

## Henri Lebesgue a jeho integrál

### Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převedte  $\int_{\Omega} f(x+y)dxdy$  na jednoduchý integrál, jestliže  $f$  je spojitá a  $\Omega = \{(x,y); |x| + |y| \leq 1\}$ .
2. Převedte  $\int_{\Omega} f(x \cdot y)dxdy$  na jednoduchý integrál, jestliže  $f$  je spojitá a  $\Omega$  je ohraničeno křivkami  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 4x$ ,  $x, y > 0$ .
3. Přepište  $\int_0^1 (\int_y^1 f(x)dx)dy$  pomocí jednoho integrálu.
4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
  - a)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
  - b)  $(x^3 + y^3)^2 = xy$
  - c)  $x + y = a$ ,  $x + y = b$ ,  $y = \alpha x$ ,  $y = \beta x$ ,  $0 < a < b$ ,  $0 < \alpha < \beta$
5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
  - a)  $x + y + z = a$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $a \geq R\sqrt{2} > 0$
  - b)  $z = xy$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 1$
  - c)  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = x$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $z = 0$
  - d)  $z = e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$
  - e)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ,  $a, b, c > 0$
  - f)  $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $a, b, c > 0$
  - g)  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
6. Spočtěte následující integrály:
  - a)  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$
  - b)  $\int_{\Omega} x^{-p}y^{-q}dxdy$ ,  $\Omega = \{(x,y); xy \geq 1, x \geq 1\}$
  - c)  $\int_{\Omega} (x+y)^{-p}dxdy$ ,  $\Omega = \{(x,y); x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$
7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $x, y, a > 0$ .
8. Najděte momenty setrvačnosti  $I_x$  a  $I_y$  homogenní desky s hustotou  $\rho = 1$  ohraničené  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ,  $z = c$ ,  $a, b, c > 0$ .
10. Kruhový válec s osou ve směru osy  $z$  kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0}gz\right),$$

kde  $p_0$  je tlak na spodní základně  $z = 0$ ,  $g$  je tíhové zrychlení. Výška válce je  $h$ , poloměr  $R$ . Určete hmotnost vzduchu ve válci.