1. Základní vl. Lieových grup

1

1.1 Definice $\mathcal{C}^\infty$-varieta $\equiv$ Hausdorffův topologický prostor se spoč. bází lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$ spolu s hladkým maximálním atlasem

Pozn.: Hausdorffův $= \forall m_1, m_2 \; \exists U_{m_1} \ni m_1 \; U_{m_2} \ni m_2$ otevřené, že $U_{m_1} \cap U_{m_2} = \emptyset$

¬Hausd. $X = \{p_1, p_2\}$, $T = 2^X = \{\emptyset, \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_1, p_2\}\}$ (tzv. diskrétní topologie) je Hausdorffův, ale

$X = \{p_1, p_2\}$, $T = \{\emptyset, \{p_1, p_2\}\}$ není Hausd.

$U_{p_1} \ni p_1 \Rightarrow U_{p_1} = \{p_1, p_2\}$

$U_{p_2} \ni p_2 \Rightarrow U_{p_2} = \{p_1, p_2\}$ $\quad U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$

$L^2(\mathbb{R}^n)/S(\mathbb{R}^n)$ s kvocientní topologií není Hausdorffův

Pozn.: X mna, T topolog. na X $\quad X$ má spoč. bázi $\equiv \exists \mathcal{V} \subseteq T$ spočetná $\forall U \in T \; \exists \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$: $U = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$.

$\mathbb{R}$ má spoč. bázi $\mathcal{V} = \{(a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$ ($\mathbb{Q}$ spoč., $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ spoč., tj. $\mathcal{V}$ spoč.)

$(0,1) \times \omega_1$ se souč. topolog. nemá spoč. bázi, ω_1 1. nesp. ordinál!

1. nespocetny ordinal

Pozn. $\mathcal{C}^\infty$-Atlas $\equiv$ lib. množina $\mathcal{A} = \{(U, \varphi) \mid U \subseteq X$ ot., $\varphi: U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ homeomorfismus$\}$, že

$\bigcup_{x \in \mathcal{A}} pr_1(x) = X$, kde $pr_1(U,\varphi) = U$, $x = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$, a

$\forall (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$ $\quad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to$

$\to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ je

hladká z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ (zderivuj, co je $\frac{d}{dx}$, nebudeme sčítat $\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{\|h\|}\right)$.

Maximální $\equiv$ neexistuje větší (vůči inkluzi množin)

Porovnávání množin než „cokoliv" jiného [Zde snadno maximální je největší; největší $\equiv$ všechny jsou v něm obsaženy

!! ze všech kompatibilních

kompatibilní: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ komp. $\equiv$ $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ je $\mathcal{C}^\infty$-atlas

Pozn. „Vše lze" udělat pro C^k. V def. $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ... je $\mathcal{C}^k$-zobrazení, jakož i „kompatibilita" ~~a~~ $\mathcal{C}^k$-atlasu.

Pozn.. $X = \mathbb{R}$, • $U_1 = \mathbb{R}$, $\varphi_1 = id$ $\mathcal{A}$ maximální atlas obsahující (U_1, φ_1) tzv. std. $\mathcal{C}^\infty$-atlas na $\mathbb{R}$.

• $U_2 = \mathbb{R}$, $\varphi_2(x) = x^3$ $\mathcal{B}$ maximální atlas obsahující (U_2, φ_2)

Tento není kompatibilní s $\mathcal{A}$ ~~nebo~~

Není ani srovnatelný s $\mathcal{A}$. Kdyby ano, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ je $\mathcal{C}^\infty$, což není, není ani dif. (v nule neexistuje derivace)

• Chceme-li tyto atlasy resp. variety zrovnoprávnit, musíme dále faktorizovat ... $\mathcal{C}^\infty$-~~st~~struktura je pak obecnější pojem než $\mathcal{C}^\infty$-varieta

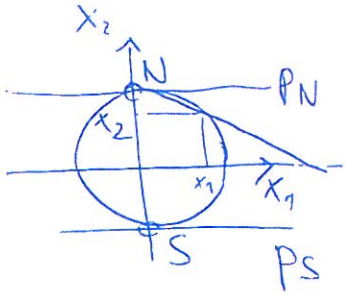
Příklad $S^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ s metrickou topol.

$T_{S^1} \ni U$ iff $\exists V \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená (vulas suegolu), že

$U = S^1 \cap V$ (tzv. podmnožinová topol., topol. ind. inkluzí

$U_1 = S^1 \setminus \{N\}$, $N = (0,1)$

$\varphi_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 - x_2}$, $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \setminus p_N \to \mathbb{R}$



φ_1 je spojitá!

$\varphi_1|U_1$ je spojitá. Restr. spoj. je spojitá (snadné!)

Máte-li ovšem homeo! Inverze: $y = \dfrac{x_1}{1 - x_2}$

$y(1 - x_2) = x_1 \Rightarrow y^2(1 - x_2)^2 = x_1^2 = 1 - x_2^2 \quad /:(1 - x_2)$

$$y^2(1 - x_2) = 1 + x_2 \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$$

$$x_1 = \ldots = \frac{2y}{y^2 + 1}$$

Inverze existuje a zjevně opět spojitá (podíl polynomů s nenulovým jmenovatelem).

$\varphi_1|_{U_1}$ je tedy homeo

—

$\varphi_2(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 + x_2}$, $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \setminus p_S \to \mathbb{R}$, $U_2 = S^1 \setminus \{S\}$

$S = (0, -1)$, φ_2 spoj. $\Rightarrow \varphi_2|_{U_2}$ spoj.

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \varphi_2\left(\frac{2y}{y^2+1}, \frac{y^2-1}{y^2+1}\right) = \frac{2y \cdot (y^2+1)}{1 + \frac{y^2-1}{y^2+1}} =$$

$$= \frac{2y}{y^2+1+y^2-1} = \frac{1}{y}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ je } C^\infty\text{-fce}$$

Analogicky $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y) = \dots = \frac{1}{y} \mid y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ opět C^ω-f.

Jiné dvojice v atlasu nejsou, tj. jde o C^ω-atlas

Vezmeme, jak přikazuje definice, atlas $\mathcal{A}$ maximální,

jenž obsahuje $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ (jak umíte ex

nějaký, existuje maximální). Je to atlas? C^ω - testováno

$U_1 \cup U_2 = S^1$, φ_i homeo .. testováno/ověřeno.

Nyní grupová struktura.

$$(x_1,x_2)(x_1',x_2') = (x_1x_1' - x_2x_2', x_1x_2' + x_2x_1')$$

$$(x_1,x_2)^{-1} = (x_1,-x_2)$$

$$e = (1,0) \in \mathbb{R}^2$$

Otestovat: $(x_1,x_2)^{-1}(x_1,x_2) = (x_1,-x_2)(x_1,+x_2) =$

$$= (x_1(+x_1) - (-x_2)x_2, x_1x_1 + (-x_2)x_2) = (x_1^2 + x_2^2, 0) =$$

$$= (1,0) = e.$$

Asociativita zdlouhavé: Všimněte si, ale že

$\forall (x_1,x_2) \in S^1\ \exists!\ \varphi \in [0,2\pi)$, že $x_1 + ix_2 = e^{i\varphi}$ a že

$$\underbrace{\underbrace{(x_1,x_2)}_{e^{i\varphi}} \cdot \underbrace{(x_1',x_2')}_{e^{i\varphi'}}}_{e^{i(\varphi+\varphi')}} = (x_1x_1' - x_2x_2', x_1x_2' + x_2x_1') =$$

$$= (c\varphi\, c\varphi' - s\varphi\, s\varphi', \dots) =$$

$$= (c(\varphi+\varphi'), s(\varphi+\varphi'))$$

$\mathbb{C}$ | $\mathbb{R}^2$

, jež koresponduje s

Formálně: $\Phi(x_1,x_2) = e^{i\varphi}$, $\Phi((x_1,x_2)(y_1,y_2)) \overset{(*)}{=} \Phi(x_1,x_2)\Phi(y_1,y_2)$

$\Phi(((x_1,x_2)(y_1,y_2))(z_1,z_2)) = \Phi((\ )(\ ))\,\Phi(\ ) = (\Phi(\ )\Phi(\ ))\Phi(\ )$

$= (e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2})e^{i\varphi_3} = e^{i((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3)} = e^{i(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3))} = e^{i\varphi_1}e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}$

$= \Phi(\ )\,\Phi((\ )(\ )) = \Phi((\ )((\ )(\ ))) \Rightarrow$

$((\ )(\ ))(\ ) = (\ )((\ )(\ ))$ asociativita | neboť Φ je bijekce

(*) ověřeno v části sin, cos a součtové vzorce (výše)

bijekce: $\exists! \Rightarrow$ 1-1 zobr.

<u>na</u> $\{z \mid |z|=1\}$? $|z|=1 \Rightarrow \exists \varphi \in [0,2\pi)$ & $z = e^{i\varphi}$

Pak $x = \mathrm{Re}(e^{i\varphi})$ & $y = \mathrm{Im}(e^{i\varphi})$.

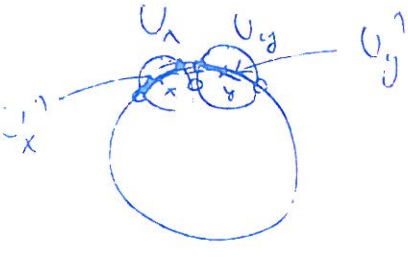
Dále: Násobení v S^1 je spojité, neb polynomy jsou.

Inverze v S^1 je spojitá, neb $(x,y) \mapsto (x,-y)$ je spoj. opět polynom.

Potřebujeme C^∞: polynomy jsou C^∞ (kvadr. i lineární ...

Závěr 1: S^1 je Lieova grupa, pokud S^1 je <u>Hausdorff</u> & se <u>sp. bází</u>. 1) $\mathbb{R}^2$ je Haus. $x,y \in \mathbb{R}^2$, $U_x(r = \frac{x-y}{2})$

$U_y(r = \frac{x-y}{2})$



$x,y \in S^1 \Rightarrow U^1_x = U_x(r = \frac{x-y}{2}) \cap S^1$

$U^1_y = U_y(r = \frac{x-y}{2}) \cap S^2$

$U^1_x \cap U^1_y = \emptyset$.

2) Spoč. báze: $\mathbb{R}^2$ má spoč. bázi $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}' = \{U \cap S^1 \mid U \in \mathfrak{B}\}$ je báze S^1.

Závěr: S^1 je Lieova grupa.

Další příklad: $(\mathbb{R}^n,+,-,0)$ $\quad (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$$0=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$$

$$-(x_1,\dots,x_n)=(-x_1,\dots,-x_n)$$

$G=\mathbb{R}^n$, $\varphi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, C^ω ct max. obsahující (G,φ).

Je Lieovou grupou: varieta (Hausd., sp. báze, ct atlas C^ω) $+,-$ jsou C^ω (neboť jsou lineární)

Pozn. Další S^1, tak $\mathbb{R}^n$ jsou abelovské ($\equiv$ komutativní).

Zobecnění věty o implicitních funkcích. Odkud vyrábíme „C^ω-"

Věta: M, N variety, $\phi: M\to N$ hladké a $n\in \mathrm{Rng}\,\phi$. Je-li $\forall m\in\phi^{-1}(n)$ je $\mathrm{rank}(d\phi)_m \leftarrow m$ konstantní, pak $\phi^{-1}(n)$ má stru variety na M.

Aplikace $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\phi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$, $1\in\mathrm{Rng}\,\phi$ (třeba $\phi(1,0)=1$)

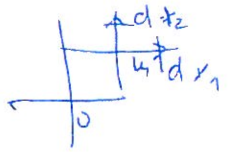
$(d\phi)_m=(2x_1^0(dx_1)_m,\ 2x_2^0(dx_2)_m)$, $m=(x_1^0,x_2^0)$

je diferenciál ϕ v m

[Dif. ϕ v m ve směru h_1,h_2 je číslo

$$(2x_1^0,\ 2x_2^0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=2x_1^0h_1+2x_2^0h_2.$$

$\{(dx_1)_m,(dx_2)_m\}$ je báze $T_m^*\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{R}^2$ duální

k $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_m,\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_m\right\}$ prostoru $T_m\mathbb{R}^2$ ]

$$\mathrm{rank}(d\phi)_m=\begin{cases}0 & \text{if } m=(0,0)\\ 1 & \text{if } m\neq(0,0)\end{cases}$$

$\phi^{-1}(1)\not\ni m_0=(0,0)$ tj. $\mathrm{rank}(d\phi)_m \leftarrow m$ je konst.

na $\phi^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \ni u_0 = (0,0)$.

Je tedy $\phi^{-1}(\{1\})$ varieta. S^1 je tedy varieta.

Př. $GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid A \text{ je bijekce}\} \underset{\text{lin. alg.}}{=}$

$= \{A \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} =$

$= M(n,n;\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ nesmí tam být matice s nulovým determinantem

$\det^{-1}(\{0\})$ je uz., neboť $\det : M(n,n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je spoj. (polynom řádu n)) a $\{0\}$ je uz. v $\mathbb{R}$ (doplněk $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ otev.) Vzor uz. při spoj. zobr. je zase uz. (stejně pro ot.)... topolog. (snadné). Je tedy $\det^{-1}(\{0\})$ uzavřená.

$M(n,n;\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ otevř.

Otevřené podmnož. variet jsou variety (Haus. triv., spoč. báze a atlas restrikcí na tuto ot. podmnož.)

Násobení $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$ polynom $\Rightarrow C^\infty$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\det A_{\hat{j}\hat{i}}}{\det A}(-1)^{i+j} \quad C^\infty \Leftarrow \text{~~spoj~~ polynom \&}$$

$\& \neq 0$.

$A, B \in GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \det(AB) = \det A \det B \neq 0$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$ $\boxed{\text{grupa}}$

$GL(n,\mathbb{R})$ je Lieova grupa.

Je otevřená v $M(n,n;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ tj. není kompaktní!

(jsme v kon. dim. top. vekt. prostoru)

Př. $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid A^T A = 1\}$

Zkusíme nejdříve grupa:

- $A, B \in O(n,\mathbb{R})$ $\quad (AB)^T AB = (B^T A^T)(AB) = B^T 1 B = 1$

  (asociativita mat. násobení!)

- $A^{-1} \in O(n,\mathbb{R}) \overset{?}{\Longleftarrow} A \in O(n,\mathbb{R})$

$$A^T A = 1 \Rightarrow A^T = A^{-1} \;/\, T \Rightarrow A = (A^{-1})^T$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} = A A^{-1} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in O(n,\mathbb{R}) \checkmark$$

- Varieta: $\phi : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{varieta}}}{M(n,n;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}} \longrightarrow S(n;\mathbb{R})$ ← označuji sym. mat.

$\phi(A) = A^T A \quad (A^T A)^T = A^T A$ tj. „jde" do sym. matice

$(d\phi)_A B = A^T B + B^T A$, neboť

$$\phi(A+tB) - \phi(A) - t(d\phi)_A B =$$
$$= (A+tB)^T(A+tB) - A^T A - tA^T B - tB^T A =$$
$$= t^2 B^T B + tB^T A + tA^T B - tA^T B - tB^T A = t^2 B^T B$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\phi(A+tB) - \phi(A) - (d\phi)_A B\right] = \lim_{t\to 0^+} t B^T B = 0.$$

$\operatorname{rank} (d\phi)_A = \frac{n(n+1)}{2}$ tvrdím. Jelikož $\dim S(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ tvrdím, že $(d\phi)_A$ je surjektivní.

Dokažme to: $C \in S(n;\mathbb{R})$

$B = \frac{AC^T}{2}$ $\quad (d\phi)_A B = A^T B + B^T A = A^T \frac{AC^T}{2} + \frac{CA^T}{2} A =$

$= \frac{C^T + C}{2} = \frac{2C}{2}$, tj. ano vzor je $\frac{AC^T}{2}$.

$\text{sym. } C$

(To je výhoda, používat $S(n;\mathbb{R})$; jinak diferenciál není na $M(n,n;\mathbb{R})$. „trik") $\Rightarrow O(n;\mathbb{R})$ je varieta.

- Nyní bychom ověřovat $\mathcal{C}^\infty$-násobení & $\mathcal{C}^\infty$-inverze. Opět ale snadné: jsou to restr. zobr. z $GL(n;\mathbb{R})$, jež jsou hladké (viz výše).

Př. $U(n) = \{A \in M(n,n;\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = 1\}$ $\quad (A^\dagger = \bar{A}^T)$

Stejný trik jako v $U(n)$.

Pozn. $GL(n,\mathbb{R})$ obecná lineární grupa

$O(n;\mathbb{R})$ ortogonální grupa

$U(n)$ unitární grupa

Někdy píšeme $GL(n)$, velmi často $O(n)$.

$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,n;\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$

$O(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,n;\mathbb{C}) \mid A^T A = 1\}$

(NE $A^\dagger A = 1$)

Pokračování

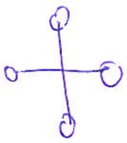
$\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$

$GL(n,\mathbb{F}) := M(n,n;\mathbb{F}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$,
kde $\det : M(n,n;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je zobr. determinantu, je varietou, neb jde o otevřenou podmnožinu (v $M(n,n;\mathbb{F})$): $\{0\}$ uz. v $\mathbb{F}$, det spoj $\Rightarrow$ $\det^{-1}(\{0\})$ uz., $X \setminus$ uz. je otevřená.

(Ot. podmny variet jsou variety; restrikce map atlasu definují nové atlasy; restr. na ot je důležité.)
[Kowalski]

general linear → special linear

$SL(n,\mathbb{F}) := \det^{-1}(\{1\})$ je uzavřená (top.) a podgrupa L. grp. — grp. $GL(n,\mathbb{F})$. Je to varieta? Uz. podmny variet nejsou automaticky variety (s top. indukovanou inkluzí):

 v $\mathbb{R}^2$ není varieta (vůči top. ind. inkluzí).

Platí však (VOI pro hom. L. gr.)

Věta: $\varphi : G \to G'$ buď homomorfismus Lieových grup ($:= \mathcal{C}^\infty$ a homom. grup). Pak rank $d\varphi$ je konstantní a $\operatorname{Ker} \varphi$ $(= \{g \in G \mid \varphi(g) = 1'\})$ je Lieova grupa.

Pozn.: Opět lze mluvit o podvarietách $\rightsquigarrow$ Lieova podgrupa (není jen podgrupa a Lieova grupa, nebo podvarieta a grupa; pojem Lieovy podgrupy $\overset{(\equiv)}{\rightsquigarrow}$ uz. podvarieta a grupa).

Ad $SL(n,\mathbb{F})$: $\det : GL(n,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times (:= \mathbb{F}\setminus\{0\})$, což je Lieova grupa pro $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (i $\mathbb{Q}$ s diskr. topol., viz dále)) je (multiplikativní) homomorfizmus a $\mathcal{C}^\infty$-zobr. (polynom). Odtud jde o homom. L. grup.

Tedy $SL(n,\mathbb{F}) := \det^{-1}(\{1\}) = \mathrm{Ker}(\det)$ je L.g. dle předchozí věty.

Pozn.: $SL(n,\mathbb{F})$ je L.g. bez použití VOI pro homom. L.g.:

Lemma: $(d \det)_A B = \det A \, \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$ („Jacobi" "fmule")

Dk.: $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(A+tB) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\det A) \det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) =$$
$$= \det A \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (1 + t\,\mathrm{Tr}(A^{-1}B) + t^2 \underbrace{\ldots}_{\Sigma \text{ 2lé minor.}} + \ldots + t^n \det(A^{-1}B))$$
$$= \det A \, \mathrm{Tr}(A^{-1}B). \quad \square$$

Chceme tedy $(d\det)_A : T_A GL(n,\mathbb{F}) \to T_A \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}$ má konst. rank (při „měnění" se $A \in \underline{SL(n,\mathbb{F})}$)

pro $A=0$, zjevně rank nula... tj. "stačí" na $SL(n,\mathbb{F})$)

$A \in SL(n,\mathbb{F}) \Rightarrow d\det_A^{(B)} = \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$. Stačí rank je 1 (maximální rank ~~zobr.~~ do $\mathbb{R}/\mathbb{C}$). Matice dif. v A?

$((A^{-1})_{11}, (A^{-1})_{12}, \ldots, (A^{-1})_{nn})$ vůči $(E_{ij})_{ij}$

Kdyby nebyl nula $\Rightarrow (A^{-1})_{ij} = 0 \ \forall i,j \Rightarrow A^{-1} = 0$, což je SPOR (sjedn. inverze?). Dle VOI (pro

C^∞-zobr.) je tedy $SL(n,\mathbb{F})$ podvariet.

Že je to L.g. je snadné: stačí nás. a inv. jsou C^∞, ale zde: Jde o restr. polynomů (byť i na otev. mn.), jež jsou C^∞ ...

Pozn.: Nemáme Jac-fmli z dřívějška? (LA, MA-wronskiány*). Známe $\det e^{tB} = e^{t\,\mathrm{Tr}\,B}$.

Derivace v $t=0$: $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det e^{tB} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\,\mathrm{Tr}\,B} =$

$\underline{(d\det)_E\, e^{0B} B} =$ ↑ derivace složene, chain rule

$= \mathrm{Tr}\,B\; e^{0\,\mathrm{Tr}\,B} = \underline{\mathrm{Tr}\,B}$, což je spec. případ.

spec. case Jacobi

$X \neq \emptyset$, $\Sigma \subseteq 2^X$ <u>σ-algebra</u> $\equiv$ $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

$A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$

$\emptyset \in \Sigma$

Pozn.: • $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$ $\subseteq$ $x \in A_i \Rightarrow x \in X$

$\&$ $x \in X \setminus A_i$ $\exists i$ spor

$\supseteq$ $x \in X \wedge x \notin \bigcup_{i=1} X \setminus A_i \Rightarrow x \notin X \setminus A_i \ \forall i \Rightarrow$

$x \in A_i \ \forall i \Rightarrow x \in \bigcap A_i$

• $A, B \in \Sigma$ $A \setminus B = \underbrace{A \cap \underbrace{(X \setminus B)}_{\in \Sigma}}_{\in \Sigma}$

alternativne, ale ekvivalentne, minimalni

X topolog. prostor T_X topologie $\subseteq 2^X$

<u>Borelova σ-alg:</u> $\mathcal{B}_X$ nejmenší σ-algebra obsahující T_X

unicita sporem

Nechť $\mathcal{B}_X \not\subseteq C$ $C \supseteq T_X$ σ-alg.

$\Rightarrow \mathcal{B}_X \cap C$ je σ-alg., obsahuje T_X

a $\mathcal{B}_X \cap C \subsetneq \mathcal{B}_X$ $\&$ $\mathcal{B}_X$ je nejmenší.

$X \neq \emptyset$, Σ σ-alg $\Rightarrow (X, \Sigma)$ <u>měřit. prostor</u>

<u>míra</u> na měř. prostoru $(X, \Sigma) \equiv \mu: \Sigma \to [0, +\infty]$, že

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ $\forall (A_i)_{i=1}^{+\infty}$ $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$.

• $\int_X g \, d\mu$ pro g schodovitou $:= \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$, $g = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$

• $\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \leq f, g \text{ schodovitá } g \geq 0 \right\}$ pro $f \geq 0$

$\left(\int_X f \, d\mu = -\int_X (-f) \, d\mu \text{ pro } f \leq 0 \right)$, $f = f_+ - f_-$ $\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$

toto netreba definovat

však

Def: $\mathcal{L}^1(X) = \{ f: X \to \mathbb{R} \mid \int_X f \, d\mu < \infty \}$ integrovatelné.

Př.: Počítací míra $\#(A) = \begin{cases} \#A & , \#A < +\infty \\ \infty & , \text{jinudy} \end{cases}$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\Sigma = 2^X$

Je borelovská, neboť je def. na $\mathcal{B}_X$ (je def na $\Sigma = 2^X$).

Př.: Lebesgueova míra je borelovská, neboť je def na $\supseteq \mathcal{B}_X$.

Def: $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ je lok. kon $\overset{def}{\iff} \forall x \in X \ \exists U \in T_X$: $x \in U \wedge \mu(U) < \infty$.

Př.: Počítací není lok. kon. $\binom{*}{x} U$ $\#U = \infty \dots$

Def: Lok. kon. Bor. míra slují Radonova if

1) $\mu(A) = \inf\limits_{\substack{U \supseteq A \\ \text{ot}}} \mu(U)$, $A \in \mathcal{B}$ vnějšně reg.

2) $\mu(U) = \sup\limits_{\substack{K \subseteq U \\ \text{cpt.}}} \mu(K)$ slabě vnitřně reg

Pozn: 1) Leb. je Radonova

2) X nespoč. ($\mathbb{R}$) např., kospoč. top.: $\emptyset \in T_X$ definice

$\emptyset \neq A \subseteq X$ je otevř. ($\in T_X$) iff (definice)

$X \setminus A$ je spočetná!

Proč je to topologie? (Dokázat.)

Kospoč. míra DEF: $\left.\begin{array}{l}\mu(A) := 0 \quad A \text{ spoč.} \\ \mu(A) = 1 \quad A \text{ jinak}\end{array}\right\}$ lok. kon!

Př.: $X = \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{l}A \text{ otevř.} \\ \neq \emptyset\end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) = 1$

$\mu(\mathbb{R}) = 0$, $\mathbb{Q} \subseteq U$ $\mu(U) = 1 \xrightarrow{\inf} 1 \neq 0$.

není Radonova

viz níže

Definice: G : topologická grupa, μ - Radonova míra na G, $\mu(gU) = \mu(U)$ $\forall g \in G$

U měřitelná; ať μ nazveme levou Haarovou mírou.

(Haarova)

Věta (Weil): Nechť G je lokálně kompaktní top. grupa. Pak existuje nenulová levo-inv. Haarova míra. Je jediná až na násobek.

Dk.: Komplikovaný (2 týdny).

Používá se Tychonovova věta (dk. E. Čech).

Pozn.: Lok. komp $X \equiv \forall x \ \exists K \ni x$ K kompaktní okolí x v X

Pozn.: Topologická grupa $\supseteq$ Lieova grupa

Top. grupa = top. prostor s $m : G \times G \to G$ spojitým a $i : G \to G$ spojitým, kde (G, e, m, i) je grupa (tj. asoc. s el. inverze : $m(g, i(g)) = e$, $m(e, g) = g$ $m(m(g,h), j) = m(g, m(h, j))$ atd.) (ve výrazu „asoc. s el. inverze" je nad „s" připsáno „k i")

Př.: $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s diskr. topol. je varieta dimenze 0

$(\mathbb{Q}, +, 0)$ s top. indukovanou $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ není varieta dimenze $0, 1, \ldots$ $\Rightarrow$ není Lieova grupa!

Otázky: Je $\mathbb{Q}$ s diskr. topol. grupa?
Je $\mathbb{Q}$ s indukr. topol. grupa?

Př.: $\mathbb{Q}$ s indukovanou není lokálně kompaktní

„Např." 0 nemá komp. okolí. (vždy vykonvergujeme z $\mathbb{Q}$ ... konstrukce?)

(např. alg. na výpočet $\sqrt{2}$ pomocí iterací)

Haarova míra na $\mathbb{R}^+$ $\mu(A) = \int_A \frac{1}{x}\, dx$, A měřitelná (14)

Leb.

Radonovskost (konvergenční otázky; teorie Leb. int. na $\mathbb{R}^n$ či abstr. Leb. int. toto řeší).

Invariance: $A = (a,b) \subseteq \mathbb{R}^+$

$$\mu(a,b) = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = [\ln|x|]_a^b = \ln|b| - \ln|a| = I$$

$$\mu(r(a,b)) = \mu((ra,rb)) = \int_{(ra,rb)} \frac{1}{x}\, dx = [\ln|x|]_{ra}^{rb} =$$

$r > 0$

$$= \ln|rb| - \ln|ra| = \ln|r| + \ln|b| - \ln|r| - \ln|a| = I.$$

Haarova míra na $\mathbb{Z}$: $\mu(A) = \sum_{x \in A} 1$ vlastně počítací míra

Haarova míra na $\mathbb{R}^n$: $\mu(A) = \int_A 1\, d\lambda$, kde $d\lambda$ je Leb.

míra.

Haarova míra na S^1: $A \subseteq S^1$ měř.

$$\mu(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\mathbb{1}_A(\cos\varphi, \sin\varphi)}_{= \chi_A(\cos\varphi, \sin\varphi)}\, d\varphi$$ obloukova míra

Př.: $A = S^1 \Rightarrow \mu(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$

Př.: Levoinv., jež není pravoinv. G sluje afinní gr. symet. přímky.

$G := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x>0,\, y\in\mathbb{R} \right\}$ ověřte, že jde o grupu. Proč je Lieova (ind. top. z $M(2,2;\mathbb{R})$, ~~ud~~ atlasy?)?

: Formálně

$$\mu(U) := \int_G \chi_U \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} \underbrace{d\lambda_{\mathbb{R}^2}}_{\text{Leb. na } \mathbb{R}^2} \quad . \left(x^{-2} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_0^{-2} \right)$$

integruji fce, ne výrazy

• U měřitelná vůči $\lambda_{\mathbb{R}^2}$ $\quad (G \subseteq \mathbb{R}^2)$

$$\mu\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U \right) = \int_G \chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} \, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$$

$\chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$, tj. $= 1 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$

$\underbrace{\frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{} \in U$

$\begin{pmatrix} x/a & \frac{y-b}{a} \\ 0 & \frac{a}{a} = 1 \end{pmatrix} \in U$

$$= \int_G \chi_U \begin{pmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y-b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} \, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$$

Subst.: $x' = \dfrac{x}{a}$, $\quad y' = \dfrac{y-b}{a}$

$$= \int_G \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a^{-2} x'^{-2} \, |\mathrm{Jac}| \, d\lambda_{\mathbb{R}^2}^{(1)}$$

$$= \int_G \chi_U \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'^{-2} \, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$$

$$\mathrm{Jac} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right| = a^2$$

$= \mu(U) \Rightarrow \mu$ je levoinvariantní

• Obdobně proveďte výpočet $\mu\left(U \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Zjistěte, že $\neq \mu(U)$ (kdykoliv a není jedna). μ tedy není pravoinvariantní. Dle Haar-věty ale $\exists$ pravoinv. míra na G

Pozn. o konstrukci Haarovy míry pro Lieovu grupu

Pokud G je Lieova grupa, lze Haarovu míru zkonstruovat rel. snadno (a tak i dokázat Haar–Weilovu větu).

Nechť $\mathfrak{g} := T_e G$ (zde potřebuji $\mathcal{C}^1$-atlas na G).
„Lieovost"

Zvol $(e_1, \ldots, e_n)$ bázi $\mathfrak{g}$

$$(E_i)_g := (L_g)_{*e} e_i, \text{ kde } L_g(h) = gh.$$

Připomeňme, že $\phi : M \to N$ indukuje $\phi_* : T_m M \to T_{\phi(m)} N$

vzorcem

$$\left[(\phi_{*m})(t_m) f \right] := t_m (f \circ \phi) \quad \forall t_m \in T_m M.$$

$\omega := E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$ je nedeg. „nebot"
$E_1 \wedge \ldots \wedge E_n = (L_g)_{*e} (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ &
$(L_g)_{*e}$ je izo (jeho inv. je $(L_{g^{-1}})_{*g}$)

Def $\int f \, d\mu := \int f \omega$, kde je int. na variety G, jenž umím (mapami do $\mathbb{R}^n$, kde číhá Lebesg.

Příklady / Výsledky:

Př.: $\int\limits_{GL(n,\mathbb{R})} f\,d\mu = \int f(x)\,|\det(x)|^{-n}\,d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}$, $f: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$

$X \in M(n,n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

levo i pravoinvariantní

Př.: $G = SO(3) = O(3) \cap \{A \mid \det A = 1\}$

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha(\theta)\beta(\varphi)\alpha(\psi))\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\psi, \text{ kde}$$

$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \beta(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$$

levo i pravoinv.

Pozn.: G cpt: μ levá Haarova míra $\Rightarrow$ μ pravá Haarova míra

μ pravá míra — " — $\Rightarrow$ μ je levá Haarova

$G \subseteq M(n,n;\mathbb{R}) \wedge \det_{|G} \equiv 1 \Rightarrow$ totéž

Def: Zavádí se „koeficient záměnnosti" (Haarovy míry):

Modulární funkce: $\mu(U)$ buď levá H. míra

$\mu_g(U) := \mu(Ug)$ $\quad \mu_g(hU) = \mu(hUg) = \mu(Ug) = \mu_g(U) \Rightarrow \mu_g$ levá

$\overset{\text{jedn.}}{\Rightarrow} \exists!\, c_g (> 0)$ $\quad \mu_g = c_g \mu$

$\Delta: g \mapsto c_g$ se nazve modulární fce. $\quad \Delta(g) = c_g$

$\therefore \mu$ je levá iff $\Delta \equiv 1$.

2. Základy teorie reprezentací

*) stačí jen topologická grupa

Def: G Lieova grupa*), H Banachův prostor. Každý homomorfizmus $\rho : G \to Aut(H)$ nazveme <u>reprezentací</u> G na H, pokud je přidružené zobr. $G \times H \to H$ spojité.

Pozn: $\psi : G \times H \to H \qquad \psi(g,v) := [\rho(g)](v), \; g \in G, v \in H$

Pozn: $Aut(H) \subseteq B(H)$ má tato top.

na End(H) je $\|A\|_{op} = \sup\limits_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$, $B(H) = \{A \in End(H) \mid \|A\| < +\infty\}$, danou indukcí (opačnějím)

$U \subseteq Aut(H)$ otevř. $\equiv$ $U = Aut(H) \cap V$

V otevř. v $B(H)$, a v $B(H)$ je $\| \; \|_{op}$ normou

[na End H ne, $\exists A \in End(H)$ $\|A\|_{op} = +\infty \notin \mathbb{R}$ a $\| \; \|_{op} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ into!]

Známé: Když $\rho : G \to Aut(H)$ spojitý
top.pol.p. topol.p.

dim $H = \infty$.

přímo jako zobr. $\Rightarrow$ „skoro" nic by nebylo reprezentace! $\rho : \mathbb{R} \to Aut(L^2(\mathbb{R}))$
$[\rho(v) f](x) = f(x-v)$ ne!
(„translace")

Definice: $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(H)$ repr., $H' \subseteq H$ nazveme ~~pp.~~ : **inv. pp.**

1) H' uzavřený &

& 2) $\varrho(g)h' \in H'$ $\quad \forall h' \in H'$ (vlastně G-podmodul)

Pozn.: 1) ϱ je tedy možné „zúžit" na H', $\bar{\varrho}: G \to \mathrm{Aut}(H')$.

(pravé zúžení by bylo na podgr. $G' \leq G$)

$\bar{\varrho}(g)h' = \varrho(g)h' \in H'$.

tj.: $\bar{\varrho}(g): H' \to H'$, $\forall g \in G$

Říká se jí podreprezentace.

2) $\dim H < +\infty \Rightarrow$ každý pp. $H' \subseteq H$ je uzavřený

$\dim H = \infty$ ne! $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$: Translace $\varrho: \mathbb{R} \to GL(L^2$ zachovávají $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, tj. $\varrho(r)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\forall r \in \mathbb{R}$ $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ale $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ není inv. podprostor, neboť není uzavř. v $L^2(\mathbb{R})$.

Def: $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(H)$ nazveme **ireducibilní** $\equiv$ jediný inv. je $\{0\}$ a H.

Pozn.: Inv. pp. se chce uzavř., neboť jinak by „skoro nic" nebylo (v ∞-dim) ireducibilní.

Pozn.: $\varrho_1: G \to \mathrm{Aut}(H_1)$, $\varrho_2: G \to \mathrm{Aut}(H_2)$

$$\varrho = \varrho_1 \oplus \varrho_2 : G \to \mathrm{Aut}(H_1 \oplus_{\text{dir}} H_2)$$ **součtem repr.**

$$\varrho(g)(h_1, h_2) = \underbrace{\varrho_1(h_1)}_{\in H_1} + \underbrace{\varrho_2(h_2)}_{\in H_2} \in H_1 + H_2$$

Def: $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(H)$ **úplně reducibilní**, pokud $\exists I$, H_i, $i \in I$

$$\varrho = \bigoplus_{i \in I} \varrho_i, \quad \varrho_i : G \to \mathrm{Aut}(H_i) \text{ ired.}$$

Pozn.: $\bigoplus_{i \in I}$ se precizuje (my to tak necháme); úplně red je tedy součtem ired.

Přesněji budeme precizovat v případě $\varrho_i: G \to GL(H_i)$ pro H_i Hilbertovy prostory.

Přistupme k důležité definici. Repr. $\rho: G \to GL(H)$ značme (ρ, H) stručně.

<u>Def</u>: Buď G topologická grupa a (ρ, H), (ρ', H') repr. G na H resp. H'. Pak ρ naz. ekv. ρ' (píši $\rho \cong \rho'$) $\overset{def}{\iff}$ $\exists T: H \to H'$ lineární homeomorfizmus, že
$$\forall g \in G: \rho'(g) \circ T = T \circ \rho(g) \quad (*)$$

<u>Pozn.</u>: $T \in$ tedy homeo v <u>Ban</u> (Kat. B. prostorů, kde morfizmy jsou sp. lin. zobr).

! <u>Pozn.</u>: • $T: H \to H' \wedge \rho'(g) \circ T = T \circ \rho(g)\ \forall g$ a T spoj $\Rightarrow T$ naz. splétající, ekvivariantní nebo homomorf. reprezentací. Označím $\mathrm{Hom}_G(H, H')$. Nikoliv invariantním! Nevyžaduji ani bijektivnost.

• T ekviv., T spoj a T bij. $\Rightarrow T^{-1}$ spoj (tj. T je homeo) "open-map-thm" (nikoli ve fyzice) Banachův thm ... nevadí)

•
$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\rho(g)} & H \\ T \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow T \\ H' & \xrightarrow{\rho'(g)} & H' \end{array} := T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T$$
← diagr. vyj.

<u>Pozn.</u>: <u>Interpret. ekviv.</u> B báze H (jako v.p.), T splétající homeo $H \cong H'$. Pak tedy $\rho \cong \rho'$ (def.) a $[\rho(g)]_B^B = [\rho'(g)]_{B'}^{B'}$, kde $B' = T(B)$. Tedy ekv. ~~matice~~ repr. mají stejné matice (ex. báze, že ...).

Dk (pozn.): Označme $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots)$ a položme $\mathcal{B}' = (b_i')$, kde $b_i' = T(b_i)$, $\forall i$. $\mathcal{B}' = T(\mathcal{B})$. (Fixal g.)

Označme $\rho'(g)(b_i') = \sum_i \lambda_i' b_i'$ (λ_i' def.)

$\rho(g)(b_i) = \sum_i \lambda_i b_i$ (λ_i definují)

(Sumy konečné btw). Pak krasopisně

$\sum_i \lambda_i' b_i' = \rho'(g) b_i' = T\rho(g)T^{-1} b_i' = T\rho(g) b_i =$

$= T(\sum \lambda_i b_i) = \sum_i \lambda_i T(b_i) = \sum_i \lambda_i b_i'$. Celkem

$\lambda_i' = \lambda_i$, $\forall i$. matice jsou stejné (i-tý $[\rho(g)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} =$ i-tému $[\rho(g)]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$).

Důležité (třeš) pozorování: $T \in Hom_G(H, H') \Rightarrow$

Ker T je inv. pp. & pokud $\dim H' < \infty$, pak

taky Im T je inv. pp.

Dk.: • $v \in \operatorname{Ker} T$ $\rho(g)v \in \operatorname{Ker} T$? $T(\rho(g)v) \overset{\text{ekviv.}}{=}$

$= \rho(g) T v = \rho(g)(\vec{0}) = \vec{0}$ ((T spoj. $\Rightarrow$ Ker T uz.) topol. formality)

• $v \in \operatorname{Im} T \subseteq H'$ ((k. dim (dle pp.) $\Rightarrow$ Im T kon. dim $\Rightarrow$ Im T je uzav.)).

$\rho(g) v \in \operatorname{Im} T$? Ale $v \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists w$ $v = Tw$

$\rho(g) v = \rho(g) T w = T \rho(g) w \Rightarrow \rho(g) v \in \operatorname{Im} T$.

Věta (Schurovo lemma, jednoz...): Nechť (ρ, H) a (ρ', H') jsou lib. dvě ireducibilní repr. (topol.) grupy G na cplx. vekt. prostorech H a H' konečné dimenze.

Pak $\dim Hom_G(H, H') = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \rho \not\cong \rho' \\ 1 & \Leftrightarrow \rho \cong \rho' \end{cases}$.

Dk. To že vůbec $\mathrm{Hom}_G(H, H')$ je v.p. sami.

1) dim = 0 (pp.). Pro $\lightning$ $\rho \cong \rho'$. Z $\rho \cong \rho' \Rightarrow$ $T: H \to H'$ splétající homeo $\Rightarrow$ bijekce a splétající $\Rightarrow$ nenulová splétající, tj. $\mathrm{Hom}_G(H, H') \neq \{0\}$, tj. $\dim \mathrm{Hom}_G(H, H') > 0$ $\lightning$ s pp.

2) pp. $\rho \ncong \rho'$: $\lightning$ $\dim \mathrm{Hom}_G(H, H') > 0$. Z $\dim \mathrm{Hom}_G(H, H') > 0 \Rightarrow \exists T \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$ <u>nenulový</u>.
Ale Ker T je inv. pp. $\wedge$ ρ je ired. (pp) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, T = \{0\} \Rightarrow$ <u>T je inj.</u> Pokračujme tedy •
$\vee$ (jinak)
$\mathrm{Ker}\, T = H \Rightarrow T = 0$ (spor s nenulový)

• dál: Im T je inv. pp. (kon. dim.) a ρ' je ired. (pp.) $\Rightarrow \mathrm{Im}\, T = \{0\} \Rightarrow T = 0$ (opět $\lightning$ s nenul.)
$\vee$
<u>$\mathrm{Im}\, T = H'$</u>.

Celkem spor(y), neboť T inj. a $\mathrm{Im}\, T = H' \Rightarrow$ T bij. $\Rightarrow$ T homeo (kon. dim lin jsou spoj), tj. $\rho \cong \rho'$, což je spor.

3) pp. dim = 1 $\Rightarrow \exists T: H \to H'$ a T splét. Opět stejně se ukáže uvážením Ker T a Im T, že T je nutně bijekce. Odtud $(\rho, H) \cong (\rho', H')$, myslím $\rho \cong \rho'$.

4) $\rho \cong \rho'$ (pp.). $\rho \cong \rho' \overset{\text{def} \cong}{\Rightarrow} \dim \mathrm{Hom}_G(H, H') \geq 1$.
Musíme = 1. Buďte $T, S \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$.

[kdy:] Jsou násobky (což stačí). Pokud je jeden nulový, je násobkem druhého (nulovým :-)). Nechť tedy oba nenulové, pak stejně jako ve 2), jsou to bijekce. Utvořím tedy $T^{-1} \circ S : H \circlearrowleft H$. H cplx $\overset{\text{ZVA}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C}$, že $\operatorname{Ker}(T^{-1} \circ S - \lambda \mathbb{1}_H) \neq \{0\}$ ($\Leftrightarrow \exists v \in H$, že $T^{-1}Sv = \lambda v \Leftrightarrow (T^{-1}S - \lambda \mathbb{1})v = 0$)

T^{-1} je dle také z Hom_G, S také $\Rightarrow T^{-1} \circ S$ také $\Rightarrow T^{-1} \circ S - \lambda \mathbb{1}_H$ také $\Longrightarrow \operatorname{Ker}(T^{-1} \circ S - \lambda \mathbb{1})$ je inv. pp. (pozn. nad větou) Z ireducibility ρ je nutně (jelikož $\operatorname{Ker} \neq \{0\}$) $\operatorname{Ker} = H$, odkud $T^{-1}S - \lambda \mathbb{1}_H = \mathbb{0} \Rightarrow T = \lambda S$. Je tedy $\dim \mathrm{Hom}_G(H, H') \leq 1$, čímž je důkaz proveden (z pp. víme, že $\dim \leq 1$) $\square$

! Pozn.: 1) Nenulové splétající mezi k.d. ired repr. jsou bijekce ! (z důkazu, bod 2)

2) Neekviv. k.d. ired repr. nemají kromě nulového žádný splétající homomorfizmus (také bod 2 dk).

3) Pokud mám splétající mezi dvěma k.d. ired. repr., pak je násobkem nějakého pevného ("předem vybraného" :-)).

Def: G abel. nebo komut. $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $gh = hg \ \forall g, h \in G$

Věta (ir. repr. abel.): (ρ, V) buď <u>k. d.</u> ~~repr.~~ <u>ired.</u> <u>cplx</u>. repr. abelovské G. Pak $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

Dk.: 1) $\forall h$ $\rho(h)$ je splétající. Dk.: $\rho(g)\underbrace{\rho(h)}_{T}$ $(= \rho(gh) \underset{\text{abel}}{=} \rho(hg)) = \underbrace{\rho(h)}_{T}\rho(g)$ $\forall g \in G$.

Dle Schur. věty (část $\dim_G = 1 \Leftarrow \rho \cong \rho^{*}$) $(\rho^! = \rho)$

je $\rho(h) = c_h \mathbb{1}_V$ tj. přesněji

$\forall h \in G \ \exists c_h \in \mathbb{C}$ $\rho(h) = c_h \mathbb{1}_V$

2) $\langle v_0 \rangle$ je inv. pp., v_0 libovolný nenulový. Neboť $\rho(h) v_0 = c_h \mathbb{1}_V v_0 = c_h v_0 \in \langle v \rangle$.

3) Je-li $\dim V > 1 \Rightarrow \exists v_0 \wedge v_1$ generující nenulové a různé pp., že $\underbrace{\langle v_0 \rangle}_{\text{inv.}} \oplus \underbrace{\langle v_1 \rangle}_{\text{inv.}} \subseteq$ $\subseteq V$ ↯ s ireducibilitou. □

Pozn.: 1) „Esenc." pro tvrzení: ired. a abel.

2) V cplx „relativně" důležité. Uvažte $V = \mathbb{R}^2$ a $G = SO(2)$ $\left(\rho(g)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := g\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \ \forall g \in SO(2)\right)$

Pak $(\rho, \mathbb{R}^2)$ je ired., G je abel, ale $\dim V \neq 1$

3) $\mathbb{C}(t)^{\times}$ = mult. část. tělesa racionálních funkcí různých od nuly

$\rho: \mathbb{C}(t)^{\times} \to GL(\mathbb{C}(t))$ $\rho(f)(g) = fg$

→ nás. rac. fcí. Je ired., ale $\dim \mathbb{C}(t) = \infty$

Důležité pozorování: Pokud (ρ, H) je repr. kompaktní grupy G na Hilb. prostoru H, pak H obsahuje ired. repr. H_0 konečné dimenze.

Dk.: Uvažme T z min. důkazu. Tvrdím T je pozitivně definitní a kompaktní. (To, že T, je splétající víme.)

- Semidefinitost: $(Tv, v) = \overset{\text{min. dle}}{\cdots} = \int_G |\rho(g)v|^2 \, d\mu \geq 0$
- Definitnost: $\int |\rho(g)v|^2 d\mu \Rightarrow |\rho(g)v| = 0$ pro skoro všechna $g \in G \underset{\exists g_0}{\Longrightarrow} |\rho(g_0)v| = 0 \Rightarrow$ $\rho(g_0)v = 0 \Rightarrow \underline{v = 0.}$
  $\rho(g) \subseteq$ unitární operátory na G
- Kompaktnost vynecháme (zhruba: aproximace T pomocí op. konečného ranku)
- $\mathrm{Ker}(T - \lambda E)$ má kon. dimenzi pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$. (To je důsl. věty o spektrálním rozkladu pro kpt. op.)
- $H' = \mathrm{Ker}(T - \lambda E)$ je ... inv. pp. kon. dim. Pokud není ired. Zvol $H_0^1 \subsetneq H'$ a postupuj dál: H_0^1 ired ✓, H_0^1 není ired $\Rightarrow$ postupuj. Nebo $0 \subsetneq \underline{H_0} \subsetneq H$ inv. minimální dimenze.

H_0 je ired.

Věta o úplné reducibilitě: G kpt. top. grupa a (ρ, H) její repr. na H. p. H. Pak (ρ, H) je úplně red.

Dk.: Nechť $\mathcal{M} := \{(I, (H_i)_{i \in I}) \mid I$ množina, H_i inv. pp. H, H_i ireducibilní a $\forall i \neq j \in I$ je $H_i \perp H_j\}$. Dle předchozího pozorování (část o ireducibilitě) $\exists \tilde{H} \subseteq H$ ireducibilní,

a) tj. $\mathcal{M} \neq \emptyset$ (předp. Zornova lemmatu).

b) $(I, (H_i)_{i \in I}) \leq (J, (H_j')_{j \in J}) \overset{def}{\iff} I \subseteq J$ & $H_i' = H_i \ \forall i \in I$. Zjevně $\mathcal{M}$ je částečně usp. mna. Nechť $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ je dobře uspořádaná. Def.: $P := \bigcup \mathcal{P}$. Pak $\forall p \in \mathcal{P}$ je $p \leq P$. Tedy $\mathcal{P}$ má horní závoru. Dle Zornova lemmatu ($\iff$ axiom výběru) $\exists M \in \mathcal{M}$, jež je maximální, tj. $\forall m \in \mathcal{M}$ je $m \leq M$. Označme $M = (I_0, (H_i)_{i \in I_0})$ a def. $H' := \bigoplus_{i \in I_0} H_i$. Tvrdíme $H' = H$.

Pro spor: $H' \subsetneq H$. Pak ale $H'^{\perp} \neq \{0\}$.

Dle pozorování výše $\exists$ ired. $H_{\bar{0}} \subseteq H'^{\perp} \subseteq H$.

Pak ale $(I_0 \cup \{\bar{0}\}, (H_{\bar{0}}, (H_i)_{i \in I_0})) \in \mathcal{M}$, ale zároveň ($H_{\bar{0}} \not\subseteq H'$) je větší než $(I_0, (H_i)_{i \in I_0}) \in \mathcal{M}$, což je spor s maximalitou $(I_0, (H_i)_{i \in I_0})$.

! **Pozn.:** Pro G <u>není kpt.</u> nemáme úplnou reducibilitu, a to ani pro H kon. dim (viz sym. průtoky).
Jde o to, že nemůžeme unitarizovat reprezentace.
Existují repr. nekompaktních G, jež nelze unitarizovat (opět sym. průtoky).
Obecně však: (ρ, H) unit. repr. lib. G a $H' \subseteq H$ inv. pp. $\Rightarrow$ $H'^{\perp}$ inv. pp.

<u>Dk.:</u> $v \in H'^{\perp} \Rightarrow (v, w) = 0 \; \forall w \in H'$

$$(\rho(g)v, w) = (v, \rho(g)^* w) = (v, \rho(g)^{-1} w)$$
$$= (v, \underbrace{\rho(g^{-1})w}_{\in H'}) = 0, \text{ tj. } \rho(g)v \perp H'$$
$$\forall g \Rightarrow H'^{\perp} \text{ inv. pp.}$$

Po celkem obtížné části s více důkazy se věnujme aplikacím.

Peter–Weylův teorém

- zobecnění věty o rozkladu tzv. regulární repr. grupy G, $\# G < \infty$, na případ G kpt.
- $\mathbb{C}[G] := \{ f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ zobr.} \}$ je tzv. grupová algebra. Def. $\delta_g(h) = \begin{cases} 0 & g \neq h \\ 1 & g = h \end{cases}$, tj.

speciálně $\delta_g : G \to \mathbb{C}$. Snadno ukážete, že pro $\# G < \infty$ je $(\delta_g)_{g \in G}$ báze $\mathbb{C}[G]$.

[Na $\mathbb{C}[G]$ se násobí a sčítá: $(\lambda f)(g) := \lambda f(g)$
$(f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g)$] Je tedy
$\dim \mathbb{C}[G] = \# G$. Na $\mathbb{C}[G]$ máme tzv.
reg. reprezentaci G, $r : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[G])$
$(r(g)f)(h) := f(g^{-1}h)$ $\forall f \in \mathbb{C}[G]$ a $g, h \in G$.

Platí věta: $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{i \in \hat{G}} (\dim H_i) H_i$, kde
H_i jsou ired a $\hat{G}$ jsou všechny repr. G až na izomorfizmus. Dále $m H_i = \bigoplus^{m} H_i = \underbrace{H_i \oplus H_i \oplus \cdots \oplus H_i}_{m\text{-krát}}$.

👁 : Konečnost $\bigoplus_{i \in \hat{G}}$ zřejmá ($\dim \mathbb{C}[G] < \infty$)

Důsl: • $\forall$ ~~repr.~~ ired. repr. G se objeví v $\mathbb{C}[G]$!
• $\mathbb{C}[G]$ je ú. rozlož. (To ale víme: $\# G < \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow G$ kpt. $\Rightarrow$ každá je úplně reducibilní.
Zde ale jednodušší: $\dim \mathbb{C}[G] < \infty$ a r je
unitarizovatelná (průměrovací trik) $\Rightarrow$
najdu podrep. $\Rightarrow$ udělám doplněk $\Rightarrow$
najdu podrep $\rightsquigarrow$ až z kon. dim se
dostanu k ireducibilním.

Nyní již G obecná kpt. Díky $\exists$ Haarovy míry máme také $L^2(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid \int |f|^2 d\mu < \infty\}$. ($G$ kon. $\Rightarrow L^2(G) = \mathbb{C}[G]$!)

Na $L^2(G)$ máme také $r : G \to GL(L^2(G))$

$(r_g f)(h) = f(g^{-1}h)$. Zde bychom ale měli dokázat, že r je spojitá (vynecháme...)

Přesně definujme $\widehat{G}$.

Definice: $\widehat{G} := \{\rho : G \to GL(H),\ \rho$ ired. repr. G, H Hilbertův $\}/_{\cong}$ (pozn. Banachův lze také). Zde $\cong$ opět značí ekvivalenci reprezentací. Pro každé $\tau \in \widehat{G}$ (třídu ekviv. ireducibilních repr. τ) je $\tau = [\pi]$, kde π je nějaká ired. repr. G. Provedíme výběry $\forall \tau \in \widehat{G}$ $[(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rep.}}}{\pi}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.stor rep. } \pi}}{H_\pi})] = \tau$.

Peter-Weylova věta: Pro G kpt. platí

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus_{[(\pi, H_\pi)] \in \widehat{G}}} H_\pi^* \otimes H_\pi \, .$$

Dk.: Vynechám. Jde opět o funkcionální analýzu. (Triky ale podobné těm, co byly, vyjma Weierstrassovy věty o aproximaci, jež se také využívá). Dk viz např. Sepanski. $\square$

Pozn.: Víme $\dim H_\pi < \infty$!

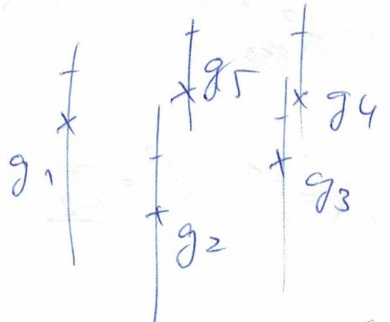
Dále $\dim(H_\pi^* \otimes H_\pi) = (\dim H_\pi)^2$.

Snadno $H_\pi^* \otimes H_\pi \simeq (\dim H_\pi^*) H_\pi$ (jako v.p.) $\simeq (\dim H_\pi) H_\pi$. Dokonce však i jako $\simeq$-reprezentací. Věta je tedy zobecněním věty o $\mathbb{C}[G]$.

Pozn.: Obecně $\dim L^2(G) = +\infty \Rightarrow$ nevíme nic o konečnosti $\hat{G}$!

Obecně pro $\# G = +\infty$ není $\hat{G}$ konečná, tj. neekv. ired. repr. nemusí být konečně. Není ani pro $G = S^1, SU(2), \ldots$

Aplikace: 1) G konečná. $L^2(G)=\mathcal{C}(G)\cong \underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{\#G\text{-krát}}\cong$



$\cong \underbrace{\mathbb{C}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}}_{\#G\text{-krát}} \cong \mathbb{C}^{\#G}$ $(\cong \mathbb{C}[G]$ sbalní $(\delta_g)_{g\in G}$

$m_\rho := \dim V_\rho \; (=\dim V_\rho^*)$. Pak ale P-W říká $\#G = \sum_{\rho\in\hat{G}} m_\rho^2 \Rightarrow$

Je jich (neekv.) konečně mnoho pro G kon.

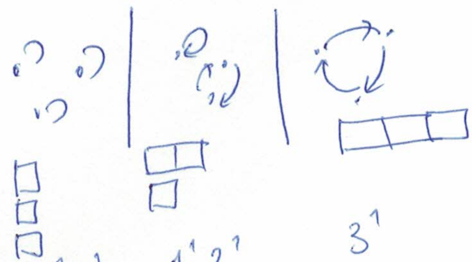
$G=S_3$, $\#G = \cancel{3!}\, 6$

$6=\sum_{i=1}^{m} m_i^2$ $\quad$ $6=1+1+1+1+1+1$

$6=2^2+1+1$ a to je vše.

Co se realizuje. Na to slouží tento algoritmus, jenž však neodvodíme (VR Goodmann–Wallach).

Napiš konj. třídy S_3:



$1^1 1^1 1^1$ $\quad$ $1^1 2^1$ $\quad$ 3^1

[id $\quad$ (t) $\quad$ (c)]

$\#\hat{G} = \#\mathrm{Conj}(G)$

($\hat{G}$: neekv. ir. repr.; $\mathrm{Conj}(G)$: množina konjug. tříd.)

$\#\mathrm{Conj}\, S_3 = 3 \Rightarrow \#\hat{G}=3$, a tedy se realizuje $6=2^2+1+1$. Jaké to jsou?

$\rho: S_3 \to GL(\mathbb{R})$ $\quad \rho(g)v = v \quad \forall g \in S_3, v \in V$

triv. repr.

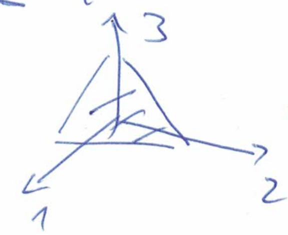
$\rho: S_3 \to GL(\mathbb{R})$ $\quad \rho(g)v = \mathrm{sgn}(g)\, v$

znam. repr. (sgn je $\underline{\text{hom}}$ $S_3 \to \mathbb{Z}_2$)

$\rho: S_3 \to GL(V)$ tradiční realizace

$V = \{ v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum v_i = 0 \} \le \mathbb{R}^3$

nadrovina dim 2



← ℝ-obrázek

$$\rho(g)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{g^{-1}(1)} \\ v_{g^{-1}(2)} \\ v_{g^{-1}(3)} \end{pmatrix} \qquad g \in S_3, \text{ tj. } g: \{1,2,3\} \circlearrowleft .$$

Proč je to reprezentace?

Proč je ireducibilní?

inv. $W \le \{(a, b, -a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ $\dim W = 1$ ↯

$W_\lambda = \{ (k, k\lambda, -k-k\lambda) \mid k \in \mathbb{R} \}$

•) $\lambda = 1$ $\quad (k, k, -2k)$ aplikuj $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

dostaneš se ke $(k, -2k, k)$ pro $k \neq 0$ jistě

~~jiné~~ mimo W

•) $\lambda \neq 1$ $\quad$ aplikuj $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$(\lambda k, k, -k-k\lambda) \to$ jinam.

<u>Tj. je to ir.</u>

Representace a jiné "indukované" (asociované <) přesněji

1) Duální k $\rho: G \to GL(H)$ $\rightsquigarrow$ $\rho^*: G \to GL(H^*)$, kde H^* je tzv. spojitý duál, tj. $H^* := \{\alpha: H \to \mathbb{C} \mid \alpha$ lin. a α spoj.$\}$,

spoj. ve smyslu (silné top.) $\boxed{\begin{matrix} v_n \to v \\ v\ H \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \alpha(v_n) \to \alpha(v) \\ v\ \mathbb{C} \end{matrix}}$,

definovaná $[\rho^*(g)\alpha](v) = \alpha(\rho(g)^{-1}v)$ $\forall \alpha \in H^*$ $\forall v \in H$

2) Součet $\rho_i: G \to GL(H_i)$, $i=1,2$; $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2: G \to GL(H_1 \oplus H_2)$

$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$, $v_i \in H_i$, $i=1,2$.

$\|(v_1, v_2)\| := \|v_1\| + \|v_2\|$ norma na $H := H_1 \oplus H_2$

3) Tenz. součin: $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$

kde ρ_1, ρ_2 jako výše. Na nekonečnění limitou.

Zde pro jistotu "a" H_i Hilbertovy (jinak více topologických součinů)

a na $H_1 \otimes H_2$ máme $\|h_1 \otimes h_2\|$

4) Hilbertova suma unitárních repr. $(\rho_i, H_i)_{i \in I}$ na H. p. H_i,

$i \in I$ libovolná.

$$\hat{\bigoplus_{i \in I}} \rho_i : G \to GL\left(\hat{\bigoplus_{i \in I}} H_i\right)$$

$$\hat{\bigoplus_{i \in I}} \rho_i(g)(v_1, v_2, \dots) := (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2, \dots)$$

$$\hat{\bigoplus_{i \in I}} H_i := \left\{(v_1, v_2, \dots) \in H_1 \times H_2 \times \dots \;\middle|\; \sum_{i \in I} |v_i|^2_{H_i} < +\infty\right\} \subseteq \bigtimes_{i \in I} H_i.$$

Všechny kvadraticky sčítatelné posl.

Def: (ρ, H) buď unitární repr. G na H.p. H. (ρ, H) nazveme úplně reducibilní, pokud $\exists I$ mna $\exists H_i, i \in I$, H.p., a $\exists \rho_i, i \in I$, $\rho_i : G \to GL(H_i)$ unit. repr. G, že

$$\rho \cong \hat{\bigoplus_{i \in I}} \rho_i \; \left(\Rightarrow H \cong \hat{\bigoplus_{i \in I}} H_i\right).$$

Př.:

1) $\rho_0 : SO(3) \to GL(\mathbb{R}^3)$ $\quad \rho(g)v = g(v)$, $g \in SO(3)$, $v \in \mathbb{R}^3$, tzv. definující repr. ($SO(3)$).

Je ired? $\lightning$ $0 \subsetneqq W \subsetneqq \mathbb{R}^3$ inv. pp.

- $\dim W = 1$ $\quad 0 \neq e_1 \in W$. $\|e_1\| = 1$. Doplň na ON-bázi $\mathbb{R}^3$ a vezmi g, že $g : e_1 \mapsto e_2, e_2 \mapsto e_3, e_1 \to e_3$

$$\rho(g) e_1 = e_3 \notin W$$

- $\dim W = 2$ $\quad (e_1, e_2)$ ON-báze W, (e_1, e_2, e_3) ON-báze $\mathbb{R}^3$. Vezmi g stejný!. $\rho(g) e_2 = e_3 \notin W$.

Spor s invariancí v obou př. ~~(Použili jsme, že SO(3) má tranz. akci na ON-bázích) ukázaly, že~~

Tj. ρ je ired. Je ovšem také úplně red. $(\# I = 1)$

2) $\rho_0 : SO(2) \to GL(\mathbb{R}^2)$ $\quad \rho_0(g) v = g(v)$ opět tzv. definující

Opět ir ($\Rightarrow$ úplně red).

3) $\rho : SO(2) \to GL(\mathbb{R}^3)$

$$\rho(g) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{g} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle}_{\text{inv. pp.}} \oplus \underbrace{\langle \hat{z} \rangle}_{\text{inv. pp.}}$ $\rho(g)$ má akci

otočením v $\widehat{xy}$ ~~okolo~~ kolem $\hat{z}$.

Je $\rho \cong \hat{\rho}_0 \oplus \mathrm{id}$, kde $\mathrm{id}(g)v = v$, $g \in SO(2)$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$,

tj. ρ je $\overset{\text{(Hilb)}}{\underline{\text{součtem}}}$ $\underline{\text{ir}}$ $\Rightarrow$ je úplně $\underline{\text{red}}$

(ale není ired., $\#I = 2$). Zde jé „Hilbertovým“

v Hilb. součtem nadbytečné.

4) „Stará známá“ $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x > 0, y \in \mathbb{R} \right\}$

(bez oboustranné Haarovy míry!)

$\rho : G \to GL(\mathbb{R}^2)$ $\quad \rho(g)v = g(v)$, opět definující

(moc se to „nevžila“ :-)). $\quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yb \\ b \end{pmatrix}$.

Zjevně $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ inv. pp. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

Tvrdím, není úplně reducibilní. Ať $W \oplus \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

je příslušný rozklad na inv. pp. Pak ovšem

$W = \langle \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} \rangle$ a zjevně $\mu_0 \neq 0$ (jinak „$\oplus$“ není dir.)

Ukážeme, že $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$ má vždy řešení

(dovrtneme $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$ na $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⟶ spor).

$$x\lambda_0 + y\mu_0 = 2\lambda_0$$
$$\mu_0 = \mu_0$$

stačí $y = 0$: $x\lambda_0 = 2\lambda_0$ a $x = 2$

Pro $\mu_0 \neq 0$ a $\lambda_0 \neq 0$, neboť $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} \right\}$ není l.z.

Pro $\mu_0 \neq 0$ a $\lambda_0 = 0$ $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\mu_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$ zvol $y \neq 0$

a opět jsme mimo

Def.: (ρ, H) repr. [illegible] G na H.p. H [illegible] se nazývá **unitární**, pokud $(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v,w)$, $\forall v,w \in H$.

Pozn.: (ρ, H) unitární $\Rightarrow \rho: G \to U(H)$, kde $U(H) := \{T \in GL(H) \mid T^*T = \mathbb{1}_H\}$, tzv. unitární grupa na H.

Dokažme nejdův, že každá repr. kompaktní grupy je unitarizovatelná, tj.

!**Věta (o unitarizovatelnosti):** Buď G kompaktní topol. grupa a $\rho: G \to GL(H)$ repr. G na Hilb. prostoru H. Pak existuje sk. součin $((\cdot,\cdot))$ na H, že (ρ, H) je unitární vůči $(H, ((\cdot,\cdot)))$ a navíc topologie $(H, (\cdot,\cdot))$ je stejná jako topologie $(H, ((\cdot,\cdot)))$.

Dk.: (trik integrací). Nechť μ je pravá Haarova míra na G (G je lok. kompaktní). Definujme
$$((v,w)) := \int_G (\rho(g)v, \rho(g)w)\, d\mu \quad \forall v,w \in H.$$

1) • $\left| \int_G (\rho(g)v, \rho(g)w)\, d\mu \right| \underset{\substack{\text{odhad +}\\ \text{+ Cauchy-Schw.}}}{\leq} \int |\underbrace{\rho(g)v}_{\text{spoj}}| |\underbrace{\rho(g)w}_{\text{spoj}}|\, d\mu$, tj.

integrand vpravo je spojitý $\Rightarrow \int$ - exist. (spoj. na cpt).

• $((v,v)) = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)v)\, d\mu \geq 0$ ($\int z \geq 0$ je ≥ 0)

• $((v,v)) = 0 \Leftrightarrow \int_G \underbrace{(\rho(g)v, \rho(g)v)}_{\geq 0} d\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho(g)v = 0 \Leftrightarrow v = 0$, neboť $\rho(g) \in GL(H)$.

Tj. $((\cdot,\cdot))$ je sk. součin.

2) ρ je unitární repr. G na $(H, ((\,,\,)))$: $\forall h \in G\ \forall v, w \in H$

je $((\rho(h)v, \rho(h)w)) = \int_G (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w)\, d\mu$

ρ je homom.

$= \int_G (\rho(gh)v, \rho(gh)w)\, d\mu \; \left| \begin{array}{l} g' = gh \\ \mu \text{ je pravo inv.} \end{array} \right| = \int_G (\rho(g')v, \rho(g')w)$

zde (G kpt není důležité!)

$d\mu = ((v, w))$

3) $(\,,\,)$ & $((\,,\,))$ indukují stejné topologie. Stačí ekv. přísl. norem. Zřejmě $\|v\|^2 = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)v)\, d\mu = \int_G |\rho(g)v|^2 d\mu$

$g \mapsto |\rho(g)v|^2$ je spoj. (z def. repr.) $\forall v$ (jako fce g!)

je na kompaktu, tj. je omezená.

Banach-Steinhaus („bodová om. $\Rightarrow$ stejn. omezenost"...):

ρ je omezená na kouli $\{v \mid \|v\| = 1\} \leq$

$M := \sup_{g \in G} \|\rho(g)\|_{op} < \infty$. Celkem:
vůči na H s $|\cdot|$

$|\rho(g)v|^2 \leq |\rho(g)|^2_{op} |v|^2 \leq M^2 |v|^2 \Rightarrow$

$M^{-2}|v|^2 = M^{-2} |\rho(g)^{-1}\rho(g)v|^2 \leq M^{-2}M^2 |\rho(g)v|^2 = |\rho(g)v|^2$

$\left(|\rho(g)^{-1}|^2_{op} |\rho(g)v|^2 = |\rho(g^{-1})|^2_{op} |\rho(g)v|^2 \right.$

$\leq M^2$! probíhá

celou G). Odtud integrováním $\int_G d\mu$:

$M^{-2}|v|^2 \mathrm{vol}(G) \leq \int_G |\rho(g)v|^2 d\mu \leq M^2 |v|^2 \mathrm{vol}(G)$, kde

$\mathrm{vol}(G) = \int_G 1\, d\mu$, tj. $M^{-2} \mathrm{vol}(G) |v|^2 \leq \|v\|^2 \leq M^2 \mathrm{vol}(G) |v|^2$

Tj. $\|\cdot\|$ & $|\cdot|$ jsou ekv.

4) ρ spoj. vůči $(H, |\cdot|)$ (předp.) $\xRightarrow{3)}$ ρ spoj. vůči $\|\cdot\| \Rightarrow (\rho, H)$ je tedy ekv. unit. rep.

Připomeňme: Na lok. kpt. grp. G máme levoinvariantní nenulovou Borelovu míru (dokonce Radonovu). Pro G je L. g. jsme jí zkonstruovali. (Pravoinv. také; obecně konstrukce jak víme z příkladu o symetriích afinní přímky, ale nemusíme.)

Definujme pro $f: X \to H$, kde X je měřitelný prostor s mírou μ (X má tedy σ-alg. a μ je míra), „objekt"

$$\int_X f \, d\mu \in H \text{ výrazem } \alpha\left(\int f \, d\mu\right) := \int_X \underbrace{\alpha(f)}_{\in \mathbb{C}} \, d\mu$$

$\forall \alpha \in H^*$, pokud $\int \alpha(f)\, d\mu$ $\exists$ pro všechna $\alpha \in H^*$.

Obšírněji $\int_X \alpha(f)\, d\mu = \int_{x \in X} \alpha(f(x))\, d\mu_x$. Analogicky pro $T: X \to B(H)$ $(v, (\underbrace{\int T\, d\mu}_{\in B(H)}) w) = \int (Tv, w)\, d\mu$. Někdy se říká Bochnerův integrál pro míru μ a H. p. H.

! **Věta**: Je-li G kompaktní grupa, potom její $\forall$ ireducibilní repr. na Hilb. pstoru má konečnou dimenzi.

Dk.: Potřebujeme násl. zob. Sch. lemm. (kon. dim důležitá jen v bodě o existenci λ): Pokud (ρ, H) je ir. rep. top. grp. G na H. p. H, pak $\dim \mathrm{Hom}_G(H, H) = 1$. (Tj. opět: splétající je nás. identity.) Dokazuje se Sp. rozkladem pro $B(H)$. Nám dokonce postačí ve verzi: kompaktní splétající $\Rightarrow$ je $\lambda \mathrm{Id}$.

(komp. op. limitou ~~fin~~ op. konečné hodnosti).

Definujme $T = \int\limits_{g\in G} \rho(g)v(\rho(g)v, -)\,dg$, tj.

$$Tw = \int\limits_G \underbrace{\rho(g)v(\rho(g)v, w)}_{H\text{-valuované zobr.}}\,dg, \quad w\in H$$

(Bochn. int.) viz vyššie, alebo

$$(Tw, u) = \Big(w, \int\limits_G \underbrace{(\rho(g)v)}_{\text{vektor}}\underbrace{(\rho(g)v, w)}_{\text{číslo}}, \underbrace{u}_{\text{vektor}}\Big)\,dg.)$$

1) T je spoj.: že spoj. $(\,,\,)$ a lin. integrálu.

(Stačí užiť $v_n \to 0 \Rightarrow \rho(g)v_n \to 0 \Rightarrow (\rho(g)v_n, \,) \to 0$

a závislosť $\int$ na v je kvadratická $\leadsto$ mám u nuly

snadnou majorantu $\hat{c}$ - majoranta ...)

2) T ale spletá, ukážať:

$$\rho(h)Tw = \rho(h)\int\limits_G \rho(g)v(\rho(g)v, w)\,d\mu = $$

lin. int. (voči $B(H)$) nie jen $\mathbb{C}$

ρ je hom.

$$= \int\limits_G \rho(h)\rho(g)v(\rho(g)v, w)\,d\mu = \int\limits_{g\in G} \rho(hg)v(\rho(g)v, w)\,d\mu$$

$$\left|\begin{matrix} g' = hg \\ \mu \text{ levo inv.}\end{matrix}\right| = \int\limits_G (\rho(g')v)(\rho(h^{-1}g')v, w)\,d\mu =$$

ρ je hom.

$$= \int (\rho(g')v)(\rho(h^{-1})\rho(g')v, w)\,d\mu = \int \rho(g')v(\underbrace{\rho(h)^{-1}}_{=\rho(h)^*}\rho(g')v, w)\,d\mu = \int \rho(g')v(\rho(g')v, \rho(h)w)\,d\mu$$

$\leftarrow \rho$ je unit.

$$\underset{\text{def } T}{=} T(\rho(h)w).$$ Celkem $\rho(h)\circ T = T\circ\rho(h)$

3) Zob. Sch. lemmatu: $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, že $T = \lambda\, Id_H$

Předpokládejme nyní (šlo od začátku), že $\underline{v}$ v definici T splňuje $|v|=1$ (pro jednoduchost).

Vypočtěme $(Tv,v) = \left(\int \rho(g)v\,\underbrace{(\rho(g)v,v)}_{\text{číslo}},v\right)d\mu =$

$$= \int (\rho(g)v,v)\,\overline{(\rho(g)v,v)}\,d\mu = \int |\rho(g)v|^2 d\mu$$

Zároveň $(Tv,v) = (\lambda \mathrm{Id}\, v,v) = \bar{\lambda}|v|^2 = \bar{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda$ reálné $\Rightarrow \quad \lambda = \int |\rho(g)v|^2 d\mu$ (navíc).

4) Nechť ~~H~~ H' je libovolný ~~...~~ pp. $\leftarrow$ konečné dimenze H a Q je OG-projekce na něj. ($Qv := \underline{\underline{w}}$ iff$_{def}$ $|v-w| = \inf_{w'\in H'} |v-w'|$) $\left[\text{úplnost } H \text{ důležitá pro existenci } \underline{\underline{w}}\right]$

Mám tedy $Q^2 = Q \wedge Q: H \twoheadrightarrow H' \wedge Q = Q^*$ spojité (spoj. z uzavřenosti H').

Std trik („přepište si do bra-ket"): obložím $T = \lambda \mathrm{Id}$ op. Q a Q (složím zleva a zprava s Q). Dostanu

$$Q\int_G \rho(g)v\,(\rho(g)v, Q-)\,d\mu = Q^2\lambda = Q\lambda$$

$$\int_G Q\rho(g)v\,(\rho(g)v, Q-)\,d\mu = Q\lambda$$

$$\int Q\rho(g)v\,(Q^*\rho(g)v, -)\,d\mu = Q\lambda$$

$$\int Q\rho(g)v\,(Q\rho(g)v, -)\,d\mu = Q\lambda \;/\mathrm{Tr}$$

$$\dots \int |Q\rho(g)v|^2 d\mu = \mathrm{Tr}\,Q\,\lambda$$

Stopovatelnost je možná kvůli konečné dimenzi H'.
~~Z~~řejmě (LA) $\mathrm{Tr}\, Q = \dim H'$ $\left(\mathrm{Tr}\, \hat{T} := \sum_{i=1}^{\dim H'} (\hat{T} e_i, e_i), \right.$
$\left. (e_i)_{i=1}^{\dim H'} \text{ ON-báze} \right)$

Celkem, vč. dosazení za λ z 3:

$$\dim H' \cdot \int |\rho(g) v|^2 d\mu = \int |Q \rho(g) v|^2 d\mu \leq$$

$$\leq \int_G \|Q\|_{op} \|\rho(g)\|_{op} |v|^2 d\mu = \int \underset{Q \text{ proj!}}{1} \; \underset{\rho \text{ unit}}{1} \, |v|^2 d\mu \quad \text{"} 1 \text{ (pp.)}$$

$$\leq \mathrm{vol}(G).$$

Nyní stačí, že $\int |\rho(g) v|^2 d\mu \neq 0$. Proč: ν $g = e$ integrujeme $\cdot 1$, na okolí $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ + něco z e + integrujeme nezáp. $\Rightarrow \int > 0$.

Je tedy $\dim H' \leq \dfrac{\mathrm{vol}(G)}{\lambda}$ $\Rightarrow$ H' má omezenou dimenzi nezávisle na H'. Odtud celé H má konečnou dimenzi $\square$

Důležité: Pokud nerozumíte argumentu z funkcionální analýzy, příliš to nevadí (pokud ji ovšem nebudete potřebovat jinde). V tomto případě ale nahraďte G kompaktní G konečná a $\mu = \delta$ (počítací míra viz dříve), pak $\int$ „přechází" v $\sum$.

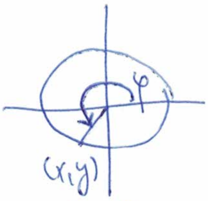
Pozn.: užívání

$$\int_G (\rho(g)v, -)\, \rho(g)v \, d\mu$$

a podobným výrazům se říká průměrovací princip.

Směřujeme k úplné reducibilitě repr. komp. grup. na Hilbertových prostorech.

Příklad (Repr. S^1): Určeme ∀ repr. $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ($(x,y) \mapsto e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $(x,y) \in S^1$,

kde  $\exists!\, \varphi \in [0,2\pi)$.). 1) S^1 kpt $\xRightarrow{\text{věta (víme)}}$ ∀ repr. S^1 na H.p. je úplně red. a ∀ ired. je konečné dimenze. 2) S^1 abel $\xRightarrow{\text{věta (víme)}}$ ∀ kon. rozm. ired je jednodimenzionální! Označme $\tilde{\chi}$.

Unitaritu můžeme předpokládat dle věty o unitarizovatelnosti nebo ji dokázat přímo pro $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$ (je třeba spojitost: (Např.:) $1 = \tilde{\chi}(1) = \tilde{\chi}(e^{2\pi i}) = \tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})^q \ \forall q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, tj. $\tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}}) \in U(1)$. Dále $\tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i p}{q}}) = \underbrace{\tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})}_{\in U(1)}{}^{p} \in U(1)$.

Dále spojitost na všechna $\varphi \in \mathbb{R}$, popř. $[0,2\pi)$.)

(extenze) Je-li $\tilde{\chi}: S^1 \subseteq \mathbb{C} \to U(1)$ repr. S^1, dodefinujeme $\chi(e^{i\varphi}) := \tilde{\chi}(e^{i\tilde{\varphi}})$, kde $\tilde{\varphi} \equiv \varphi\,(2\pi\mathbb{Z})$, tj. φ posuneme (přesněji: tím myslíme) na $\tilde{\varphi}$ z $[0,2\pi)$, kde již repr. máme. Máme tedy $\chi_\varphi := \chi(e^{i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$ ("libovolné").

Z toho, že χ je homomorfismus: $\chi(e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}) = \chi(e^{i\varphi_1}) \cdot \chi(e^{i\varphi_2})$, tj. $\chi_{\varphi_1+\varphi_2} = \chi_{\varphi_1}\chi_{\varphi_2}$. Zvol větev $\ln_\psi$, aby paprsek ψ byl disj. s paprsky $\chi_{\varphi_1}, \chi_{\varphi_2}$ a $\chi_{\varphi_1+\varphi_2}$ (~~polopaprsky~~ lépe: průvodiče). Pak $\ln \chi_{\varphi_1+\varphi_2} = \ln\chi_{\varphi_1} + \ln\chi_{\varphi_2}$. Def $f(\varphi) = \ln \chi_\varphi$. Máme $f(\varphi_1+\varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$.

Její řešení známe: $f(\varphi) = c\varphi$, $c \in \mathbb{C}$. Pak ale $\chi_\varphi = e^{c\varphi}$, tj. $\boxed{\chi(e^{i\varphi}) = e^{c\varphi}}$. Spojitost χ: Jdu-li s $\varphi \to 2\pi$, musím se dostat k $\chi(e^{i0}) = \chi(1) = 1$, tj. $e^{c2\pi} = 1 \Rightarrow c \in i\mathbb{Z} := \{\dots, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$

Závěr: Je tedy $\boxed{\widehat{S^1}} \cong i\mathbb{Z} \cong \boxed{\mathbb{Z}}$, kde $\cong$ je vzájemná bijekce množin.

Pozn.: Přeskočte, pokud tento klas. důkaz znáte.

$$f(\varphi_1)+f(\varphi_2)=f(\varphi_1+\varphi_2) \Rightarrow \underline{f(n)}=f(n-1+1)=$$
$$=f(n-1)+f(1)\underset{\text{indukce}}{=}\dots=\underbrace{f(1)+\dots+f(1)}_{n\text{-krát}}=n\underbrace{f(1)}_{=:c}.$$

Dále $c=f(1)=f(\underbrace{\tfrac{1}{q}+\dots+\tfrac{1}{q}}_{\substack{q\text{-krát}\\ q\in\mathbb{N}}})=q f(\tfrac{1}{q}) \Rightarrow f(\tfrac{1}{q})=\frac{c}{q}=$
$$=c\frac{1}{q}\left(=\underline{\underline{\frac{1}{q}f(1)}}\right).$$

Poté $\underline{f(\tfrac{p}{q})}=f(\underbrace{\tfrac{1}{q}+\dots+\tfrac{1}{q}}_{p\text{-krát}})=\underbrace{f(\tfrac{1}{q})+\dots+f(\tfrac{1}{q})}_{p\text{-krát}}=$
$$=p f(\tfrac{1}{q})=pc\frac{1}{q}=\underline{\frac{p}{q}f(1)}.$$ Ze spojitosti

$$f(\varphi)\underset{\uparrow}{=}f(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n f(1))=$$
$\mathbb{Q}\ni a_n\to\varphi, n\to\infty$
$$=f(1)\varphi, \text{ tj. } \boxed{f(\varphi)=c\varphi}\ \forall\varphi\in\mathbb{R}.$$

Pozn.: Všimněme si, že c takové, že $f(\varphi)=c\varphi$, jehož $\exists$ chceme dokázat závisí na φ (výřezu/větvi ln), jež závisí na paprscích χ_{φ_1}, χ_{φ_2} a $\chi_{\varphi_1+\varphi_2}$. Jde nám však o χ_φ, jež je $e^{c\varphi}$, jak jsme dokázali. To to číslo navíc ale nebude nesouviset (4ve tne se liší o $2\pi i\mathbb{Z}$ a $e^{2\pi i\mathbb{Z}}=\{1\}$)

Hamel [hámel]... prvek z $\quad (f(M)=\{f(x)\mid x\in M\})$

Pozn.: Nespojitá f ($\simeq$ Hamelovy báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Dnes: báze. Báze Hilbertů → dnes: ÚON-množiny. $\{1\}$ je ÚON-mna v.p. $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$, ale není to báze (postrádá Hamelova b.)

Příklad (Aplikace "Four. t. pro $G = S^1$): Víme, že $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$.

Označme $\chi_n(e^{i\varphi}) := e^{-i\varphi n}$, $\chi_n : S^1 \to GL(1,\mathbb{C})$ je repr. Jedn. rozm. repr. říkáme charakter.

$\chi : n \longmapsto \chi_n$ je zobr. $\mathbb{Z}$ do $\widehat{S^1}$ a jak víme z předch. jde o zobr. na $\widehat{S^1}$ (na $\forall$ ir. repr. S^1). Zjevně $\chi_n \neq \chi_m \Leftarrow n \neq m$. Je χ tedy inj.

F.t. $f : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow \hat{f} : \widehat{S^1} \to \mathbb{C}$. Dle def

$$\hat{f}(\chi) = \int_{S^1} f(g)\chi(g)\, d\mu_{S^1}(g).$$ Pro $\chi = \chi_n$ je

$$\hat{f}(\chi_n) = \int_{S^1} f(g)\chi_n(g)\, d\mu_{S^1}(g) \overset{\substack{\text{Haar na } S^1 \\ \text{(dříve)}}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(e^{i\varphi})\chi_n(e^{i\varphi})\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\hat{}} f(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi}\, d\varphi.$$ Je tedy $\hat{f}(\chi_n)$ "něco jako" n-tý Four. koef (vůči $\{e^{in\varphi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$).

Proč "něco jako"? Definujme $\bar{f}(\varphi) := f(e^{i\varphi})$.

Pak $\boxed{\hat{f}(\chi_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0 \bar{f}(\varphi) e^{-in\varphi}\, d\varphi}$, jde tedy o F. koef pro $\bar{f}$ (asoc. k f).

Pozn.: Lze dokázat $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$ (zde $\hat{\mathbb{Z}} := \{\rho : \mathbb{Z} \to GL(n),\ n \in \mathbb{N}\}$)

Pontrjagin: $\mathbb{Z} \underset{\text{Pontr.}}{\cong} \hat{\hat{\mathbb{Z}}} \cong \widehat{S^1} \underset{\text{víme}}{\cong} \mathbb{Z}$, tj. jsme Pontrjagina ověřili ($\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$ je díky $\mathbb{Z}$ snadné, obdobné určování $\widehat{S^1}$.)

Pozn.: Lze ukázat, že $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\rho_x : \mathbb{R}^n \to$
$\to GL(1,\mathbb{C}))$, kde $\rho_x(y) = e^{-2\pi i x y}$

$$\hat{f}(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x y} \, dx .$$

Toto tedy dává jakýsi „nadhled" nad Four. ř. a Four. transf. $\bigcirc$ $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$: souvislost harmonické analýzy (to co děláme) s Poissonovou sumací či Dirichletovým jádrem ...

Zatím vidíme, že reprezentace hledáme ad-hoc. Náčrt „obecného" schématu (přístup Cartana, Weyla → tzv. „algebraická škola teorie reprezentací")

— PŘEHLED — (alg. teorie)

1) G Lieova grupa $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{g} := T_e G$, kde definujeme
$\forall u, v \in T_e G : [u, v] := [U, V]_{Lie}(e)$, kde $U \in \mathfrak{X}(G)$ a $V \in \mathfrak{X}(G)$ jsou lib. $\mathcal{C}^\infty$-rozšíření vektoru u resp. v a $[\,,\,]_{Lie}$ je Lieova záv. vekt. polí. Lieova závorka v. polí je tenzorové pole! Nezávisí na okolí, ale jen bodová: $[U, V]^{(m)}_{Lie} = [\tilde{U}, \tilde{V}]^{(m)}_{Lie}$, if $U_m = \tilde{U}_m$ a $V_m = \tilde{V}_m$, tj. pokud se shodují jen v bodě. (Obecný fakt dif. geom., ne (jen) Lieových grup.)

Stejně jako $[\,,\,]_{Lie}$ tak i $[\,,\,]$ splňuje
$[X, Y] = -[Y, X]$ & $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$

Dále bilinearita. Takovým objektům se říká Lieova alg.

Def: Nechť $\mathfrak{g}$ je v. p. nad $\mathbb{k}$, libovolné dimenze($\mathfrak{g}$), a nechť $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je

1) $\mathbb{k}$-bilineární zobrazení,
2) antisymetrické, tj. $[X,Y] = -[Y,X]\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}$
3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$

Pozn.: If $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_2$ (např.), pak 2) neimplikuje $[X,X] = 0$..

2) Pokud G je jednoduchá Lieova grupa (typická, spíše restriktivní, ale v teor. repr. ne příliš restriktivní), je: G jedn. L.g $\Leftrightarrow$ G souvislá L.g. $\wedge$ G není abelovská $\wedge$ G nemá souvislou normální netriviální podgrupu; norm pdgr $N \trianglelefteq G$ iff $g^{-1}Ng \subseteq N$ $\forall g$, tj. uzavř. na vnitřní automorfizmy (v G)), *)

Př.: Je: $\begin{cases} G = SL(n,\mathbb{R}),\ SL(n,\mathbb{C}),\ SO(n,\mathbb{R}),\ Sp(2n,\mathbb{R}) \\ SU(n),\ \{e\},\ O_e(p,q) \to \text{komp. souvislosti } O(p,q) \end{cases}$

Není: • S^1, $T^n \to$ abel.

více komponent! $\begin{cases} \bullet\ O(p,q)\ \ p \geq 1 \text{ a } q \geq 1 \\ \bullet\ SO(p,q)\ \ p \geq 1 \wedge q \geq 2 \end{cases}$

• $U(n)$ není $\to$ centrum($\equiv S^1$) je souvislá norm. netriv podgrupa!

Pozn.: $\widehat{S^1}$ známe, $T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \rightsquigarrow \widehat{T^n}$ „snadné": $\widehat{T^n} \cong \widehat{S^1} \times \dots \times \widehat{S^1}$; $O(p,q)$, $SO(p,q) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ mezi komponentami umíme předskočit
$\rightsquigarrow$ lze předskočit i mezi reprezentace-

mi komponenty obsahující $\underline{e}$, tj. $O(p,q)$, $SO(p,q)$ umíme.

$U(n)$ je polopřímým součinem jednoduché $SU(n)$ a centra $U(n)$ ⇝ také umíme

Cvič pokdy: Wigner/Mckay ova „indukce"),

*) pokud tedy G jednoduchá L.g., pak
$\underline{\exists\, \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}}$, jež je abelovská ($[H_1,H_2]=0\ \forall H_1,H_2 \in \mathfrak{h}$) a maximální (= neexistuje větší abelovská) podalgebra $\mathfrak{g}$ (podalgebra $\mathfrak{g}$ ≡ uzavřená na $[\,,\,]$).

$\underbrace{\text{maximální}}$ taková

Pokud $\underline{\mathbb{k}=\mathbb{C}}$, je $\mathfrak{h}$ jediná až na vnitřní automorfizmus (jinak obecně ne!), tj. $\forall$ typu $g^{-1}\mathfrak{h}g$.

$\mathfrak{h}$ se říká Cartanova podalgebra (každé max. abel).

<u>Např.</u> $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) :=$ Lieova alg. $SL(2,\mathbb{C}) = T_e SL(2,\mathbb{C})$ se závorkou... Lze ověřit (identifikace automorfizmy), že

~~opravdu T_e ne~~

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid \cancel{\ldots}\ \operatorname{tr} A = 0\}$$

a $[A,B] = A\cdot B - B\cdot A$ (závorka daná komutátorem, se říká.)

Pak ale $\mathfrak{h}_1 = \left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}k,\ k\in\mathbb{C}\right\} \subseteq \mathfrak{g}$

$\mathfrak{h}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}k,\ k\in\mathbb{C}\right\} \subseteq \mathfrak{g}$

jsou abelovské. Maximalita: v bázi $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$...

Lze je ale převést Cayleho transf., tj. (zde) konjugací pomocí $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$.

Cartanovy* algebry hrají podobnou úlohu jako ÚMKP (úplná mna komut. pozorov.) v kvantové teorii.

3) Buď $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ lineární forma. Dále $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{k} = \mathbb{C} \wedge \mathfrak{g}$ kon. dimenze $\wedge$ stále jednoduchá.

$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H) X \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$

$\alpha \neq 0 \wedge \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\} \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha$ koř. prostor

$\alpha \neq 0 \wedge \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\} \Rightarrow \alpha$ kořen

(Tj. $\alpha = 0$ není kořen; $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, ale neříká se jí kořenový prostor.)

$\Delta = \{\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ lin. $\mid \alpha \neq 0 \wedge \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ slujé množina kořenů pro $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ [$\mathfrak{h}$ vybíráme]

Fakt (podstatný): Δ je konečná!

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \langle\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}\rangle_{\mathbb{R}}$ ← $\mathbb{R}$-lineární kombinace, tj. $\{\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha H_\alpha \mid \forall \alpha \in \Delta : c_\alpha \in \mathbb{R}\}$. ($\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tzv. reálná Cart. podalgebra). Co je H_α?

Killingova forma** umožňuje identifikaci $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \longleftrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$

h_α buď duál k $\alpha \in \Delta \subseteq \mathfrak{h}^*$, $H_\alpha := \frac{2}{\varkappa(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ **)

• Zvol $v_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, aby $\alpha(v_0) \neq 0 \ \forall \alpha \in \Delta$.

**) $\varkappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, $\varkappa(A, B) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(A) \circ \mathrm{ad}(B))$, $(\mathrm{ad}(X))Y := [X, Y]$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow \mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$

• Definuj $\alpha \in \Delta^+$ iff $\alpha(v_0) > 0$.
Toto definuje mnu kladných kořenů (pro $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, v_0)$)
($\Delta = \Delta^+ \cup -\Delta^+$, mna ∀ kořenů se „rozštěpí".)

• Pro volbu $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, v_0)$, popř. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Delta^+)$ definuj:
$\gamma \in \Delta^+$ jednoduchý iff není součtem žádných dvou elementů z Δ^+. Označ jejich mnu Φ.

Máme tedy

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, squiggly] & \mathfrak{h} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, Rightarrow] & v_0 \arrow[d, Rightarrow] & \\ & \Delta & \Delta^+ \arrow[r, Rightarrow] & \Phi \end{tikzcd}$$

Φ. Φ je pro dané $\mathfrak{g}$ jedn. určen volbou $\mathfrak{h}$ a v_0, popř. $\mathfrak{h}$ a Δ^+.

„Spějeme již k finálnímu $\overbrace{\text{popisu repr.}}^{\text{těch ir.}}$ G či $\mathfrak{g}$, které jsou kon. dimenze."

Označ $\Phi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathfrak{h}^* \wedge H_i := H_{\alpha_i}$.

Definuj tzv. fundamentální váhy $(\omega_i)_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{h}^*$

$$\omega_i(H_j) = \delta_{ij}.$$

$\boxed{\text{komplexním}}$

Def: Repr. $\mathfrak{g}$ na V je každý homom. $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$.

Pozn.: • $\mathrm{End}(V)$ je L.a vůči $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, tzv. komutátoru.

• Nepřekvapivě homom L.a. je $\forall \rho$ lineární, že $[\rho(A), \rho(B)] = \rho([A, B])$ $\forall A, B \in \mathfrak{g}$.

Def: $\rho_i : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_i)$ repr. $\mathfrak{g}$ na V_i, $i = 1,2$. Nazveme ρ_1 a ρ_2 ekvivalentní, pokud $\exists\, T : V_1 \to V_2$ izomorfizmus vekt. prostorů (nemluvím o topologii)$_{\mathfrak{g}}$ ~~pokud~~ $\wedge$ $\rho_2(X) \circ T = \rho_1(X) \circ T$.

Pozn.: Opět tedy

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(X)"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(X)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

diagr. komutuje $\forall X \in \mathfrak{g}$

to je def diagr komutuje

Finální věta alg. teorie je:

Věta (Cartan): Množina $\forall$ tříd ekvivalence konečně rozměrných komplexních reprezentací jednoduché komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je izomorfní pologrupě

$$\mathbb{N}_0 \omega_1 \oplus \mathbb{N}_0 \omega_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}_0 \omega_n .$$

Pozn.: 1) Třídy ekvivalence jsou podle ekvivalence "izomorfní reprezentace"

2) komplexní repr.: V je komplexní

3) Pologrupa L: a) $\forall k, l \quad k + l \in L$ $\wedge$
b) $\exists\, 0 \in L \quad k + 0 = 0 + k = k \quad \forall k \in L$
c) $(k + l) + m = k + (l + m) \quad \forall k, l, m \in L$

4) Pologrupa $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{N}_0 \omega_i$: Je diskr. v $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ ($\in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ std. Eukl. top.). Diskr. Abelovským pologrupám říkáme polomříže ($k + l = l + k \quad \forall k, l$)

1) Pro $sl(2,\mathbb{C})$: $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} =$ $\longleftarrow\!\!+\!\!\longrightarrow$ $-\alpha \quad 0 \quad \alpha$ $\qquad \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$

↑ výběr(y)

$\Delta = \{-\alpha, \alpha\}$, $\alpha_{|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$; $\underline{\underline{\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} := 2a}}$

<u>α je kořen!</u> v_0 lib. z $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, že $v_0(\alpha) \neq 0$, tj. stačí $v_0 \neq 0$.

Např.: $\Delta^+ = \{\alpha\}$, $\phi = \{\alpha\}$. Polomříž:

Na to je třeba <u>že</u>...

$\omega_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ $\qquad 0 \quad \omega_1 \quad 2\omega_1 \quad 3\omega_1 \ldots$

$\epsilon_1 \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := k \wedge \epsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} := l$

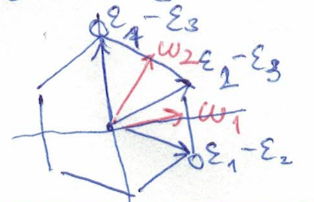
2) Pro $sl(3,\mathbb{C})$ $\quad \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

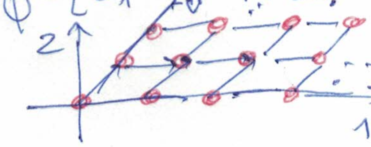
↑ výběr $\qquad \epsilon_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} := a_i \quad \forall a_i \in \mathbb{C}$

$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \varepsilon_3 - \varepsilon_2\}$

polomříž

Např. $\Delta^+ = \{\epsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_3\}$ $\qquad \phi = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3\}$





<u>Shrnutí</u>: $\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{volba}} \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{determ.}} \Delta \xrightarrow{\text{volba}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xleftrightarrow{\text{determ.}} \Delta^+ \xrightarrow{\text{determ.}} \phi$

$\alpha \in \Delta \longmapsto h_\alpha \longmapsto H_\alpha \longmapsto \omega_\alpha$

---

polomříž = semilattice (Halbgitter)
mříž = lattice (Gitter)

Hezké obrázky: kořenový systém (root system / Wurzelsystem) jednod. Lieových grup

---

z definic / pro praxi $\longrightarrow$ „net"

<u>Př.</u>: Můžete ověřit, že pro $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{C})$ je $X_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$X_{-\alpha} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$; $\varkappa(A,B) \overset{\text{pracně (dlouho jsem nepočítal ...)}}{=} 2\,\mathrm{tr}(AB)$; kolik vyjde $H_\alpha = ?$

Příklady reprezentací – (Další příklady). Pokračujeme opět „analyticky".

1. Reprezentace $SU(2)$. Proč $SU(2)$?

Pozn.: $SU(2) \simeq S^3 \subseteq \mathbb{H}$ $\quad S^3 \xrightarrow{\varphi} SO(3)$

(Topologie $SU(2)$)

$z \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ a $\det = 1 \Leftrightarrow \|a\|^2 + \|b\|^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{C}$

$q \mapsto (v \in \mathbb{R}^3 \mapsto q^{-1} v q)$, kde $v \in \mathbb{R}^3 \simeq \operatorname{Im} \mathbb{H}$. Spojitost φ zřejmá.

$S^3 \to SO(3)$ je na a $2:1$, důkaz pomocí Eulerových úhlů o rotacích

Tj. $\boxed{SU(2) \simeq S^3 \simeq Spin(3)}$ ($= 2:1$ nakrytí grupy $SO(3)$)

Def: $\rho : SU(2) \to V_n(\mathbb{C}^2) := \langle \{ z_1^k z_2^{n-k} \mid k = 0, \dots, n \} \rangle$ ← $\mathbb{C}$-lin. obal – homog. polynomy st. n ve dvou kplx proměnných

$$(\rho(g) p)\underbrace{(z_1, z_2)}_{\mathbb{C}^2} \boxed{:=} p(g^{-1}(z_1, z_2))$$

← „vnímáno" jako sloupec (nepíšu t pro úsporu)

! **Věta:** $\rho : SU(2) \to V_n(\mathbb{C}^2)$ je ireducibilní, $\forall n$.

Dk. a) $h_\theta := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\in SU(2)$

$$[\rho(h_\theta)(z_1^k z_2^{n-k})](w_1, w_2) = (z_1^k z_2^{n-k})(h_\theta^{-1}(w_1, w_2))$$

$$= z_1^k z_2^{n-k}(e^{-i\theta} w_1, e^{i\theta} w_2) = e^{-ik\theta} w_1^k e^{i\theta(n-k)} w_2^{n-k}$$

$$= e^{i(n-2k)\theta} w_1^k w_2^{n-k} \Rightarrow \rho(h_\theta) z_1^k z_2^{n-k} = e^{i(n-2k)\theta} z_1^k z_2^{n-k}$$

$\Rightarrow \{ v_k = z_1^k z_2^{n-k} \mid k = 0, \dots, n \}$ máme úplnou množinu všech vlastních vektorů $\left(V_n(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{C} v_k \right)$

b) $0 \neq H \subseteq V_n(\mathbb{C}^2)$ buď inv. pp. má

Spektr. věta: $\rho(h_\theta)$ musí mít aspoň jeden vl. vektor. Víme ale všechny možné vl. vektory.

Tj. $\exists k_0$, že $v_{k_0} = z_1^{k_0} z_2^{m-k_0} \in H$.

Def. $K_\varphi := \begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$, $\eta_\varphi := \begin{pmatrix} c\varphi & is\varphi \\ is\varphi & c\varphi \end{pmatrix} \in SU(2)$

b.1) $\underbrace{\frac{1}{2}(K_\varphi \pm i\eta_\varphi)}_{=: A_\varphi^\pm} v_{k_0} \in H \ \forall \varphi \in \mathbb{R}$ (H je inv.!). Dále

Přesněji $A_\varphi^\pm = \frac{1}{2}\rho(K_\varphi) \pm \frac{i}{2}\rho(\eta_\varphi)$!

b.2) i $\vec{w} = \dfrac{A_\varphi^\pm v_{k_0} - A_0^\pm v_{k_0}}{\varphi}$ $(\forall \varphi \neq 0) \in H$ ← z toho, že H je podprostor (lineární)

b.3) $SU(2) \times H \to H$ je spojité (snadné) $\Rightarrow$

~~$A_\varphi v_{k_0} - A_0 v_{k_0}$~~ Tj. $\left(A_\varphi^\pm - A_0, \frac{v_{k_0}}{\varphi}\right) \mapsto \frac{A_\varphi^\pm - A_0^\pm}{\varphi} v_{k_0} \in H$

je spojité pro $\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} A_\varphi^\pm v_{k_0} \in H$. Spočtěme ji

b.4)

$$\frac{d}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} A_\varphi^\pm v_k = \begin{cases} k z_1^{\boxed{k-1}} z_2^{n-k+1} \\ (k-n) z_1^{\boxed{k+1}} z_2^{n-k-1} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\forall v_k \in H}} \Rightarrow$$

(pracné) $(v_k \in H\ \forall k)$

dim $H = m+1 \Rightarrow H = V_m(\mathbb{C}^2)$! □

Pozn.: $A_\varphi^\pm$ jsou analytické analogy posouvacích operátorů (ladder / žebříkových)

2) Representace $O(n)$

$V_m(\mathbb{R}^n) := \langle \{ x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mid |\alpha| = \sum \alpha_i = m \} \rangle$ ← $\mathbb{C}$-obal

tj. homogenní polynomy st. m s komplexními koeficienty

$\Delta_n := \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ Laplaceův op, $|x|^2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$H_m(\mathbb{R}^n) := \operatorname{Ker} \Delta_n | V_m(\mathbb{R}^n)$ $\left(= \{ p \in V_m(\mathbb{R}^n) \mid \Delta p = 0 \} \right)$

=: harmonické polynomy st. m (v $\mathbb{R}^n$)

$\langle p, q \rangle := \partial_{\bar{q}}\, p$, $\partial_{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}} p = \dfrac{\partial^{|\alpha|} p}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

$q = a x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \xmapsto{-} \bar{q} = \bar{a} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ (sdružení)

Víceextenduji lineárně

! Pozorování: $\langle p, q \rangle$ je sk. součin ! Neboť: ✓.

a) $\langle p, p\rangle = \langle \sum a_\alpha x^\alpha, \sum a_\alpha x^\alpha\rangle = \sum_\alpha a_\alpha \overline{a_\alpha}\, \alpha! = \sum_\alpha \alpha! |a_\alpha|^2 \geq 0$

$= 0 \Leftrightarrow a_\alpha = 0 \ \forall \alpha \Rightarrow p = 0$ poz. def.

b) $\langle p, q\rangle = \overline{\langle q, p\rangle}$ stačí pro hom.: $\langle x^\alpha, x^\beta\rangle = \frac{\alpha!}{(\cancel{\alpha}-\beta)!}\delta^{\alpha\beta} = \langle x^\beta, x^\alpha\rangle$

c) linearita ... tak definováno (extendují lineárně). zkuste si - téměř zjevné

Věta: $H_m(\mathbb{R}^n)$ je ireducibilní reprezentace $O(n)$, $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$

Dk.: Vynechán. Nezcela jednoduchý! $\square$

Věta: $\boxed{V_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus \begin{matrix} H_0(\mathbb{R}^n) \\ \vee \\ H_1(\mathbb{R}^n)\end{matrix}}$

ROZKLAD

Dk.: 1) $\langle p, |x|^2 q\rangle = \partial_{\underbrace{\bar{q}|x|^2}_{=\sum x_i^2}} p = \partial_{\bar{q}} \Delta_n p = \langle \Delta_n p, q\rangle$

2) $\underbrace{[|x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n)]^\perp}_{\ni p} \subseteq H_m(\mathbb{R}^n)$. Nechť $p \in [|x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n)]^\perp$

tj. $\boxed{0} = \langle p, |x|^2 q\rangle \underset{1)}{=} \langle \Delta_n p, q\rangle \Rightarrow p \in H_m(\mathbb{R}^n)$

$\forall q \in V_{m-2}$

3) $[|x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n)]^\perp \supseteq \underbrace{H_m(\mathbb{R}^n)}_{\ni p}$

$0 = \langle \underbrace{\Delta_n p}_{=0}, q\rangle = \langle p, |x|^2 q\rangle \Rightarrow p \perp |x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n)$

$\forall q$

4) $\Delta_n : V_m(\mathbb{R}^n) \to V_{m-2}(\mathbb{R}^n)$

$V_m(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Ker} \Delta_n \oplus (\operatorname{Ker} \Delta_n)^\perp =$

$= H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n) =$

$= H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 (H_{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 V_{m-4}(\mathbb{R}^n))$

$= H_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 H_{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^4 H_{m-4}(\mathbb{R}^n)$

$\oplus \cdots \oplus \underbrace{|x|^m H_0(\mathbb{R}^n)}_{\text{nebo: } |x|^{m-1} H_1(\mathbb{R}^n)}$. (dle parity m)

5) Navíc $O(n)$ působí na $|X|^2$ "triviálně", $\rho(g)|X|^2 = |X|^2$.

Izomorfizmus/ekvivalenci součtu z věty s tím, jenž jsme získali prováděně i formálně:

$T : |X|^2 H_{m-2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_m(\mathbb{R}^n)$, $T(|X|^2 p) = p$

- Korektnost def. snadné: $|X|^2 p = |X|^2 q \Rightarrow p = q$ na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
  Avšak $p-q$ má atdy více nul než je jeho stupeň $\Longrightarrow$ Euklidův pro dělení
  $\hookrightarrow$ $p-q=0$ (všude) je nulový pol.
- Inj. $T(|X|^2 p) = 0 \Rightarrow p = 0$
- Surj. zřejmé
- Ekvivariance T: $\rho(g) T(|X|^2 p) = \rho(g) p$.

$$T(\rho(g)(|X|^2 p)) = T(|X|^2 \rho(g) p)) = \\ = \rho(g) p. \qquad \square$$

Pozn.: 1) Předch. věta úzce souvisí s tzv. Schur–Weylovou dualitou: rozklad vůči $O(n) \times sl(2, \mathbb{C})$. $|X|^2$ je invariantem $O(n)$, $sl(2,\mathbb{C})$ se realizuje pomocí $\langle \Delta_n, E + \frac{n}{2} I, |X|^2 \rangle$, kde

$$E = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$ je tzv. Eulerův operátor

- Zobecnění: Želobenko (pro $G = Sp$)
  Roger Howe (pro "super-páry")

2) $H_m(\mathbb{R}^n)$ jsou ireducibilní pro $O(n)$, $n \geq 2$.

3) Schur–Weylovy duality souvisí se skrytými symetriemi (degenerací). Opak je sněť degenerace.

Příklad: Zkusíme vektor ověřit „ručně“! Aspoň pro $n = 1$ a $n = 2$. $H_0(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ „snadno“, $H_1(\mathbb{R}) = V_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$

$= V_0(\mathbb{R})$

$H_2(\mathbb{R}) = ?$ $\Delta(ax^2 + bxy + cy^2) = 2a + 2c = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -c,\ b \in \mathbb{C}$, tj. $H_2(\mathbb{R}) = \langle \{x^2 - y^2, xy\} \rangle$

Nyní zjistíme, zda $V_2(\mathbb{R}) \cong H_0(\mathbb{R})|x|^2 \oplus H_2(\mathbb{R})$

$ax^2 + bxy + cy^2 = (x^2+y^2)A + C(x^2-y^2) + Bxy$?

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A + C = a \\ A - C = c \\ B = b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{a+c}{2} \\ C = \frac{a-c}{2} \\ B = b \end{array}$$

, tj. ano lze to.

! Pozn.: Věta tedy říká, že každý polynom můžeme rozložit do $\sum \text{harm}_k \cdot |x|^{2k}$!

(Důležitá) poznámka (to říkám „čistě“): $H_m(\mathbb{R}^n)$ jsou ireducibilní repr. $SO(n)$ pro $n \geq 3$ (opět bez důk.)

~~[illegible]~~

Umíme reprezentovat: C_n, D_n
aspoň s částečnými důkazy

S_2, S_3 (S_4? ~~do~~ byl d. cv.)

S^1, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^n$ (unitární)

$SU(2)$, $O(n)$ → ~~[illegible]~~ $H_m(\mathbb{R}^n)$ ale nejsou $\forall$ ired.

↓

všechny ired.

Lieovy superalgebry

1. Lieovy algebry ("základní" definice Lieovy algebry)

$\mathfrak{g}$ je v.p. $/\mathbb{K}$, $[\,,\,]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ je bilineární (vůči $\mathbb{K}$) a

α) $[X,Y]=-[Y,X]$ $\forall X,Y\in\mathfrak{g}$ (antisymetrie)

β) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ (Jacobiho identita)

Př.: 1) $(A,\cdot)$ asociativní alg $\Rightarrow$ $[X,Y]=X\cdot Y-Y\cdot X$ definuje L.alg.

2) G Lieova grupa $\Rightarrow$ $\mathfrak{X}^L(G)=\{X\in\mathfrak{X}(G)\,|\,(L_g)_* X=X\ \forall g\in G\}$

prostor levoinvariantních v.polí; $[X,Y]:=[X,Y]_{dif}$,

kde $[\,,\,]_{dif}$ je závorka v.polí $([X,Y]_{dif} f:=X(Yf)-Y(Xf))$

$(\mathfrak{X}^L(G),[\,,\,])$ je L.alg., tzv. L.alg. Lieovy grupy G;

$\mathfrak{g}:=\mathfrak{X}^L(G)$.

3) (M,ω) sympl. varieta $\Rightarrow$ $\{f,g\}:=\omega(X_f,X_g)$, kde

$\omega(X_f,Y)=(df)(Y)$, X_f Ham. v.pole k fci f.

$\underbrace{(\mathcal{E}^\infty(M),\{\,,\,\})}_{\text{tzv. Poissonova algebra}}$ je L.a. (podstatné ($\Leftarrow$) $d\omega=0$).
(Jacobiho id.)

2. $\mathbb{Z}_2$-grad. v.p., tzv. super vekt. prostory (vhodná označení ...)

V je v.p. nad $\mathbb{K}$ spolu s $V=V_0\oplus V_1$ dir. rozklad

$\deg(v)=\bar 0$, $\deg(w)=\bar 1$ iff $v\in V_0 \wedge w\in V_1$

$\{\bar 0,\bar 1\}=\mathbb{Z}_2$ $(\bar 0+\bar 1=\bar 1+\bar 0=\bar 1,\ \bar 0+\bar 0=\bar 0=\bar 1+\bar 1)$

V slujе super vektorový prostor, V_0, V_1 sudé resp. liché části (prvky sudé a liché elementy), někdy bosonové a fermionové.

V matematice (neaplikované na MF) V sluje někdy

$\mathbb{Z}_2$-gradovaný: $\left.\begin{array}{l} v_0,w_0\in V_0 \Rightarrow v_0+w_0\in V_0 \\ v_1,w_1\in V_1 \Rightarrow v_1+w_1\in V_1\end{array}\right\}$ vl. dir. sumy (Lin. Alg.)

Lieovy superalgebry

1. Lieovy algebry („základní" definice Lieovy algebry)

$\mathfrak{g}$ je v. p. / $\mathbb{K}$, $[\,,\,]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ je bilineární (vůči $\mathbb{K}$) a

$\alpha)$ $[X,Y]=-[Y,X]$ $\forall X,Y\in\mathfrak{g}$ (antisymetrie)

$\beta)$ $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ (Jacobiho identita)

Př.: 1) $(A,\cdot)$ asociativní alg $\Rightarrow$ $[X,Y]=X\cdot Y-Y\cdot X$ definuje L. alg.

2) G Lieova grupa $\Rightarrow$ $\mathfrak{X}^L(G)=\{X\in\mathfrak{X}(G)\,|\,(L_g)_* X = X\ \forall g\in G\}$

prostor levoinvariantních v. polí; $[X,Y]:=[X,Y]_{dif}$,

kde $[\,,\,]_{dif}$ je závorka v. polí $\left([X,Y]_{dif} f := X(Yf)-Y(Xf)\right)$

$(\mathfrak{X}^L(G),[\,,\,])$ je L. alg., tzv. L. alg. Lieovy grupy G;

$\mathfrak{g}:=\mathfrak{X}^L(G)$.

3) (M,ω) sympl. varieta $\Rightarrow$ $\{f,g\}:=\omega(X_f,X_g)$, kde

$\omega(X_f,Y)=(df)(Y)$, X_f Ham. v. pole k fci f.

$\underbrace{(\mathcal{E}^\infty(M),\{\,,\,\})}_{\text{tzv. Poissonova algebra}}$ je L. a. (podstatné ($\Leftarrow$) $d\omega=0$).
(Jacobiho id.)

2. $\mathbb{Z}_2$-grad. v. p., tzv. super vekt. prostory (vhodná označení ...)

V je v. p. nad $\mathbb{K}$ spolu s $V=V_0\oplus V_1$ dir. rozklad

$\deg(v)=\bar{0}$, $\deg(w)=\bar{1}$ iff $v\in V_0 \wedge w\in V_1$

$\{\bar{0},\bar{1}\}=\mathbb{Z}_2$ $\left(\bar{0}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1},\ \bar{0}+\bar{0}=\bar{0}=\bar{1}+\bar{1}\right)$

V slyje <u>super vektorový prostor</u>, V_0, V_1 <u>sudé</u> resp. <u>liché</u> části (prvky <u>sudé</u> a <u>liché</u> elementy), někdy <u>bosonové</u> a <u>fermionové</u>.

V matematice (neaplikované na MF) V slyje někdy

$\mathbb{Z}_2$-graduovaný: $\left.\begin{array}{l} v_0, w_0\in V_0 \Rightarrow v_0+w_0\in V_0 \\ v_1, w_1\in V_1 \Rightarrow v_1+w_1\in V_1 \end{array}\right\}$ vl. dir. sumy
(Lin. Alg.)

3. Homomorfizmy super vekt. prostorů

$V=V_0\oplus V_1$, $W=W_0\oplus W_1$

$$\mathrm{Hom}(V,W)=\mathrm{Hom}(V_0,W_0)\oplus\underbrace{\mathrm{Hom}(V_0,W_1)\oplus\mathrm{Hom}(V_1,W_0)}_{=:\,\mathrm{Hom}_1(V,W)}\oplus\mathrm{Hom}(V_1,W_1)$$

$$\mathrm{Hom}_0(V,W):=\mathrm{Hom}(V_0,W_0)\oplus\mathrm{Hom}(V_1,W_1).$$

$s\mathrm{Hom}(V,W):=\mathrm{Hom}_0(V,W)\oplus\mathrm{Hom}_1(V,W)$ je zřejmě super-vekt. pstor.

Navíc: $A_i\in\mathrm{Hom}_0(V,W)$, $B_i\in\mathrm{Hom}_1(V,W)$, $i=1,2$ $\Rightarrow$ $A_1\cdot A_2\in\mathrm{Hom}_0(V,W)$, $B_1\cdot B_2\in\mathrm{Hom}_0(V,W)$, $A_1\cdot B_2,\ A_1\cdot B_1,\ \ldots\in\mathrm{Hom}_1(V,W)$ atd.

$$\left\{\begin{pmatrix} \cdot & 0\\ 0 & \cdot\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Hom}_0 \qquad \begin{array}{ccccc}\bar{1} & & \bar{1} & & \bar{0}\\ \begin{pmatrix} 0 & \cdot\\ \cdot & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & \cdot\\ \cdot & 0\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cdot & 0\\ 0 & \cdot\end{pmatrix}\end{array}\in\mathrm{Hom}_0$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & \cdot\\ \cdot & 0\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Hom}_1 \qquad \begin{array}{ccccc}\begin{pmatrix} 0 & \cdot\\ \cdot & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \cdot & 0\\ 0 & \cdot\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & \cdot\\ \cdot & 0\end{pmatrix}\\ \bar{1} & & \bar{0} & & \bar{1}\end{array}\in\mathrm{Hom}_1$$

Celkem: $\boxed{\mathrm{Hom}_i\cdot\mathrm{Hom}_j\subseteq\mathrm{Hom}_{i+j}}$ ($i+j$ v $\mathbb{Z}_2$) ($1+1=0\ldots$)

To vede k zobecnění:

$\boxed{\text{Def:}}$ A buď ~~(asoc.)~~ alg. nad $\mathbb{K}$. A slyje super ~~asociativní~~ algebra, pokud a) $A=A_0\oplus A_1$ (jedná), tj. A je super v.p., & b) $A_0\cdot A_0\subseteq A_0$, $A_0\cdot A_1\subseteq A_1$, $A_1\cdot A_0\subseteq A_1$, $A_1\cdot A_1\subseteq A_0$, tj. $A_i\cdot A_j\subseteq A_{\underset{v\ \mathbb{Z}_2}{i+j}}$.

Super alg. se nazývá komutativní, pokud $X\cdot Y=Y\cdot X$ $\forall X,Y\in A$.

Buď $A = A_0 \oplus A_1$ superalgebra. Položme

$$[\![X,Y]\!] = X\cdot Y - (-1)^{\deg X \deg Y} Y\cdot X \quad \forall X,Y \in A_0 \cup A_1$$

$$[\![X_0,Y_0]\!] = X_0\cdot Y_0 - Y_0\cdot X_0 = [X_0,Y_0] \in A_0$$

$$[\![X_0,Y_1]\!] = X_0\cdot Y_1 - Y_1\cdot X_0 = [X_0,Y_1] \in A_1$$

$$[\![X_1,Y_1]\!] = X_1\cdot Y_1 + Y_1\cdot X_1 \in A_0$$

$$[\![\,,\,]\!]: \begin{array}{l} A_0 \times A_0 \to A_0 \\ A_0 \times A_1 \to A_1 \\ A_1 \times A_0 \to A_1 \\ A_1 \times A_1 \to A_0 \end{array}$$

Zjevně $(A_0, [\![\,,\,]\!])$ je Lieova algebra.
Dále A_1 je A_0-modul. Zde: modul nad A_0 chápané jako Lieova algebra. Proč? $\rho(X)v := [\![X,v]\!]$, $X \in A_0$, $v \in A_1$.
$\rho(X)v = [X,v]$ & $[\![X,Y]\!] = [X,Y]$ komutátor a $[X,v]$ také komutátor. Pak jen zdlouhavé cvičení.

Na domácí stranu ověřit, že

- $[\![X,Y]\!] = -(-1)^{\deg X \deg Y} [\![Y,X]\!]$ (*)
- $(-1)^{\deg X \deg Z} [\![X,[\![Y,Z]\!]]\!] + (-1)^{\deg Y \deg X} [\![Y,[\![Z,X]\!]]\!] + (-1)^{\deg Z \deg Y} [\![Z,[\![X,Y]\!]]\!] = 0$ (**)

4. Superalgebry Lieovy

Definice: $\mathfrak{g}$ je Lieovou superalgebrou, pokud $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ jako vekt. prostor, a je vybavena $[\![\,,\,]\!]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, jež je $\mathbb{k}$-lin. & splňující $[\![\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\!] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ $(i+j \text{ v } \mathbb{Z}_2)$ a (*) a (**)

Př.:

1) Grassmannovy algebry $\Gamma(n)$ nad $\mathbb{K}$, char $\mathbb{K} \neq 2$

$\Gamma(n) = \langle \theta_1, \dots, \theta_k \mid k = 1, 2, \dots \rangle$, tj. $v \in \Gamma(n) \Leftrightarrow$

$\exists p \in \mathbb{N}_0 \exists \lambda_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{K} \quad v = \sum_{k=0}^{p} \lambda_{i_1 \dots i_k} \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$

Navíc platí relace $\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0$, spec. $\theta_i^2 = 0$

👁 : $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_{n+1}} = 0$, neboť tehdy aspoň jeden index stejný; $\theta_{i_1} \cdots \theta_i \cdots \theta_i \cdots \theta_{i_{n+1}} = \theta_{i_1} \cdots \theta_i^2 \cdots \theta_{i_{n+1}} = 0$

Def: $\deg \theta_i = 1 \quad \Gamma(n) = \Gamma(n)_0 \oplus \Gamma(n)_1$

$\deg \theta_i \theta_j = 0$

Je to super-algebra. Ověřit

Je komutativní, tj. $[\![,]\!] = 0$. | Přesněji: Je komutativní jako Lieova superalgebra

Vybavená $[\![,]\!]$ (hyjm čím) je přirozeně i Lieovou superalgebrou, byť s triviální závorkou (Lieovou superzávorkou).

Realizace: V v.p. nad $\mathbb{k}$ $\Lambda^{\bullet} V = \mathbb{k} \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \cdots \oplus \Lambda^n V$.

"známe z geometrie"; $\alpha \cdot \beta := \alpha \wedge \beta$.

2) $\mathfrak{gl}(m|n) := \mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n})$ ~~$=/\mathrm{End}$~~

Notace $\mathbb{R}^{m|n} := \underbrace{\mathbb{R}^m}_{(\mathbb{R}^{m+n})_0} \oplus \underbrace{\mathbb{R}^n}_{(\mathbb{R}^{m+n})_1}$ značení pro super vekt. prostor

End se rozloží na sudou a lichou část jako dříve.

Lichá část: $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Sudá část: $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$

V maticích

$$\begin{array}{c} m\{ \\ n\{ \end{array} \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & D \end{array}\right)}^{m \quad n} \ \dots \ \mathfrak{gl}_0(m|n)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \overbrace{B}^{n} \\ \hline \underbrace{C}_{m} & \end{array}\right) \ \dots \ \mathfrak{gl}_1(m|n)$$

Lieova závorka (možná přesněji super Lieova závorka) je zde super komutátor

---

3) $\mathfrak{sl}(m|n)$. $\quad str(M) = tr\,A - tr\,D \ \forall M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m|n)$. $\quad \mathfrak{sl}(m|n) = \{ M \in \mathfrak{gl}(m|n) \mid str\,M = 0 \}$

Př.: $\mathfrak{sl}(1|1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. □

Př.: $N, P \in \mathfrak{sl}(m|n)$. Je $[\![N, P]\!] = NP - (-1)^{\deg N \deg P} P \cdot N$

s-tr$[\![N,P]\!]$ pro hom. elementy (zkuste sami)

α) $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} E & \\ & H \end{pmatrix}$

$N \cdot P - (-1)^{0 \cdot 0} P \cdot N = 0 \Rightarrow str = 0$ ✓

β) $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & F \\ G & 0 \end{pmatrix}$

$NP - (-1)^{0 \cdot 1} PN = \begin{pmatrix} 0 & AF \\ BG & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & FB \\ GA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AF-FB \\ BG-GA & 0 \end{pmatrix}$

$str(NP - PN) = 0$ ✓ $\qquad$ γ) sami (analogické k β)

δ) $N = \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & F \\ G & 0 \end{pmatrix}$

$NP - (-1)^{1 \cdot 1} PN = \begin{pmatrix} CG & 0 \\ 0 & DF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} FD & 0 \\ 0 & GC \end{pmatrix} \Rightarrow$ cykličnost stopy

$str = tr(CG + FD) - tr(DF + GC) = tr(CG+FD) - tr(FD+CG)$
$= 0$ ✓

4) $osp(m|n)$ (orto-symplektické). Opět podalgebry $gl(m|n)$ ... super Lieova

5) Superalgebry Cartanova typu

$W(n), H(n), S(n), \dots$

- $W(n) = ?$

$W(n) \boxed{:=} \mathrm{Der}\,\Gamma(n)$, kde $\Gamma(n)$ je superalgebra, tj. $D \in W(n)$ iff D je $\mathbb{k}$-lin a leibnizovská, tj. $D(\varphi\psi) = (D\varphi)\cdot\psi \pm \varphi \cdot D\psi$

- $D(1\cdot 1) = D(1)\cdot 1 + 1 \cdot D(1) \Rightarrow D(1) = 0$
- Platí $\forall D \in W(n)\ \exists P_i,\ i = 1, \dots, n$, že $D = \sum_{i=1}^{n-1} P_i \frac{\partial}{\partial\theta_i}$, kde $\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_j := \delta_{ij}$ (dále $\mathbb{k}$-lin a Leibnitzem. $P_i \in \mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_n]$ polynomy v $\theta_1, \dots, \theta_n$

Nyní θ_i sudé ... sudé proměnné

$\deg D := \deg P_i - 1$,

pokud $D = \sum P_i \frac{\partial}{\partial\theta_i}$ a $\deg P_i = \deg P_j$ (homog)

$W(n)_k := \{ D \in W(n) \mid \deg D = k \}$

- Př.: $n = 2$ $\quad \Gamma(2) = \langle 1; \theta_1, \theta_2; \theta_1\theta_2 \rangle$

$W(2)_{-1} = \langle \frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2} \rangle \xrightarrow{\dim} 2$

$W(2)_0 = \langle \theta_i \frac{\partial}{\partial\theta_j} \mid i,j = 1,2 \rangle \xrightarrow{\dim} 4$

$W(2)_1 = \langle \theta_1\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_i} \mid i = 1,2 \rangle \longrightarrow 2$

$\dim_{\mathbb{k}} W(2) = 8$ (má být $n 2^n = 2 \cdot 4$)

Status-quo: $W(n)$ superalgebra; nezavádíme Lie-strn. (my)

Odtud vidíme „bohatost" Lieových superalgeber. Vyvstává tedy otázka stran jejich klasifikace, zvláště pak zavedení pojmu jednoduchosti. Dále nechť $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$!

Důležité pozorování: Nechť $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, [\![\,,\,]\!])$ je Lieovou superalgebrou, pak

$\mathfrak{g}_0$-$\mathfrak{g}_0$ 1) $(\mathfrak{g}_0, [\,,\,] := [\![\,,\,]\!]|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0})$ je Lieovou algebrou

$\mathfrak{g}_0$-$\mathfrak{g}_1$ 2) $ad: \mathfrak{g}_0 \to End_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}_1)$ definované $ad(a)b := [\![a,b]\!]$, $\forall a \in \mathfrak{g}_0$ $\forall b \in \mathfrak{g}_1$, je reprezentací Lieovy algebry $\mathfrak{g}_0$ na v.p. $\mathfrak{g}_1$

$\mathfrak{g}_1$-$\mathfrak{g}_1$ 3) $[\![\,,\,]\!]|_{\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1}: \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ je symetrická a splétající repr. $\mathfrak{g}_0$ na $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ a na $\mathfrak{g}_0$. Označíme $\{\,,\,\}$.

$\mathfrak{g}_1$-$\mathfrak{g}_1$-$\mathfrak{g}_1$ 4) $[\![a,[\![a,a]\!]]\!] = 0$ $\forall a \in \mathfrak{g}_1$ $([a,\{a,a\}] = 0)$ „triple (non-linear) relation".

Ad 3: $\{\,,\,\} := [\![\,,\,]\!]_{\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1}$. Symetrie zřejmá:

$\{a,b\} = [\![a,b]\!] = -(-1)^{\deg a \deg b} = [\![b,a]\!] = \{b,a\}$.

Splétání: 1) Důležité je, že nyní uvažujeme $[\![\,,\,]\!]$ nikoliv jen jako zobr. z $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, ale z $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ ($\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \hookrightarrow \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$). Na $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ tedy uvažujeme součin repr. ad.

Tenz. součin repr. $\tilde{\mathfrak{g}}$ na V_1 a V_2 ($\tilde{\mathfrak{g}}$ je Lie alg.):

$(\rho_1 \otimes \rho_2)(X)(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(X)v_2$

$\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ $\forall v_i \in V_i$, $i = 1,2$.

2) Výpočet $\underbrace{\text{nebudeme provádět}}_{\text{splétání}}$, ale můžete te zkusit

• Jednoduchost: $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, [\![\,,\,]\!])$ nazveme jednoduchou, nemá-li žádný netriviální vlastní ideál.

• Ideál $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}$: $[\![\mathfrak{f}, \mathfrak{g}]\!] \subseteq \mathfrak{f}$

• Strukturní teorie: jednoduchost super Lieovy algebry $\leftrightsquigarrow$ úplná reducibilita $\mathfrak{g}_1$ jako repr. $\mathfrak{g}_0$

$\leftrightsquigarrow$ jednoduchost $\mathfrak{g}_0$ jako L. a. (známe Killing-Cartan)

↑ neříkám přesně

Reducib. repr. $\mathfrak{g}_0$ $\rightsquigarrow$ $\oplus$ ired. repr. $\mathfrak{g}_0$ $\rightsquigarrow$ známe! (Cartan)

$\Rightarrow$ omezení na $\mathfrak{g}_1$

Vágnost souvislostí: možnost center a jejich akce (center $\mathfrak{g}_0$ ... proto $\mathfrak{g}_0$ není ani přímo jed. L. a)

Nicméně (Kac, Viktor, 1975, Ftial Anal. Appl):

Jednoduché s. Lie. alg.

- → Klasické
  - → Základní: $A(m,n)$, $B(m,n)$, $C(n+1)$, $D(m,n)$, $F(4)$, $G(3)$, $D(2,1;\alpha)$
  - → Divné: $P(n)$, $Q(n)$.
- → Cartanova typu: $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$, $H(n)$

Mechanické a pracné §. Nicméně otázky

Co je P, Q, $\tilde{S}$?

$D(2,1;\alpha)$?

Proč „chybí" $E_{6,7,8}$, G_2, hypot. $C(m,n)$?

Co je $F(4)$, $G(3)$? ....

- Jednoduché
  - klasické
    - základní: $A(m,n)$, $B(m,n)$, $C(n+1)$, $D(m,n)$, $F(4)$, $G(3)$, $D(2,1;\alpha)$
    - Divné: $P(n)$, $Q(n)$
  - Cartanova typu: $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$, $H(n)$

[Výjimečné jsou základní. Co považuji za zajímavé:
Co je P, Q, $G(3)$, $\tilde{S}(n)$, $D(2,1;\alpha)$??
Proč chybí $E(6)$, $E(7)$, $E(8)$?)

(6) Reprezentace Heisenbergovy grupy

<u>Def</u>: $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ sympl. vekt. prostor $\equiv$ v. p. $\mathbb{R}^{2n}$ spolu s nedeg. antisym. bil. formou $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

<u>Pozn.</u>: Pro (V, ω). Matice $[\omega]$ je antisym. Počítejme

$\det[\omega] = \det(-[\omega]^T) = (-1)^{m}\det([\omega]^T) =$ ($m = \dim V$)

$= (-1)^n \det[\omega]^T \Rightarrow$ <u>m je sudé</u>. (char $\mathbb{K} \neq 2$ ∧ $\dim V < +\infty$)

<u>Pozn.</u>: 1. Jde o homogenní (a lineární) model Ham. mechaniky $(V \times Sp(V,\omega) / Sp(V,\omega)$ je alt. popis$)$

2. Sympl. báze $\equiv (e_i)_{i=1}^{n}$ báze $2n$-prostoru $\mathbb{R}^{2n}$, že

$$[\omega]_{(e_i)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & +1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right).$$ (Ex. i jiné <u>pojmy</u> sympl. báze ... $[\omega]_{(f_i)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right)$, např.)

<u>Def</u>: $H_n = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$ (reálná) Heisenbergova grupa

$(v, t) \cdot (w, s) := (v + w, s + t + \frac{1}{2}\omega(v, w))$

$(0,0) = e$, $(v,t)^{-1} = (-v, -t)$. Ozn. $v \equiv (p, q)$

<u>Def</u>: $\forall \hbar \in \mathbb{R}$ $\quad S_\hbar : H_n \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$

$$\{[S_\hbar(p,q,t)]f\}(x) = e^{2\pi i \hbar t} e^{2\pi i x q + \pi i \hbar p q} f(x+\hbar p)$$

Pro $\hbar > 0$ $S_\hbar$ nazveme <u>Schrödingerovou reprezentací</u> H_n.

Pozn.: $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$, V je t.v.s. a G Lieova.

Pak $f \in V$ nazvu diferencovatelný vektor, pokud $\exists L$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\pi(e^{tX})(f) - f - L(X)f}{t} = 0 \text{ pro } \forall$$

$L : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ lineární zobr. do lin. zobr.,

tj. $L(X) : V \to V$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

[Limita je ve V.]

Pozn.: $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{S_\hbar(te_i, 0, 0)f\}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + \hbar te_i) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \hbar \delta^i{}_j = \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(x) \text{ pro f diferencovatelný}$$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{S_\hbar(0, te_i, 0)f\}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{2\pi i x_i t} f(x)$

$= 2\pi i x_i f(x)$

$P_i := \hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Q^i := 2\pi i x_i$ $\left(: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right.$

$[P_i, Q_j] = i\hbar \delta_{ij}$ tzv. CCR

CCR jsou tedy derivací Schr. repr.

(unitární) Schurovo lemma*: $\rho : G \to U(H)$ unit. repr. (topol) grupy G na H.p. H. Pak

ρ ireducibilní $\Leftrightarrow \mathrm{End}_G(H) \cong \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_H$.

Dk.: Vynechán (Deitm., Echt.)

Pozn.: 1) topol lze vynechat, stačí ρ je homom do $\underline{U}(H)$

2) If ρ není unit $\Rightarrow$ stačí • G s.s., H Banach $\wedge$ ρ „admissible"

nebo • (ρ, H) s nejvyšší vahou

atd.

3) Vždy ale H je $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$-prostor.

Označení a tvrzení: $Z_n := 0 \oplus \mathbb{R} \subseteq H_n$

Z_n je centrum H_n.

Stone-von Neumannova věta: Nechť ρ je ireduc. unit. repr. H_n na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $\rho(0,0,t) = e^{2\pi i h t}$ pro nějaké $h \neq 0$. Pak

$$\rho \simeq S_h.$$

Dk.: Vynechán. Viz Folland, Analysis on phase space, či Deitm.-Echter. $\square$

Pozn.: 1. CCR tedy nejsou arbitrární (znaka Neumanna?)

2. ρ buď ired. unit. repr. $H_n \Rightarrow \rho|_{Z_n} : Z_n \to U(H)$ je repr $Z_n \simeq \mathbb{R}$, tj.

$\rho(t+s) = \rho(t)\rho(s) \Rightarrow \rho(t) = e^{ct}$

Cauchyova ~~úloha~~ funkční rovnice (viz repr. S^1)

$c \in i\mathbb{R}$.

α) $c = 0 \Rightarrow \rho(t) = Id_H$

$\bar{\rho} : H_n/Z_n \to U(H)$ $\bar{\rho}([x]) := \rho(x)$

je korektní díky $\rho(t) = Id_H$.

$\bar{\rho}$ opět ired a unit., ale H_n/Z_n je abelovská kon. dim. grupa $\overset{(?)}{\Longrightarrow} \dim H = 1$.

β) $c \neq 0 \Rightarrow \hbar = \frac{c}{2\pi i} \neq 0 \overset{SvN}{\Longrightarrow} \rho \simeq S_\hbar = S_{\frac{c}{2\pi i}}$

Celkem: Všechny ired, unit. repr. $H_n \simeq$

$S_\hbar$ pro $\hbar \neq 0$, nebo $\sigma_{\vec{a},\vec{b}} : H_n \to End(\mathbb{C})$ ($\hbar = 0 \Rightarrow c = 0$),

$\sigma_{\vec{a},\vec{b}}(\vec{p}, \vec{q}, t)v = e^{2\pi i(\sum a_i p_i + \sum b_i q_i)} v$,

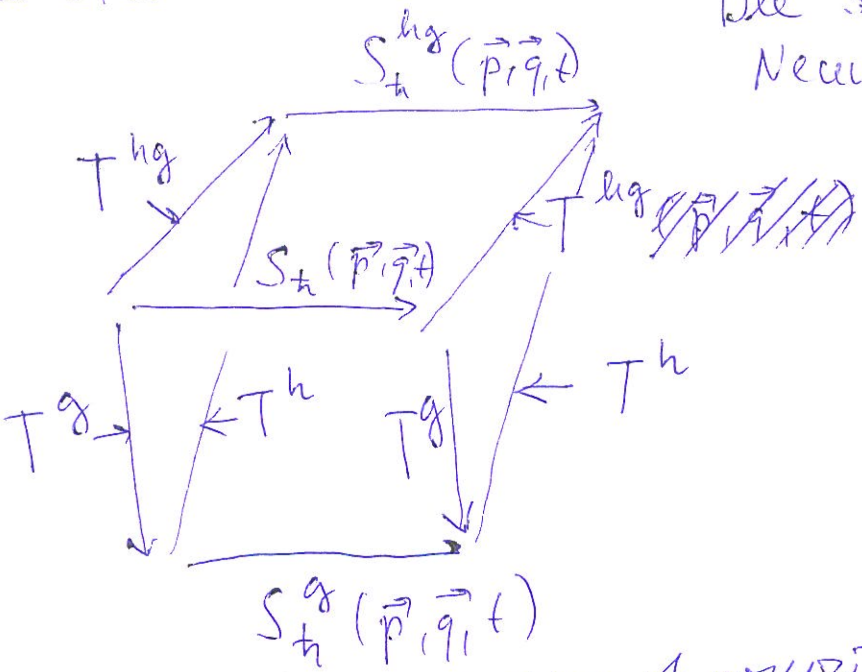
$v \in \mathbb{C}$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$!

Def: Twist „$S_\hbar$". Pro $\forall g \in Sp(2n,\mathbb{R}) :\overset{\text{ozn.}}{=} \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n}) \mid \omega(Av,Aw)=\omega(v,w)\ \forall v,w\in\mathbb{R}^{2n}\}$ (symplektická grupa) definujeme „twist. Schr. repr."

$$S_\hbar^g(p,q,t) := S_\hbar(g\cdot(p,q),t) \quad \left(g\cdot(p,q)=g\binom{p}{q}\right)$$

Stále (odteď) $\hbar \neq 0$.

Dle ~~Schurov~~ Stone-von Neumanna diagram vlevo komutuje.



Zapišme komutativnost pomocí rovnice

$$S_\hbar^{hg}(\vec p,\vec q,t) = T^{hg}\circ S_\hbar(\vec p,\vec q,t)\circ T^{hg^{-1}}$$

$$\| \qquad\qquad \uparrow$$

$$T^h\circ S_\hbar^g(\vec p,\vec q,t)\circ T^{h^{-1}}$$

$$\|$$

$$T^h\circ T^g\circ S_\hbar^{(\vec p,\vec q,t)}\circ T^{g^{-1}}\circ T^{h^{-1}} = T^{hg}\circ S_\hbar(p,q,t)\circ T^{hg^{-1}}$$

Dle Schurova lemmatu + ireducibility $S_\hbar \Longrightarrow$

$$T^{hg} = \underbrace{c(h,g)}_{\in\mathbb{C}}\, T^h\circ T^g \quad \text{pro } c(h,g)\in\mathbb{C}.$$

Na jednu stranu $T: h \mapsto T^h$ není tedy obecně repr., na druhou jde o tzv. projektivní reprezentaci.

A. Weil: $Mp(2n, \mathbb{R})$ tzv. dvoulisté souvislé nakrytí $Sp(2n, \mathbb{R})$, pak T^h definuje „skutečnou" repr. tohoto nakrytí.

$$\tilde{T}: \underset{\substack{\uparrow \\ =: \text{ metapl. grupa}}}{Mp(2n, \mathbb{R})} \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

$\tilde{T}$ se nazývá metaplektická repr. (oscilátorová, symplektická spinorová)

$$\begin{tikzcd}
Mp(2n, \mathbb{R}) \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "2:1"'] & \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n)) \\
Sp(2n, \mathbb{R}) \arrow[ur, "\nexists"'] &
\end{tikzcd}$$

Obdobná situace jako pro $Spin(p,q) \xrightarrow{2:1} SO(p,q)$ a tzv. spinorovou repr. $Spin(p,q)$. Ta není „skut." repr. $SO(p,q)$.

<u>Pozn.:</u> $Mp(2n, \mathbb{R})$ hraje úlohu symetrie v teorii ϑ-funkcí.

⑦ Reprezentace polopřímých součinů

Historie: Wigner, Mackey (zobecnění: Moritova ekvivalence, operátorová K-teorie (Johnathan Rosenberg)). Původně snaha reprezentovat $P = O(1,3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$ (Poincarého grupa — Wigner).

- H, K buďte grupy, $Aut(H) := \{ f : H \to H \mid f$ je bij. na H a f je homomorfismus$\}$. Buď $\varphi : K \to Aut(H)$ homom. grup — $Aut(H)$ je grupa vzhl. ke skládání.

Definice: $K \ltimes_\varphi H$ = jakomy $K \times H$, ale s nás.
$$\underset{K\times H}{(k_1, h_1)} \cdot \underset{K\times H}{(k_2, h_2)} = (k_1 k_2, h_1 (\varphi(k_1) h_2)),$$
slije polopřímý součin (indukovaný φ).

👁: 1) $K \ltimes H$ je grupa. Nutné rozepsat.
MNEMO: vezmu $h_1 \swarrow$ a použiji $K \uparrow$ a φ se dostanu do $H \nearrow$ $\quad (h_2 \to \varphi(k_1) h_2 \to h_1 \varphi(k_1) h_2)$

2) G grp, $H \trianglelefteq G$ (normální, tj. $g^{-1} H g \subseteq H$), K pdgr. G, $K \cap H = \{e\}$, $\varphi : K \to Aut(H)$ $\varphi(k) h = k^{-1} h k$, $k \in K$, $h \in H$.
Pak mám $K \ltimes H \leq G$ podgrupu G danou adjungováním normální pdgr.

Příklad (vždy na paměti): (V, B) buď v.p. se sym. nedeg. bil formou $\rightsquigarrow O(V,B) = K$, $H = V$; $\varphi(A) v = Av$
$O(V,B) \ltimes V =: Euc(V,B)$; $(A_1, v_1) \cdot (A_2, v_2) = (A_1 A_2, v_1 + A_1 v_2$

odpovídá $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & v_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A_2 & v_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 A_2 & A_1 v_2 + v_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$.

Euc ... Eukleidova grupa.

Spec. případ B sym. forma signatury $(\overset{+}{1}, \overset{-}{3}, \overset{0}{0})$.
Tehdy $\mathrm{Euc}(V, B)$ sluje Poincarého nebo nehomogenní Lorentzova grupa.

Pozn.: Analogicky pro sympl. v. prostor (V, ω) uvažujeme $Sp(V, \omega) \ltimes_\varphi V$, $\varphi(A)v = Av$ (opět). Můžeme uvažovat i $Sp(V, \omega) \ltimes H(V, \omega)$, kde φ je twist z kapitoly o Heisenb. grupě a $H(V, \omega) = H_n \cong \mathbb{K}^{2n} \oplus \mathbb{K}$ je Heis. grp z téže kapitoly.

Pozn.: Samu Heisenb. grupa je semi-direktním součtem, ovšem nikoliv $\mathbb{K}^{2n} \ltimes \mathbb{K}$ ← centrum či $\mathbb{K} \ltimes \mathbb{K}^{2n}$, ale $\boxed{(\underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}}_{H}) \ltimes_\varphi \underbrace{\mathbb{K}^n}_{\mathbb{K}}}$; konkr. φ viz Folland: Harmonic Analysis on phase space
$$\varphi(q)(p, t) := \left(p, t + \tfrac{1}{2}\omega((q,0),(0,p))\right).$$

Indukce

→ a) Indukční prostor a indukovaná repr.

Nechť (situation)
- G lok. kpt. top. grupa, H uz. pdgr. G, μ_G levoinvariantní Haarova míra na G
- $\rho : H \to U(E)$ unit. repr. H na Hilb. prostoru $(E; (\,,\,))$

- indukční prostor E^ρ

Opak.: pojmů z teorie míry

A NYNÍ "MNOHO" ZAJÍMAVÝCH ANAL. PP ~~[illegible]~~:

α) krocientní míra (G. Warner: HA on semi-simple Lie groups, p. 366)

$$\forall \varphi \in C_c(G): \int_{x\in G} (f(x), g(x))\, \rho(x)\, d\mu_G(x) = \int_{[x]\in G/H} \overset{\bullet}{\varphi}([x])\, d\mu_{f,g}([x]) \quad *)$$

je definující rovnice pro Radonovu míru na G/H.

Míra označená $d\mu_{f,g}([x])$ závislá na f, g

Existenci $d\mu_{f,g}([x])$ je nutno ukázat. Zajímavé ansich. „ves sui"

β) lokální sčítatelnost $\equiv$ lokální integrabilita (synonymum; jiné označení téhož), tj.

$\forall m \in G\ \exists U$ měřitelná $m \in U$, že $\int_U |f|\, d\mu_G < \infty$.

• Indukční prostor. Pp. $\Delta_{G|H} = \Delta_H$.

$$E^\rho = \{ f: G \to E \mid \underbrace{{}^{1)} f(gh) = \rho(h^{-1}) f(g)}_{\text{ekvivariance}} \ \forall g \in G\ \forall h \in H$$

2) f je μ_G-měřitelná, 3) $\mu_{f,f}(G/H) < \infty$

4) $g \mapsto \|f(g)\|_E^2 \in \mathbb{R}$ je lok. integrabilní $\}$

Pozn.: If $\Delta_{G|H} \neq \Delta_H \Rightarrow$ 1) se nahradí sofistifikovanější „ekvivariancí" $\rightarrow$ δ-a s-faktory (viz. G. Bruhat, viz také G. Warner, App. I, v HA on SS)

Indukovaná reprezentace (kp): $\rho_H^G : G \to \mathrm{Aut}(E^\rho)$

$$[\rho_H^G(g) f](g') = f(g^{-1} g') \quad \forall f \in E^\rho \ \forall g, g' \in G$$

Na E^ρ nutno def. topologii (viz. G. Bruhat či G. Warner jako výše)

$*)$ $\forall [x] \in G/H$

$\overset{\bullet}{\varphi}([x]) := \int \varphi(xh)\, d\mu_H(h)$, kde μ_H je Haarova míra na H.
ekvivariantní

(b) Ad homogenní prostory a akce

- $G \supseteq H$, H uz. grupa v L. grupě G: G/H slouje <u>homogenní prostor</u>

- Chceme <u>akci</u> G na $\hat{H}$, tj. $\cdot : G \times \hat{H} \to \hat{H}$, aby

α)
$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \rho) = (g_1 g_2) \cdot \rho \;\; \&$$
$$\& \; e \cdot \rho = \rho$$

β) → Připomeňme $\hat{H}_u$ a zaveďme na ním <u>topologii</u>:

$$\hat{H}_u = \text{Selektor}\left(\{ \rho : H \to U(1) \mid \rho \text{ spojitý} \} / \cong \right),$$

kde $\cong$ je ekviv. repr.; $\text{Selec}\, M = N \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\forall x \in N : x \cap \text{Selec}\, M$ je jednoprvková

$\hat{H}_u$ je tzv. unitární duál. Omezení na $\to U(1)$ je zdůvodnitelné: Unitární Schur. lemma implikuje, že $\forall$ ired. repr. unitární abelovské H je jednorozm.

Stejně jako pro kon. dim. repr. abel. grup:
$\rho(h)$ je splétající $\forall h \xrightarrow{\text{unit Schur}} \rho(h) = c_h \,\mathrm{Id}$. Ired $\Rightarrow$
$c_h \,\mathrm{Id}$ je operátor na jednorozm., jinak inv. pp. $\neq \{0\}$ a celého pstoru.

Zřejmě: $\forall$ jednorozm. je ireducibilní! Topologie subbáze $\hat{H}_u$? Obecně $C^0(X,Y)$ má kompaktně otevřenou topologii, tj. takovou, jejíž subbáze je $\{ f \in C^0(X,Y) \mid f(K) \subseteq V,\ K \text{ cpt},\ V \text{ ot.} \}$.

Pozn.: $\hat{H}$ není jen top. prostor, ale i grupa!

$(\rho\cdot\sigma)(h) := \rho(h)\sigma(h)$ $\forall \rho,\sigma\in\hat{H}$ $\forall h\in H$;

tj. $\rho\cdot\sigma$ je nová funkce na H do $U(1)$.

Je to repr.? $(\rho\cdot\sigma)(gh) = \rho(gh)\sigma(gh) =$

$$= \rho(g)\rho(h)\sigma(g)\sigma(h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{důsl. abelovskosti } H}}{=} \rho(g)\sigma(g)\rho(h)\sigma(h)$$

$$= (\rho\cdot\sigma)(g)\circ(\rho\cdot\sigma)(h) \quad \checkmark \text{ ANO}$$

(Dokonce $\hat{H}$ s komp.-otevřenou top. je i topol. grupa!)

γ) • Orbita akce G procházející $\rho\in\hat{H}$, $G\cdot\rho := \{g\cdot\rho \mid g\in G\}$

δ) • Stabilizátor akce G pro bod $\rho\in\hat{H}$, $G_\rho := \{g\in G \mid g\cdot\rho = \rho\}$

ε) • Fakt o akcích $\boxed{G/G_\rho \cong G\cdot\rho}$ (stab. / orbita) pomocí $[g]\in G/G_\rho \mapsto g\cdot\rho\in G\cdot\rho$. Jde o bijekci množin. V top. případě a spoj. akci jde o homeo. V Lieově případě o difeomorf. (Metoda: Vzory uz. jsou uz. při spoj. zobr.; spec. G_ρ je uzavř.)

Př. akce: 1) $O(n)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(A,v)\mapsto Av$

$N = (0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^n$ $O(n)\cdot N = S^{n-1}$ a

$O(n)_N \cong O(n-1)$; $S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$

Check dimensions!

2) $\mathrm{Euc}(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1} x_i^2) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$((A, \vec{v}), \vec{x}) \longmapsto A\vec{x} + \vec{v}$$

$$\mathbb{R}^n \cong \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^n, \textstyle\sum x_i^2) / O(n)$$

Hom. Eukl. model afinní roviny „$\mathbb{R}^n$".

3) Grassmanniány, Kleinova kvadrika ...

→ c) Technická podmínka (na předn. vynechána vpřesném znění)

1. $H \trianglelefteq G$ uz., abel, normální ($\trianglelefteq$); normální $\equiv$
$\equiv \forall g \in G \quad g^{-1} H g \subseteq H$

2. $\exists$ spoč. mna I, že $B = (B_i)_{i \in I}$, kde $\forall B_i$
(O_1) borelovské na G a (i) B_i je sjedn. G-orbit
akce G na $\hat{H}$ & (ii) Q_1, Q_2 G-orbity
(O_2) akce G na $\hat{H}$ a $Q_1 \neq Q_2$. Pak $\exists B_i$, že
$Q_1 \subseteq B_i \wedge Q_2 \cap B_i = \emptyset$, tj. B_i „separuje" orbity.

Pp. c. 1: Akce G na $\hat{H}_u$: $(g \cdot \rho)(h) := \rho(\underbrace{g^{-1} h g}_{\in H\,!})$
$\forall g \in G$ ~~a~~ $\forall h \in H$ a $\forall \rho \in \hat{H}_u$.

Orbitální selektor: $\mathrm{Orbselekt} := \mathrm{Selektor}(\{\rho \mid \rho \in \hat{H}\} / \cong)$

kde $\rho_1 \cong \rho_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} G \cdot \rho_1 = G \cdot \rho_2$ pro akci výše.

→ d) Vnější (a navíc projektivní) součin (outer): $\rho_i : G_i \to \mathrm{Aut}(E_i)$

← projektivní zúplnění $\otimes$

$\rho : G_1 \times G_2 \to \mathrm{Aut}(E_1 \hat{\otimes} E_2)$, $\rho(g_1, g_2)(e_1 \otimes e_2) = \rho_1(g_1)e_1 \otimes$

$\otimes \rho_2(g_2)$. Multilineární rozš. na obecný element $E_1 \otimes E_2$ a limitní rozš. na $E_1 \hat{\otimes} E_2$. Projektivní rozšíření tenz. součinů (viz Grothendieck, A; Produits tensoriels d'espaces nucléaires +/–) nebo Ryan: Tensor products Banach spaces +/–

Pozn.: (Vnitřní) tenz. součin $\cong$ zúžení vnějšího z $\rho_1 = \rho_2$ $(\Rightarrow G_1 = \underset{= G}{G_2})$ na $\{(x,x) \mid x \in G\} \simeq G$, kde $\cong$ je ekviv. repr. a $\simeq$ izom. grup.

Mackey vytvořil celou teorii repr. polopř. součinů: více než (konečné orbity $\rightsquigarrow$ spočetné orbity), založil pojmy: systém imprimitivnosti, reciprocita indukce u polopř. s.; [Bundlový přístup (Doran, Fell ...).] Vztah ke kvant. teorii. (Dále Blattner, Kostant.)

My vystačíme s:

! Věta (Mackey): G lok. komp., H uzavř. norm. abelovská pdgr. G splňující technickou podm. O_1 a O_2 a K uzavř. pdgr. G, že $G = K \ltimes H$. Pak množina

$$\mathcal{M} := \{(L,\rho) \mid L \in \widehat{G_\rho \cap K_\eta},\ \rho \in \mathrm{Orbselekt}\}$$ je

stejné mohutnosti jako $\hat{G}$ prostřednictvím bijekce $(\mathcal{M})$ na $\hat{G}$ dané vztahem:

$$(L,\rho) \longmapsto (L \times \rho)_H^G \ (\in \hat{G}).$$

Dk.: Např. Garth Warner (HA on SS, Vol I; s. 439). $\square$

Aplikace Mackeyovy věty

1. Symetrie afinní přímky

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x>0,\ y\in\mathbb{R} \right\} \qquad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_2+y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{transl.}}{H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y\in\mathbb{R} \right\}} \quad \underset{\text{dilatace}}{K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x>0 \right\}}.$$

Předp. Mackeyho věty:

Topologicky $G = K\times H \cong \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$; K i H uzavř.

- $\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1+y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H$ abel.
- $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}\frac{1}{x} = \begin{pmatrix} x^{-1} & -yx^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & -yx^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & -yx^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y+\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{y+\alpha}{x} - \frac{y}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow H \text{ norm.}$$

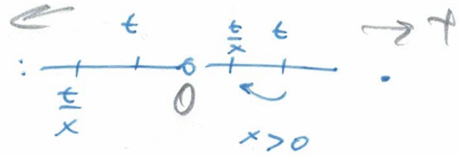
- $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq (\alpha,\beta) \Rightarrow (\alpha',\beta')\cdot(\alpha'',\beta'') = (\alpha'\alpha'', \alpha'\beta''+\beta')$

Repr. H (unitární) $\rightsquigarrow \hat{H}_u$. Jde o repr. $\mathbb{R}$, jež známe (Cauchyho funkcionální rce); $\rho_t : \mathbb{R} \to U(\mathbb{C})$, $\rho_t(\beta) = e^{i\beta t}$, $t\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ ($\rho_t(\beta)\vec{v} = e^{i\beta t}\vec{v}$, $\vec{v}\in\mathbb{C}$; t parametrizuje $\forall$ unit. ired. repr., tj. $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ (bijekce množin).

- Akce G na $\hat{H}_u$: $\underline{(g\cdot\rho_t)(h)} \overset{\text{def. akce výše}}{=} \rho_t(g^{-1}hg) = \rho_t\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pokud $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $h = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tj. $\rho_t\begin{pmatrix} 1 & \overset{=\beta}{\frac{\alpha}{x}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = e^{i\frac{\alpha}{x}t}\vec{v} = e^{i\alpha\frac{t}{x}}\vec{v} = \rho_{\frac{t}{x}}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; celkem $g\cdot\rho_t = \rho_{\frac{t}{x}}$.

- Orbselekt. $\hat{H}_u$ se rozpadne na $\overbrace{\{\rho_t \mid t>0\}}^{=Q^{-1}} \cup \overbrace{\{\rho_0\}}^{=Q^0} \cup \underbrace{\{\rho_t \mid t<0\}}_{=Q^{+1}}$, orb akce

$g=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $x>0$, $y\in\mathbb{R}$ na ρ_t je $\rho_{t/x}$. Jde tedy o akci „ekviv.ak…

$\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R}$ formulí $(x,t)\mapsto \frac{t}{x}$:  .

Orbsel$\hat{H}$ $=\{\rho_{-1},\rho_0,\rho_1\}$ naše volba reprezentantů.

- Komp.-otevř. top. na $\hat{H}_u=\mathbb{R}$ se kryje s normovou na $\mathbb{R}$, tj. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, kde $|\cdot|$ je abs. hodnota (norma!) na $\mathbb{R}$. Nebudeme ověřovat. Není ale složité.

- Techn. podm. Za $\mathcal{B}$ zvolme $\mathcal{B}=\{B_{-1},B_0,B_1\}$, tj. máj. $I=\{-1,0,1\}$ spoč. $B_{-1}=\mathbb{R}^-$, $B_0=\{0\}$, $B_1=\mathbb{R}^+$ borelovské. $B_i=\{g\cdot\rho_i \mid g\in G\}$, $i=-1,0,1$, tj. (O1) splněna. $Q_i^i\neq Q_j^j \Rightarrow i\neq j$. Vezmi $B_i^i=Q^i$. Pak $Q^i\subseteq B^i \wedge Q^j\cap B_i=B_j\cap B_i=\emptyset$ $\forall i\neq j$! Tj. (O2) splněna. (V obrázku triviální!)

- Izotr. podgrupy: $G_{\rho_{-1}}=\{g\in G \mid g\cdot\rho_{-1}=\rho_{-1}\}$, $g=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Tj. $g\cdot\rho_{-1}=\rho_{-\frac{1}{x}}=\rho_{-1}$ iff $x=1 \Rightarrow G_{\rho_{-1}}=\left\{\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\}\simeq H$. Analogicky $G_{\rho_1}=\left\{\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\}\simeq H$.

  G_{ρ_0} $g\cdot\rho_0=\rho_0$ iff $\rho_{\frac{0}{x}}=\rho_0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^+$ (s uvážením ~~omezením~~ na elementy G), tj. $G_{\rho_0}=G$.

- Průniky: $K\cap G_{\rho_{-1}}=K\cap H=\{e\}$

  $K\cap G_{\rho_0}=K\cap G=K\cong\mathbb{R}^+$.

  $K\cap G_{\rho_1}=\{e\}$

• ∀ ired. unit rep $\{e\}$ známe.

∀ ired unit rep $\mathbb{R}^+$? $\mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R}$ pomocí $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$\phi(r) = \ln r$ $\forall r \in \mathbb{R}^+$ je homom. (izomorf.) grup!

Tj. snadno $\hat{\mathbb{R}}^+ \cong \hat{\mathbb{R}}$ (množ. bijekce)

$$L_t(r) := \varrho_t(\ln r) = e^{i \ln r \, t} \left(= r^{it}\right).$$

bij. množ   z věty Mackeye

• Celkem $\underline{\hat{G}} \cong \{(L,\rho) \mid \dots\} = \underline{\{(L_t, \rho_0),\ t \in \mathbb{R}\} \cup}$

$\underline{\cup \{(\underset{=\tilde{L}}{\mathrm{Id}}, \rho_{-1})\} \cup \{(\underset{=\tilde{\tilde{L}}}{\mathrm{Id}}, \rho_1)\}.}$

• Pro určení elementů z $\hat{G}$ bychom měli použít bijekci z věty; tj. konstruovat $(L_t \times \rho_0)$, $(\tilde{L} \times \rho_{-1})$, $(\tilde{\tilde{L}} \times \rho_1)$, větné $E^{L_t \times \rho_0}$, $E^{\tilde{L} \times \rho_{-1}}$, $E^{\tilde{\tilde{L}} \times \rho_1}$, a pak provést indukci $(L_t \times \rho_0)^G_H$ a $(\tilde{L} \times \rho_{-1})^G_H$ a $(\tilde{\tilde{L}} \times \rho_1)^G_H$.

To však již vynecháme.

2) Poincarého grupa

$G := O(1,3) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^4$, kde $\varphi(A)v = Av$.

Pozn.: $\lambda : SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} SO(1,3)_e$ $\left(\Rightarrow Spin(1,3)_e \simeq SL(2,\mathbb{C})\right)$,

kde $Spin(1,3)_e :=$ dvojlisté nakrytí $SO(1,3)_e$). komp. souvislosti

Již neověřujeme předpoklady (zkuste / můžete zkusit).

$O(1,3) =:$ Lorentzova grupa, $O(1,3) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^4$ nehomogenní Lorentzova grupa. λ zkonstruujeme níže. $SL(2,\mathbb{C})$ je jednoduše souvislá [dk.: $A \in SL(2,\mathbb{C}) \mapsto K \in SU(2),\ P \in (\nabla)$ Gram-Schmidtem. $K \in SU(2)$ je jednoduše souvislá: homotopií pomocí $e^{i\varphi}$]. Odtud $O(1,3)$ je 2-souvislá .].

• $\forall$ ired. unit rep $\{e\}$ známe.

$\forall$ ired unit rep $\mathbb{R}^+$? $\mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R}$ pomocí $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$\phi(r) = \ln r \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$ je homom. (izomorf.) grup!

Tj. snadno $\widehat{\mathbb{R}^+} \cong \widehat{\mathbb{R}}$ (množ. bijekce)

$$L_t(r) := \rho_t(\ln r) = e^{i \ln r\, t} \left(= r^{it}\right).$$

• Celkem $\underline{\hat{G}} \overset{\text{bij. množ}}{\cong} \{(L, \rho) \mid \ldots\} \overset{\text{z věty Mackeye}}{=} \underline{\{(L_t, \rho_0), t \in \mathbb{R}\} \cup}$
$\underline{\cup \{(\overset{= \tilde{L}}{Id}, \rho_{-1})\} \cup \{(\overset{= \tilde{\tilde{L}}}{Id}, \rho_1)\}}.$

• Pro určení elementů z $\hat{G}$ bychom měli použít bijekci z věty; tj. konstruovat $(L_t \times \rho_0)$, $(\tilde{L} \times \rho_{-1})$, $(\tilde{\tilde{L}} \times \rho_1)$, včetně $E^{L_t \times \rho_0}$, $E^{\tilde{L} \times \rho_{-1}}$, $E^{\tilde{\tilde{L}} \times \rho_1}$, a pak provést indukci $(L_t \times \rho_0)^G_H$ a $(\tilde{L} \times \rho_{-1})^G_H$ a $(\tilde{\tilde{L}} \times \rho_1)^G_H$.

To však již vynecháme.

2) Poincarého grupa

$G := O(1,3) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^4$, kde $\varphi(A)v = Av$.

Pozn.: $\lambda: SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} SO(1,3)_e$ $(\Rightarrow Spin(1,3)_e \simeq SL(2,\mathbb{C})$, kde $Spin(1,3)_e :=$ dvojlisté nakrytí $SO(1,3)_e$). $\uparrow$ komp. souvislosti

Již neověřujeme předpoklady (zkuste / můžete zkusit).

$O(1,3) =:$ Lorentzova grupa, $O(1,3) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^4$ nehomogenní Lorentzova grupa. λ zkonstruujeme níže. $SL(2,\mathbb{C})$ je jednoduše souvislá [dk.: $A \in SL(2,\mathbb{C}) \mapsto K \in SU(2)$, $P \in (\nabla)$ Gram-Schmidtem. $K \in SU(2)$ jednoduše souvislá: homotopií pomocí $e^{i\varphi}$]. Odtud $O(1,3)$ je 2-souvislá.]

Reprezentace Poincarého grupy (komponenty souvislosti)

Poincarého grupa := souvislé dvojité nakrytí nehomogenní Lorentzovy grupy $L = O(1,3) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^4$, $\varphi(A)\vec{v} = A\vec{v}$ $\forall A \in O(1,3)$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^4$.

Komponentu souvislosti obsahující neutr. prvek označme P. Grupa P je nakrytím $O(1,3)_e \ltimes \mathbb{R}^4$ (komp. souvisl. Lor. gr.). $O(1,3)_e = SO(1,3)_+$ tzv. autochronní (+) orientaci časoprostoru (S) zachovávající Lorentzova grupa. • Lze zjistit, že $P \cong \widetilde{O(1,3)_e} \ltimes_\psi \mathbb{R}^4$, kde $\widetilde{O(1,3)_e}$ označuje souvislé dvoulisté nakrytí $O(1,3)_e$. Zde $\psi(A)\vec{v} = \lambda(A)v$, kde $\lambda : \widetilde{O(1,3)_e} \to O(1,3)_e$ je dvojité nakrytí. Bývá zvykem $\widetilde{O(1,3)_e}$ nazývat spingrupa (sign. (1,3)) a označovat $Spin(1,3)_e$.

(Někdy, ve fyzice, se namísto $Spin(1,3)_e$ píše $Spin(1,3)_+$.)

tento izom. je klíčový v twistorové teorii R. Penrose

a) Výhodný izomorfizmus: $\widetilde{O(1,3)_e} \simeq SL(2,\mathbb{C})$

1. $j : \mathbb{R}^4 \to H(2) = \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A^\dagger = A\}$, $j(x_0,x_1,x_2,x_3) :=$
$= \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}$, $(x_0,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4$, j je izom. $\mathbb{R}$-vekt. prostorů

2. $\phi : M(2,\mathbb{C}) \to M(4,\mathbb{R})$ $\boxed{\phi(A)v = j^{-1}(A^\dagger j(v) A)}$
Je homomorfizmus semigrup $(M(2,\mathbb{C}), E, \cdot)$ a $(M(4,\mathbb{R}), E, \cdot)$. Snadné: $\psi := \phi_{|SL(2,\mathbb{C})} : SL(2,\mathbb{C}) \to M(4,\mathbb{R})$ je homom. grp $SL(2,\mathbb{C})$ na $\mathrm{Im}\,\phi_{|SL(2,\mathbb{C})}$ „zadarmo"!!).

3. $\boxed{\det(j(\vec{v})) = (\vec{v},\vec{v})_{Mink}}$! odtud $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})$:
$(\psi(A)v, \psi(A)v)_{Mink} = \det[j(\psi(A)v)] = \det(A^\dagger j(v) A) =$

$= \det A^{\dagger} \det A \det j(\vec{v}) = 1 \cdot 1\, (\vec{v}, \vec{v})_{Mink}$. Tj. $\psi(A) \in$ $\in O(1,3)$. Celkem $\psi : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow O(1,3)$. Ze spoj. ψ a souvislosti $SL(2,\mathbb{C})$ je $\psi : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow O(1,3)_e$. Snadné $\# \psi^{-1}(A) = 2\ \forall A \in \mathrm{Im}\, \psi$. Složitější ψ je na $O(1,3)_e$. Díky teorii nakrývacích prostorů je ψ (dvoj.)nakrytí. Opět díky této teorii (jednozn. nakrytí (až na „deck transformation")) je $SL(2,\mathbb{C}) \cong \widetilde{O(1,3)_e}$ ($\simeq Spin(1,3)$) je jednozn. grup. ψ je pak nakrytí λ. (Dále jen λ).

b) $\hat{H} = \widehat{\mathbb{R}^4} \cong \mathbb{R}^4$. Param.: $\xi_{\vec{a}}(\vec{v}) = e^{i(\vec{a}, \vec{v})_{Euc}}$ tj. $\underset{\substack{\Uparrow \\ H = \mathbb{R}^4}}{\xi_a(v)}\ \underset{\substack{\Uparrow \\ v \in \mathbb{C}}}{c} = e^{i(a,v)_{Euc}} c$. Definujme $\varsigma_{\vec{a}}(\vec{v}) = e^{i(\vec{a}, \vec{v})_{Mink}}$.

Zjevně $\{\xi_{\vec{a}} \mid a \in \mathbb{R}^4\} \xleftrightarrow[\ 1:1\ ]{\swarrow \text{bijekce množin}} \{\varsigma_{\vec{a}} \mid a \in \mathbb{R}^4\}$ $(\xi_a \mapsto \varsigma_{T(\vec{a})})$

kde $T(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, -a_1, -a_2, -a_3)$. Zvolme $\hat{H}_n = \{\varsigma_{\vec{a}} \mid \vec{a} \in \mathbb{R}^4\}$, je to std. a výhodné. $\varsigma_{\vec{a}} \neq \xi_{\vec{a}}$! ($\vec{a}$ „obecné")

Jen reparametrizujeme unit. duálu $\mathbb{R}^4$, neříkáme, že ξ_a nahradíme ekviv. $\varsigma_{\vec{a}}$ (mezi nimi není ekvivalentní).

c) Akce P na $\hat{H}_n$. Pro $g \in P$ je $\lambda(g) \in O(1,3) \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^4$.

Pišme $\lambda(g) = \left(\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$. $(g \cdot \varsigma_a)(\underset{\substack{\Uparrow \\ H}}{v}) = \varsigma_a(\lambda(g)^{-1} v \lambda(g)) = \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spočteme } \lambda(g)^{-1}!}}{=}$

$= \varsigma_a(A^{-1} v) = e^{i(a, A^{-1} v)_{Mink}} \underset{\substack{\uparrow \\ A \in O(1,3)}}{\overset{\swarrow \text{ výhodnost } \varsigma \text{ oproti } \xi}{=}} e^{i(Aa, v)_M} = \varsigma_{Aa}(v)$

Tj. $e^{i(b-\lambda(A)\vec{a}, -)_M} = 1 \Leftrightarrow (b-\lambda(A)a, -)_M = 2k\pi \ (\exists k)$

S kvantifikátory $\forall v \in \mathbb{R}^4 \exists k_v \in \mathbb{Z}: (b-\lambda(A)a, \vec{v}) = 2k_{\vec{v}}\pi$

$\forall A \in Spin(1,3) \simeq SL(2,\mathbb{C})$

Nechť $\exists v_0 \in \mathbb{R}^4$, že $k_{v_0} \neq 0$.

Pro $\forall t \in \mathbb{R}$ je $(b-\lambda(A)a, tv_0)_M = 2k_{tv_0}\pi$

$$LS = t(b-\lambda(A)a, v)_M = 2k_{tv_0}\pi = PS$$

$k_{tv_0} \leftrightarrow t$ je zjevně lineární. Tatofce je z pp. nenulová.

LS je spoj. fce (t); PS, pokud nenulová, a $k_{tv_0} \in \mathbb{Z}$, je nespojitá $\Rightarrow$ spor $\Rightarrow k_v = 0 \ \forall v$.

Tj. $(b-\lambda(A)a, -)_M = 0$ (toto se v literatuře, co čtu, vypouští: Sternberg; Warner). Z nedeg. $(,)_M$ je

$b-\lambda(A)a = 0$, tj. $b = \lambda(A)a$, tj. a, b v téže orb., jsou-li „spojeny" $\lambda(A)$.

Shrnutí: a, b v téže orb. $\Leftrightarrow \exists A \ b = \lambda(A)a \Rightarrow$

$(b,b)_M = (\lambda(A)a, \lambda(A)a)_M = (a,a)_M$! A máme generický „hyperboloidy"!

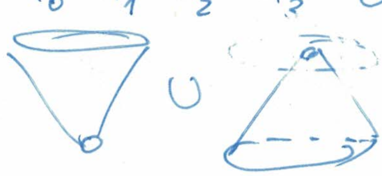
d) Orbity:

a, b v téže $\Rightarrow$ jenom nutně $(a,a)_M = c \wedge (b,b)_M = c \ (\exists c)$

Zkoumejme (geometricky) rci $(a,a)_M = c$.

1. $c=0$: $a = 0 \in \mathbb{R}^4 (\simeq H(2))$. $\{0\}$ je zjevně orbita.

$c = 0 \wedge a \neq 0$: $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0 \Rightarrow$ sjednocení dvou kuželů



2. $c \neq 0$

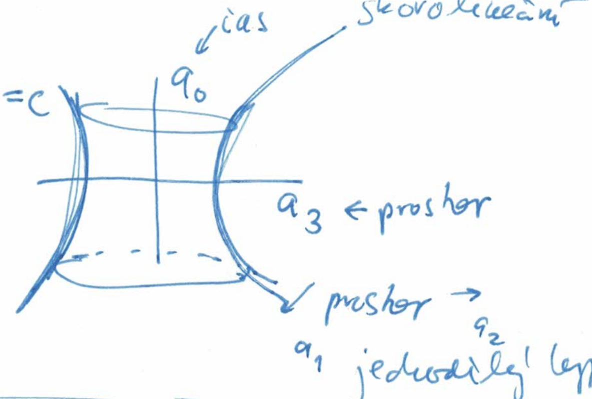
2.a $c \geq 0$ $\quad a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2=c$

Položme $a_1=a_2=0$ $\quad a_0^2-a_3^2=c$

$$(a_0-a_3)(a_0+a_3)=c \quad /:a_3$$

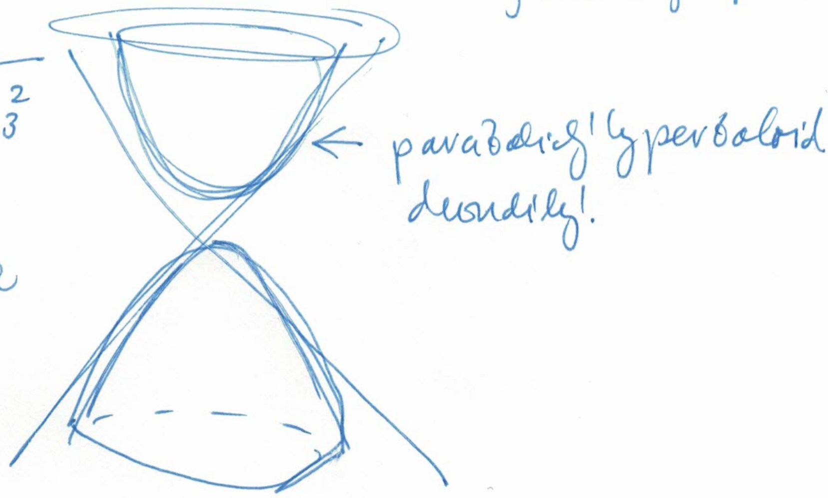
$$\left(\frac{a_0}{a_3}-1\right)\left(\frac{a_0}{a_3}+1\right)=\frac{c}{a_3}$$

$a_3\to\infty \quad a_0=\pm a_3$

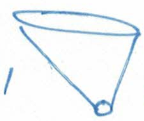
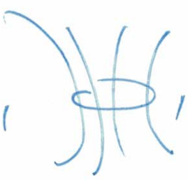
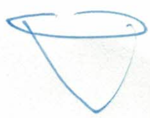


2.b $c<0$ $\quad a_0^2-a_3^2=c<0$

$$a_0=\pm\sqrt{c+a_3^2}$$



Opět ze spojitosti akce a spojitosti $SL(2,\mathbb{C})$ je orbita podmnožinou horního či dolního dílu parab. hyp.

Kandidáti na orbity jsou $\{0\}$ (orbita), , , , ,  6 typů; každý z  je param. $\mathbb{R}^+$. (Narozdíl od počátku, dopředného a zpětného kužele.)

Lze ukázat (např. polárním či „jemnějším" Iwasawovým KAN-rozkladem $SL(2,\mathbb{C})$), že se nerozpadají dále, ale že jde o skutečné orbity (bez důk., konstruuj boosty, rotace, transl. ...)

e) Izotropní podgr (užijeme j)

1. $\{0\}$ ... $P_0 = P$, $\quad P_0 \cap K \simeq \widetilde{O(1,3)_e} \simeq SL(2,\mathbb{C})$
$\subseteq \mathbb{R}^4 \simeq H(2)$

$\widehat{SL(2,\mathbb{C})}$ Bernstein, Gelfand, Bargmann.

2.  $\quad w=(1,0,0,1) \xrightarrow{j} \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} \quad A^\dagger\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$

(stabilizátor / izotr. podgr). T:.

$\begin{pmatrix}\bar a & \bar c\\ \bar b & \bar d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\bar a&\bar c\\ \bar b&\bar d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a&2b\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2|a|^2 & 2|a|b\\ 2a|b| & 2|b|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow b=0 \wedge |a|^2=1 \Longleftrightarrow a=e^{i\varphi}\ (\exists\varphi\in\mathbb{R}) \wedge b=0 \wedge c\in\mathbb{C}.$

$$\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & z\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\psi} & w\\ 0 & e^{-i\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i(\varphi+\psi)} & e^{i\varphi}w+ze^{-i\psi}\\ 0 & e^{-i(\varphi+\psi)}\end{pmatrix}.$$

Jde o $\simeq \widetilde{SO(2)} \ltimes_\tau \mathbb{R}^2$, kde $\tau(A)v = A^2 v$

$(e^{i\varphi}, z)\cdot(e^{i\psi}, w) := (e^{i(\varphi+\psi)}, z + e^{2i\varphi} w).$

Vynechávám (neumím rozumně rychle vymyslit). zkuste sami možná později

Ovšem $\widetilde{SO(2)} \simeq SO(2)$ $\quad e^{i\varphi} \mapsto e^{i\varphi/2}, \ \varphi\in[0,4\pi)$

$\widetilde{SO(2)} = \{e^{i\varphi} \mid \varphi\in[0,4\pi)\} \xrightarrow[2:1]{} SO(2) = \{e^{i\varphi} \mid \varphi\in[0,2\pi)\}$

$\| \leftarrow$ triv ($\{2,2\}=\{2\}$ něco na této úrovni, vesměs TEMNOŽ)

$SO(2)$

Máme tedy reprezentovat $SO(2)\ltimes\mathbb{R}^2$. Opět Mackey:

$\widetilde{SO(2)}\ltimes\mathbb{R}^2$ … orbity $\{0\}\subseteq\mathbb{R}^2 \wedge S^1_r \ (=\{(x,y) \mid x^2+y^2=r^2\})$, $r>0$. Stab $\{0\} \to \underbrace{SO(2)}_{K} \ltimes \underbrace{\mathbb{R}^2}_{H}$ / Průnik s $K=\widetilde{SO(2)}\simeq SO(2)$

je $SO(2)$. Stab $(1,r)\in S^1_r$ je $\{e\}\ltimes\mathbb{R}^2$. Průnik s $K=\widetilde{SO(2)}$ je

$\widehat{SO(2)} = \hat{S}^1 \simeq \mathbb{Z}$ Candy fuvál vec

$O_2=\{+1,-1\}=\mathbb{Z}_2=S_2$

$\Rightarrow$ Dvě repr

$2 = 1^2 + 1^2$

id perm

(Peter-Weyl)

3. $w=(-1,0,0,1)$

Stejně $\widetilde{SO(2)}\ltimes_\tau\mathbb{R}^2$.

4. Bod na jednodílném hyperboloidu $(c>0)$: $(1,0,0,0)$

$\mapsto \begin{pmatrix}c&0\\0&0\end{pmatrix}$: $A^\dagger\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^\dagger A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^\dagger A=E$

$\Longleftrightarrow A\in U(2)$ $(\det A = 1) \Longleftrightarrow A\in SU(2)$

$\widehat{SU(2)} = \mathbb{Z}$. Víme $\widehat{SU(2)} \supseteq \mathbb{Z}$ (káp. orepr. $SU(2)$).
Dle Peter-Weyl lze dokázat, že $\mathbb{Z} \cong \widehat{SU(2)}$, param. $\underline{k} \in \mathbb{Z}$.
(Lze dokázat i Cartanovou větou z Alg. teorie.
Víme tedy $\forall$. Ve fyzice nikoli k, ale $\frac{k}{2}$ je parametr.

5. Brána dvojdílného hyp. $(c<0)$.
$R=(0,0,1,0)$ $\quad A^+\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Trik. Spočti

$$A^T\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & ad-bc \\ bc-ad & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

(lze vzít jiný a pak se probírat izomorfizmy.)
, neboť $ad-bc=1$, tj. $A^T\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}A = A^+\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}A \Leftrightarrow$
$A^T = A^+$, tj. $A = \overline{A} \Rightarrow A \in SL(2,\mathbb{R})$. $\widehat{SL(2,\mathbb{R})}$ V. Bargmann,
$\hat{}$ K
S. Bernstein, I. Gelfand, Pukanszky, Piatetski-Shapiro,
G. Weiss, Harish-Chandra. Dobře známé, viz
i wikipedie.
SVELKOU REZERVOU, dejte na prof. Hořejšího.

Fyz. pozn.: Dogma (pythagorejci): Částice v ST-QM $\leftrightarrow$ třídy ired. unit. repr. P.
1. $\widehat{O(1,3)}$ — vakuum (Málib. spin... divná interpr.)
2. nehm. částice .... $\widehat{SO(2)} \cong \mathbb{Z}$
Pak ale znám poznámku: Repr. S^1 se ve fyzice nevyskytují.
3. Ditto.
4. $SU(2)$ hmotné částice se spinem $\widehat{SU(2)}$. Fyz. par. je $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots\}$
5. Tachyony (nevyskytují se v přírodě).