Symplektické spinory a symplektické Diracovy operátory

Svatopluk Krýsl

Matematicko-fyzikální fakulta UK

3. května 2017

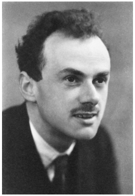
Obsah

Dirac, Atiyah a Singer

Paul Dirac (1902–1984), r. 1928

$$i\hbar(\gamma_0\frac{\partial\psi}{\partial t}+\gamma_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial\psi}{\partial y}+\gamma_3\frac{\partial\psi}{\partial z})=mc\psi$$

$\psi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{C}^4$; $\mathbb{C}^4$ - Diracovy spinory
$\psi=(\psi^0(t,x,y,z),\dots,\psi^3(t,x,y,z))$
$\gamma_i\in M(4,\mathbb{C})$
Operátor je hyperbolický



P. Dirac

Michael Atiyah (1929), **Isadore Singer** (1924)
Věta o indexu eliptických operátorů -
Fieldsova medaile pro M. Atiyaha 1966
Eukleidovský analog Diracova operátoru
Operátor je eliptický

M. Atiyah

I. Singer

Klasické spinory

$SO(p,q)$ speciální ortogonální grupa pro symetrickou bilineární formu Q signatury (p,q)

$\mathrm{Cliff}(p,q) = T(\mathbb{R}^{p+q})/\langle v \otimes v - Q(v,v)1 | v \in \mathbb{R}^{p+q}\rangle$ Cliffordova algebra, $Spin(p,q) \subseteq \mathrm{Cliff}(p,q)$

$\lambda : Spin(p,q) \to SO(p,q)$ zobrazení $2:1$ pomocí antiinvoluce γ (antiinvoluce na $\mathrm{Cliff}(p,q)$)

Spinorové prostory: reprezentace $\mathrm{Cliff}(p,q)$ na $\mathbb{C}^m =: \mathbb{S}$

Zúžení reprezentace na $Spin(p,q)$ není reprezentací $SO(p,q)$ - neexistuje $\rho' : SO(p,q) \to Lin(\mathbb{S},\mathbb{S})$, aby $\rho = \rho'\lambda$.

$$\begin{tikzcd} Spin(p,q) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\lambda"] & \mathrm{Lin}(\mathbb{S},\mathbb{S}) \\ SO(p,q) \arrow[ur, "\nexists\rho'"] & \end{tikzcd},$$

$p+q=4$ spinorový prostor izomorfní $\mathbb{S} \simeq \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^4$

Diracův operátor pomocí projekcí

$(\mathbb{R}^{p+q})^* \otimes \mathbb{S} \simeq \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$, kde $\mathbb{T}$ je reprezentace $Spin(p,q)$

$\psi : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{S}$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{S})$

Diracova rovnice $(\not{D}\psi)(m) = \pi_{10}(D\psi)(m)$, kde D je totální diferenciál a $\pi_{10} : (\mathbb{R}^{p+q})^* \otimes \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ je projekce

π_{10} zobecňuje násobení maticemi γ_i, $i = 0, \ldots, 3$

$\not{D}$ je invariantní vzhledem k spinorové reprezentaci

Dvojité nakrytí symplektické grupy

$\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ nedegenerovaná antisymetrická bilineární forma

$A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ lineární a $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$ pro $\forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}$; tvoří symplektickou grupu - $Sp(2n, \mathbb{R})$

$A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ - kanonické transformace

Dvojité nakrytí $\lambda : Mp(2n, \mathbb{R}) \to Sp(2n, \mathbb{R})$ - metaplektická grupa

Historie symplektických spinorů

1) D. Shale, I. E. Segal (1962) [Trans.AMS62]
2) A. Weil (1964) [Acta.Math.64]
3) B. Kostant (1974) – symplektické spinory jako fíbry nad symplektickými varietami [Kostant74]
4) K. Habermann (1995) – symplektické Diracovy operátory [Ann.Glob.Anal.95]

Symplektická spinorová reprezentace

$\sigma : Mp(2n, \mathbb{R}) \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$
$U(L^2(\mathbb{R}^n))$ unitární operátory na Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$
$\sigma(g) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in Mp(2n, \mathbb{R})$

Definována pomocí Schrödingerovy reprezentace Heisenbergovy grupy

$L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)_+ \oplus L^2(\mathbb{R}^n)_-$

Symplektický spinorový prostor: $S = S_+ \oplus S_-$

Další názvy: Shalova–Weilova, Segalova–Shalova–Weilova, oscilátorová, metaplektická

Symplektický Diracův operátor

Symplektická spinorová pole: zobrazení $\mathbb{R}^{2n}$ do symplektických spinorů $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to L^2(\mathbb{R}^n)$; $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, S)$

Totální diferenciál: $(D\psi)(m) = \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{d}x^i \otimes \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(m) \in (\mathbb{R}^{2n})^* \otimes S$

Věta (Krýsl [J.LieThy2012]): $(\mathbb{R}^{2n})^* \otimes S \simeq E^{10} \oplus E^{11}$, kde E^{ij} jsou neekvivalentní reprezentace $Mp(2n, \mathbb{R})$ a $E^{10} \simeq S$.

Definice symplektického Diracova operátoru:

$D^S : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, S) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, S)$
$(D^S\psi)(m) = \pi_{10}\left((D\psi)(m)\right)$, kde
$\pi_{10} : (\mathbb{R}^{2n})^* \otimes S \simeq E^{10} \oplus E^{11} \to E^{10}$ projekce a $m \in \mathbb{R}^{2n}$.

Možné definovat: Analogie twistorového operátoru

Symplektický Diracův operátor v souřadnicích

$\psi : \mathbb{R}^{2n} \to L^2(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \phi : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{C}$
$(x^1, \ldots, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $(q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{R}^n$
$\phi(x^1, \ldots, x^{2n}, q^1, \ldots, q^n) := \psi(x^1, \ldots, x^{2n})(q^1, \ldots, q^n)$

Pro symplektické spinorové pole $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to L^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$D^S \phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(i q^i \frac{\partial \phi}{\partial x^{n+i}} - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \right)$$

Ekvivalence definicí: teorie reprezentací
Pro $n = 1$ je $\psi(x^1, x^2) \in L^2(\mathbb{R}) = (a_0(x^1, x^2), a_1(x^1, x^2), \ldots) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x^1, x^2) h_i$, kde $(h_i)_{i=1}^{\infty}$ je úplný ortonormální systém $L^2(\mathbb{R})$, např. (normalizované) Hermitovy funkce, a $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(x^1, x^2)|^2 < \infty$

Symplektické variety

Definice:

Symplektická varieta je každá dvojice (M, ω), kde M je varieta a ω je uzavřená nedegenerovaná antisymetrická diferenciální 2-forma.

Příklady:

1) $M = \mathbb{R}^{2n}[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$ (fázový prostor)
2) N varieta; $M = T^*N$, $\omega = d\vartheta$, kde ϑ je tzv. Liouvilleova forma
3) $M = S^2$, $\omega = \sin(\theta) d\phi \wedge d\theta$ (forma objemu pro "kulatou metriku"), Riemannovy plochy

Fedosovovy konexe

Vektorová pole na M značme $\Gamma(TM)$

Definice:

Konexi $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \ni (X, Y) \mapsto \nabla_X Y \in \Gamma(TM)$ na symplektické varietě (M, ω) nazveme Fedosovovou konexí, pokud $\widetilde{\nabla}\omega = 0$ a $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\widetilde{\nabla}$ je rozšíření ∇ na tenzorová pole.

Tenzor křivosti $R^{\nabla}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$
I. Vaisman: $R^{\nabla} = Ric^{\nabla} + W^{\nabla}$ rozklad na symplektickou Ricciovu a Weylovu část

Symplektický Diracův operátor na varietách

B. Kostant: Každá symplektická varieta připouští fíbrace symplektickými spinory nebo jejich komplexifikacemi (tzv. symplektické spinorové fíbrace $\mathcal{S}$).

Fíbrace = bandly s vektorovými prostory $L^2(\mathbb{R}^n)$

∇ Fedosovova konexe $\Rightarrow \nabla^S$ kovariantní derivace na symplektických spinorových fíbracích (invariantní derivování na symplektických spinorových polích)

Symplektický Diracův operátor na varietě: $D^S\psi = \pi_{10}\nabla^S\psi$, $\psi : M \to \mathcal{S}$

Výsledky K. Habermannové

K. Habermann [HaberManuscr.]

Pro sféru S^2 se symplektickou formou $\omega = \sin(\theta) \mathrm{d}\,\phi \wedge \mathrm{d}\,\theta$ je prostor řešení symplektického Diracova operátoru izomorfní prostoru $S \simeq L^2(\mathbb{R})$.

Torus

- Pro triviální spinorovou fíbrace je prostor Ker D^S izomorfní S.
- Pro ostatní spinorové fíbrace je nulový.

Pro Riemannovy plochy rodu $g > 1$ všechna symplektická spinorová pole v jádru symplektického Diracova operátoru jsou nulové. (metoda: Weitzenböckovy formule)

Charakterizace řešení symplektické Diracovy rovnice

Věta: Nechť (M^{2n},ω) kompaktní symplektická varieta s Fedosovovou konexí ∇ a nechť $D^S : \mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{S}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{S})$ je symplektický spinorový operátor $D^S = \pi_{10}\nabla^S$. Pak $\mathrm{Ker}\, D^S$ je konečně generovaný a projektivní jako modul nad $K(L^2(\mathbb{R}^n))$.

(Krýsl [Geom.Phys2016].)

Zobecnění charaterizace na eliptické operátory

Věta:

Nechť M je kompaktní varieta, E, F jsou vektorové fíbrace nad M, jejichž vlákna jsou jak Hilbertovy prostory, tak konečně generované a projektivní moduly nad algebrou kompaktních operátorů $K(H)$ Hilbertova prostoru H. Nechť $D : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, F)$ je $K(H)$-invariantní eliptický operátor. Pak

1) $\mathcal{C}^\infty(M, E) = \operatorname{Im} D^* \oplus \operatorname{Ker} D$, speciálně $\operatorname{Im} D^*$ je uzavřený
2) $\operatorname{Ker} D$ je konečně generovaný a projektivní nad $K(H)$

(Krýsl [Geom.Phys2016])

Příklad M. Erata

Pro obecné fíbrace nekonečného ranku $\mathcal{C}^\infty(M, E) = \mathrm{Im}\, D^* \oplus \mathrm{Ker}\, D$ neplatí

Příklad – M. Erat [Math.Nachr.03]: Fíbrace E Hilbertovými prostory nad $M = S^2$ zadaná explicitními přechodovými funkcemi. $\mathrm{Im}\, D_1$ není uzavřený podprostor. (Kohomologie není Hausdorffova.)

[Math.Nachr.03] Erat, M., The cohomology of Banach space bundles over 1−convex manifolds is not always Hausdorff, Math. Nachrichten Vol. 248–249, (2003), Issue 1, 97–101.

[JDG94] Fedosov, B., A simple geometrical construction of deformation quantization, J. Differential Geom. Vol. 40 (1994), no. 2, 213–238.

[CMP79] Forger, M., Hess, H., Universal metaplectic structures and geometric quantization, Commun. Math. Phys. 67 (1979), 267–278.

[Friedrich] Friedrich, T., Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie. Mit einem Ausblick auf die Seiberg–Witten–Theorie. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1997.

[Ann.Glob.Anal.95] Habermann, K., The Dirac operator on symplectic spinors, Ann. Global Anal. Geom. 13 (1995), no. 2, 155–168.

[HaberManuscr.] Habermann, K., Harmonic symplectic spinors on Riemann surfaces, Manuscripta Math. Vol. 94 (1997), no. 4, 465–484.

[Habers] Habermann, K., Habermann, L., Introduction to symplectic Dirac operators, Lecture Notes in Mathematics 1887. Springer–Verlag, 2006.

[Kostant74] Kostant, B., Symplectic spinors. Symposia Mathematica, Vol. XIV (Convegno di Geometria Simplettica e Fisica Matematica, INDAM, Rome, 1973), 139–152, Academic Press, London, 1974.

[Monats.Math2010] Krýsl, S., Complex of twistor operators in spin symplectic geometry, Monatshefte für Mathematik, Vol. 161 (2010), no.4, 381–398.

[J.LieThy2012] Krýsl, S., Howe duality for the metaplectic group acting on symplectic spinor valued forms, Journal of Lie theory, Vol. 22 (2012), no. 4, 1049–1063.

[Geom.Phys2016] Krýsl, S., Elliptic complexes over C^*-algebras of compact operators, Journal of Geometry and Physics, Vol. 101 (2016), 27–37.

[Izv.Nauk79] Mishchenko, A., Fomenko, A., The index of elliptic operators over C^*-algebras (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), no. 4, 831–859, 967.

[Annal.Math32] Neumann, J. von, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 3, 587–642.

[Trans.AMS62] Shale, D., Linear symmetries of free boson fields, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 149–167.

[Math.Helv.61] Tondeur, P., Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast-symplektischer Struktur. Comment. Math. Helv. 36 (1961), 234–244.

[Monats.Math85] Vaisman, I., Symplectic curvature tensors, Monatshefte für Mathematik 100 (1985), 299–327.

[Acta.Math.64] Weil, A., Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964), 143–211.