+\nabla\nabla_{\dot{A}(B}\omega_{C)} = -\pi^{2,0}_+\nabla\rho_{\dot{A}BC}$$

Dík tomu, že $\nabla_A{}^{\dot{A}}\rho_{\dot{A}BC} = 0$, jak je uvedeno v definici modulu U', je speciálně i projekce ve výše uvedeném vztahu, reprezentujícím antikomutativitu, rovna nule. Tuto rovnost použijeme v následujícím výpočtu: $\nabla_B{}^{\dot{A}}\pi_{\dot{A}} = -\frac{1}{2}i\nabla_B{}^{\dot{A}}\nabla_{\dot{A}}{}^{C}\omega_C = 0$. [11]

[9] První člen v třetí rovnosti předchozího výpočtu je nulový dík rovnici (5).

[10] Snadno ověříme zbývající podmínku $d_1(\rho) = 0$, neboť $d_1(\rho) = T^1_+(\rho) + T^1_-(Y(D^1_+(\rho))) = 0 + 2iT^1_-(Y(\sigma)) = 0 + 0 = 0$. $T^1_-(Y(\sigma)) = 0$, neboť $T^1_-(\sigma) = 0$ a Y je izomorfizmus *Spin*-modulů - viz Severa [15].

[11] Obstrukcí k antikomutativitě výše uvedeného diagramu je skalární křivost κ.

(d) Exaktnost v bodě 5 je ekvivalentní tomu, že u je surjektivní, což plyne bezprostředně z definice prostoru V.

P o z n á m k a: Všimněme si, že jsme v důkazu potřebovali platnost $W = \kappa = 0$. Chtěli-li bychom větu zobecnit pro některé širší třídy křivých variet, museli bychom modifikovat důkaz, popř. definice modulů a/nebo zobrazení mezi nimi, čímž bychom se však zřejmě vzdálili od Penroseových intencí, formulovaných v dříve zmíněné sérii článků v Twistor Newsletter, viz Penrose [1-5].

Formulujme následující zobecnění předchozí věty:

Věta 10:

Pro každou konformně plochou pseudoriemannovu varietu (M, g) s nulovou skalární křivostí, $\kappa = 0$, dimenze $dim M = 4$ se $Spin$-strukturou (M, Λ) je posloupnost

$$0 \xrightarrow{0} S \xrightarrow{s} T \xrightarrow{t} U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{0} 0,$$

kde atomy S, T, U, V a zobrazení s, t, u jsou definovány výše, exaktní posloupností svazků.

Důkaz: plyne z předchozího důkazu (včetně poznámek 8 a 11 pod čarou, které se opírají o lemma o antikomutativitě).

Literatura.

[1] Penrose R. (1991): Twistors as Charges for Spin3/2 in Vacuum, Twistor Newsletter 32, 1-5.

[2] Penrose R. (1991): Twistors as Spin3/2 Charges Continued: $SL(3,\mathbb{C})$Bundles, Twistor Newsletter 33, 1-6.

[3] Penrose R. (1994): Spin3/2 fields and local twistors, Twistor Newsletter 37, 1-6.

[4] Penrose R. (1994):A Twistor-Topological Approach to the Einstein Equations, Twistor Newsletter 38, 1-9.

[5] Penrose R. (1995): Concerning Space-Time Points for Spin3/2 Twistor Spaces, Twistor Newsletter 39, 1-5.

[6] Penrose R., Rindler W. (1987): Spinory i prostransvto-vremja, vol. I, Mir Moskva.

[7] Lounesto P.(1997): Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press.

[8] Baum H. (1991): Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren ueber pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten, Teubner Verlaggesellschaft.

[9] Friedrich T. (1997): Dirac Oerator auf den Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Friedrich Vieweg Verlaggesellschaft.

[10] Fulton W., Harris J. (1991): Representation Theory: a first course, Springer-Verlag New York.

[11] Bureš J., Souček V. (1984): Regular spinor valued mappings, Dipartmento di matematica, Universita degli studi di Bologna.

[12] Sternberg S. (1994): Group Theory and Physics, Cambridge University Press

[13] Naber G.-L. (1992): The Geometry of Minkowski Spacetime, Springer-Verlag.

[14] Ward R.-S., Wells R.-O. (1990): Twistor Geometry and Field Theory, Cambridge University Press.

[15] Severa V. (1998): Invariant differential Operators on Spinor valued differential Forms, dizertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy Praha.