

Křivkový a plošný integrál

Diferenciální formy a jejich integrace

1. Nechť $e_1, \dots, e_6$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^6$. Zjednodušte:
 - a) $e_2 \wedge e_5 \wedge e_3 \wedge [e_1 \wedge e_4 + e_4 \wedge e_2]$
 - b) $[e_2 + e_5] \wedge e_3 \wedge e_1 \wedge [e_5 - e_4]$
2. Nechť $e_1, \dots, e_3$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^3$. Nechť $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_3, v_3 = e_1 + e_3$. Vypočítejte $e = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$. Přitom odvoďte, čemu se rovná

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vypočítejte $d\omega$, je-li:
 - a) $\omega = xdx + ydz$
 - b) $\omega = \sin x dy + dz$
4. Napište rovnice, které musí splňovat φ_i resp. ψ_{ij} forem
 - a) $\omega = \varphi_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - \varphi_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \varphi_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - \varphi_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$
 - b) $\tau = \psi_{12} dx_3 \wedge dx_4 - \psi_{13} dx_2 \wedge dx_4 + \psi_{14} dx_2 \wedge dx_3 + \psi_{23} dx_1 \wedge dx_4 - \psi_{24} dx_1 \wedge dx_3 + \psi_{34} dx_1 \wedge dx_2$,aby
 - a) $\omega = d\tau$
 - b) $d\omega = 0$.
5. Ukažte, že je-li ω forma sudého stupně, pak $\tau = \omega \wedge d\omega$ je exaktní.
6. Nechť $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\Phi(s, t) = [st, s \cos t, e^t]$. Nalezněte $\Phi^*\omega$ pro:
 - a) $\omega = xdy$
 - b) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$
7. Nechť $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ je 1-forma na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nechť $\Phi(t) = [r \cos t, r \sin t]$, kde $r > 0$ je pevné. Nalezněte formu $\Phi^*\omega$.

8. Nalezněte 1-formu ω pro kterou $d\omega = (x^2 + y^2)dx \wedge dy$ a užíjte ji pro výpočet integrálu

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2)dx \wedge dy,$$

kde $\Omega = \{|x| + |y| < 4\} \setminus \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Vypočítejte $\int_M \omega$, kde:

- a) $\omega = xzdx \wedge dy$ na $\mathbb{R}^3$, $M = \{x^2 = y^2 + z^2 + 1, x \in [1, \sqrt{2}]\}$ s orientací danou normálou v bodě $m \in M$, jejíž první komponenta je kladná
b) $\omega = e^y dz \wedge dx$ na $\mathbb{R}^3$, $M = \{y = x^2 + z^2, y \leq 4\}$ s orientací danou normálou v bodě $m \in M$, jejíž druhá komponenta je kladná

10. Ověřte Stokesovu větu pro:

- a) $\omega = xdz, c : x = uv, y = u + v, z = u^2 + v^2, [u, v] \in (0, 1)^2, v < u$
b) $\omega = xydy \wedge dz + yzdx \wedge dw, c : x = u^2 + v^2, y = u - v, z = uv, w = u + v, [u, v] \in (0, 1)^2$

11. Nechť $M = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2, 0 < x_4 < 1\} \subset \mathbb{R}^4$. Ukažte, že M je zobecněná plocha dimenze 4 v $\mathbb{R}^4$, najděte její parametrizaci c tak, aby souhlasila s kanonickou orientací na $\mathbb{R}^4$. Vypočítejte:

- a) $\int_{\partial c} (x_2 + x_4)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$
b) $\int_{\partial c} |x|^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$