

OBSAH

- Principy harmonické analýzy 1
1. Prolog a historie.
 2. Opakování vkl. pojmu z topologie a teorie měry
 3. Tychonovova věta a konstrukce Haarových měr
 4. Základy alcove reprezentaci topol. grup
 5. Základy Banachovych algeber a Gelfandovo zobrazení
 6. Pontryaginova dualita a (zobecněná) Poissonova sumacní formulace

Literatura

Deitmar, A.; Echterhoff, S.: Principles of harmonic analysis.

Dixmier, J.: C^* -algebras and their representations.

Segal, I.: The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. 61, 1947.

Principy harmonické analýzy

1.5

① PROLOG

(~Four. ≈ 1822)

1. Rovnice vedení tepla

$$\Delta u = \partial_t u, \quad u: I \times U \rightarrow \mathbb{C}, \quad I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

$$U \text{ otevřená} \cap \mathbb{R}^n, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

u je \mathcal{C}^2 v $U \times I$ a u je \mathcal{C}^1 v $I \times \partial U$... $u(t, x)$

Příklad: $\partial_x^2 u = \partial_t u$, tj. $\forall \mathbb{R}^1$, $t \in (0, \infty)$, $U = (0, 2\pi)$ pro jednoduchost.

Předpokládejme, že $u(t, x) = \sum a_n(t) e^{inx}$,

fj. "existenci Fourierovy řady" $\forall t \in (0, \infty)$ (v x).

Variace
Dirichlet-
Jordan
kriteria

- Existence $\partial_x^2 u$ abs. spojitě a $\partial_x^3 u \in L^2(0, 2\pi)$
 \Rightarrow stojoucí konvergence $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) (e^{inx})^{(k)}$
 $k = 0, 1, 2 \quad \& \quad \partial_x^k u(t, x)$.

[Pro $k=0$ dostaváme i existenci F. řady zmiňované výše. Existence F. řady "v L^2 " je snadné, ale věříme v ní i konvergenci derivací. (Ex. v L^2 může konvergenci řad v L^2 -normě.)]

Druhé pripomínky: Je-li $f \in L^2(a, a+\ell)$, $a \in \mathbb{R}$,

$$\ell > 0, \text{ pak } a_n = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+\ell} f(x) \frac{e^{-2\pi i nx}}{\ell} dx \text{ nazýváme Fourierovou řadou f,}$$

koeficientem f $\partial_x^a \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \frac{e^{-2\pi i nx}}{\ell}$ Fourierovou řadou f,

bez ohledu na to zda (řada) konverguje k f. (Proto sousloví, existence F. řady ... jsou různou věc.)

F. řady nemusí konvergovat pro "zádne" x (když k f :-))

Předpokládejme tedy, že petrovici u nemá teplo, že $t \in 2$
 $\partial_x^2 u$ abs. spojita a $\partial_x^2 u \in L^2(0, 2\pi)$. Počítejme

$$\partial_x^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial_x^2 a_n(t) e^{inx} = \boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 a_n(t) e^{inx}.}$$

stejn. konv. pro $k=2$
 záručná výs.

Předpokládejme stejnoměrnost konvergence $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx}$

pro $p=0, 1$ (tj. v t a n pro derivaci).

Můžeme počítat $\partial_t \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx} \right) =$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial_t a_n(t) e^{inx}.$$

Srovnání a dle jedn. Four.

řad ($\partial_x^2 u$ i $\partial_t u$ jsou L^2 , užíváme splňuje vše užem teplo)

je $-n^2 a_n(t) = \partial_t a_n(t)$, tj. ~~$a_n(t) + n^2 a_n(t) = 0$~~ .

Asociov. rovnice (charakteristická) je $\lambda + n^2 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda = -n^2$ a $a_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$, kde C_n je konstanta

vzáledelem k t. Máme výsledek

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Nevíme, ale že $u(t, x)$
 ZAŠÍVEJME SE JEN NA MĚNOU ∂_t a \sum .

"skutečné" řešení vše užem teplo (záručná výsledná ∂_t a \sum).

- "Pro pervé x stáří odhadnut $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq D_n(x)$
 můžeme mat, příp. závislost max, tak aby $\sum_{n \in \mathbb{Z}} D_n(x)$
 konvergovala (princip Weierstrassova krit. stejn. konver-

gence). Počítejme $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| = |C_n e^{-n^2 t}|.$

Nejmenší horší odhad je ~~je~~ nejmenší horší závora, tj.

supremum. Ale $\sup_{t \in (0, \infty)} |C_n e^{-nt}| = |C_n| \sup_{t \in (0, \infty)} e^{-nt} = |C_n|^{\frac{1}{n}}$

Nyní (pro použití Weierstrasse) je nutné aby $\sum |C_n|$ konvergovala. To je jiště postačující.

"Trikem" lze ale dosáhnout i víc možností (síří frédu) pro C_n . Zvolme $\delta > 0$.

Udělujeme $|C_n e^{-nt}| \text{ na } (\delta, \infty)$.

e^{-nt} klesá na $(0, \infty)$, tedy $|C_n e^{-nt}| \leq |C_n| e^{-n\delta}$.

Pokud $C_n = p(n)$, kde p je polynom

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n| e^{-n\delta} = \sum p(n) e^{-n\delta}$ konverguje, můžeme

$\forall p \exists n_0 \exists C \forall n \geq n_0 p(n) \leq C e^{n^2 \delta_1}, \boxed{\delta_1 < \delta}$

$|p(n) e^{-n\delta}| \leq C e^{n^2(\delta_1 - \delta)} \leq C e^{n(\delta_1 - \delta)}$

\uparrow k volejší konv. stejnoum (geom. řada). $\sum C_n e^{-nt} e^{nx}$ konv. stejnoum

$\text{na } (\delta, \infty) \quad \forall \delta > 0$: ~~Konverguje aedy stejnoum na~~

(~~což je~~ % Konečně) $\sum C_n e^{-nt} e^{nx}$ pro C_n poly

nový řest $(\Delta - \partial_t) u = 0$. zároveň $x + t_1 > 0$ ($t_1 \in (\frac{x_1}{2}, \infty)$)

"Realifikace" A_n, B_n polynomy r.m \Rightarrow za \tilde{C}_n vezm C_n

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-nt} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$

řest řešení řepla.) Otažka jednoznačnosti an za dodat. podm. $\partial_x^2 u, \partial_x^3 u$ nejasná... ~~v leto uvaže!~~

• Nejdoumne $\pi_1 \geq j$ jsou režili $\Delta u = 0$ u jedna parsn 4.

Tak je to na

jiných oblastech (kruhy, roviny, prstence, koule, sféry, valce). Především jak adaptovat konvergenční

kritéria ($\epsilon L^2, \partial^3 \in L^2$, Jord-Dir, stejnou, konv. atd.)

• Zde užíváme řešení: zahývali jsme se jen základnou $\sum a_{\alpha t}$, ale ONTOJE POSTAVUJI $\sum a_{\alpha t} e^{i \alpha t}$ pro A_n, B_n polynomy.

2. Rovnice vedení tepla podruhé

$$\text{Fourierova transformace: } (Ff)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i xy} dx$$

"Fourierova transformace

zaměňuje derivaci s násobením $2\pi i x$.

Nutno říct jak, kde. Proto Schwartzův prostor

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je } C^\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists \beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha f(x)| < \infty, \text{ kde } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$\partial_\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$$f(\partial_x^\alpha u) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ a } \partial_x^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ a } \partial_x^2 u + \partial_t u = 0$$

• Nechť $\partial_x^k u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\partial_t u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\partial_x^2 u + \partial_t u = 0$

$$k=0, 1, 2$$

Přirozeně stáčí $\partial_x^k u$ (z def. Schwartzova).

$$F(\partial_x^2 u - \partial_t u) = 0 \Rightarrow F \partial_x^2 u - F \partial_t u = 0 \Rightarrow$$

F linearní zobrazení

$$(2\pi i x)^2 F u - \partial_t F u = 0$$

\uparrow
zde
zur Leb.

$$(2\pi i x)^2 F u - \partial_t F u = 0 \quad (r(t, x) = (F u)(t, x)).$$

Označme $v = F u$ ($r(t, x) = (F u)(t, x)$).

+) Toto ukládáme ex post; r je speciální vztah pro der. vůči x .

F & der
+ der. Leb.
int. dle
parametru

$$-4\pi^2 x^2 v(t, x) - \frac{\partial_t}{t} v(t, x) = 0 \Rightarrow -4\pi^2 x^2 - \frac{1}{t} = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow \lambda = -4\pi^2 x^2 \text{ a } v(t, x) = C(x) e^{-\frac{4\pi^2 x^2}{\lambda} t}.$$

$$u(t, x) = \underset{x}{\mathcal{F}^{-1}}(C(x) e^{-\frac{4\pi^2 x^2}{\lambda} t}), \text{ Silně závisí na } C(x).$$

Vektorné vlnné rozloženie tepla na počiatku, $t \rightarrow 0^+$

(mystíme). Nechť $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u_0(x) \cdot T_j$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{F}^{-1}(C(x) e^{-\frac{4\pi^2 x^2}{\lambda} t}) = \mathcal{F}^{-1}(C(x)) = u_0(x) \Rightarrow$$

$$C(x) = \mathcal{F} u_0(x). \text{ Celkom } u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} u_0(x) e^{-\frac{4\pi^2 x^2}{\lambda} t}).$$

Celkom výsledok: $\exists, \exists! \text{ pre } \dots u_0 \in \mathcal{G}$.

To je trochu nevhodné ($\mathcal{G} \subseteq L^1$; farbu \mathcal{G} nesmí rušiť atď...)

3. Jeden z motivov

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} : f(x) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \text{ kde } c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \left| \begin{array}{l} f \in L^2(0, 2\pi) \\ \mathcal{Z} \end{array} \right.$$

$$b) (\mathcal{F} f)(y) = \int f(x) e^{-2\pi i xy} dx \text{ vede k podobnému celi.} \quad [\text{Proč?}]$$

$$a) \rightarrow f(x) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} e^{inx} \int f(x) e^{-inx} dx d\mu_{\text{disc}}$$

$$b) (\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int f(y) e^{+2\pi i xy} dy. \quad (\text{Proč? je techn. celkom obhývateľ.}) \quad \text{Celkom}$$

$$f(x) = \int_R \left(\int_R f(y) e^{2\pi i xy} dy \right) e^{-2\pi i xy} dy$$

na $\mathcal{G}(R)$ Podobné výzorce. Proč?

Tento uštk v tř. Pontrjaginova dualitu, 6

jež se snaží tento, řečněme, údív vysvetlit.

Vysvetlení je zajišťováno:

to bylo totiž
později (L_schwartz)

- Je nutné studovat (nejen $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$) různé $L^p(\mathbb{R}^n)$, ale i $L^p(G)$,
kde G je topologická grupa, stačí "lokálně" kompaktní (nebo jen Lieova :-))
- Definovat Fourierovu transformaci na onou $L^p(G)$.
- Zabývat se dualitou... třeba $F \circ F^{-1}$ ve fyzice také je (mřížky, dualní mřížky; prostor souřadnic, prostor hybnost).

Proč by to mělo jít? Proč je možné vybudovat teorii Fourierových transformací na $L^p(G)$ a spojit ji s teorií Fourierových rad? (kde?)? Neplatí-li řešit rečenou teoru na příslušných prostorech - zřejmě G .

Odpověď: V důkazech invertnosti $F \circ F^{-1}$ transf. invertujího $f \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy \right) \leftrightarrow x$, jež se od F liší jen transformací

mezi kterou $x \mapsto e^{2\pi i x}$ v identických s tř. konvoluci používáme jen $[x + (y+z) = (x+y) + z]$ & $[x + (-x) = 0]$ & x je jednoznačný \leftrightarrow grupové vlastnosti.

4. Další zobecnění

7

Teorie Banachovych algeber = asociačivich algeber A nad telisvks normovnla ižo metrickou involucí, především \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , eži $\bar{F}p$ (alg. uzávěry kon. teles), která je vybavena normou $\| \cdot \| : A \rightarrow \mathbb{k}$, že $\| ab \| \leq \| a \| \| b \| \quad \forall a, b \in A$ a $(A, \| \cdot \|)$ je Candyovský uplny. $\| a \| = |\lambda| \| a \|$
 $|\lambda|^2 = \bar{\lambda}\lambda$

Nebo teorie C^* -algeber (von Neumann, Gelfand).

~ ~ ~ \forall komutativní C^* -algebra je izomorfum
 $C_0(X)$, kde X je lok. komp. f. prostor a C_0 prostor spojibhch funkci klesajicich v nekonečnu. $X \exists!$ až na hom.

- podobnost s alg. geometrií (souřadnicový okruh varietu \leadsto varieta)
- podobně vznik nekom. geometrie
(C_0 pro A je nekom. C^* -algebra ?)

\Rightarrow Teorie reprezentací lokač. komp. grup, především Lieovyh (prekursor větva Petera-Weyla)

~ ~ ~ Harmonická analýza na homogenních prostorech

$$F(e^{-\pi x^2})(\xi) = \int e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int e^{-\pi x^2 - 2\pi i x \xi} dx = ?$$

$\xi > 0$ Cauchy \mathbb{R}

$$0 = \oint_C e^{-\pi z^2 - 2\pi i z \xi} dz = \oint_{C_R} e^{-\pi(z^2 + 2\pi i z \xi - \xi^2)} e^{-\pi \xi^2} dz = \oint_{C_R} e^{-\pi(z+i\xi)^2 - \pi \xi^2} dz$$

$C_R: z_1 = t - i\xi, t \in [-R, R]$

$$z_2 = R + it, t \in [-\xi, 0]$$

$$z_3 = t, t \in [-\xi, \xi]$$

$$\boxed{z_4 = -R + it, t \in [-\xi, 0]}$$

$$= e^{-\pi \xi^2} \left[\underbrace{\int_{-R}^R e^{-\pi t^2} dt}_{I_1} + i \underbrace{\int_{-\xi}^0 e^{-\pi(t+i\xi)^2} dt}_{I_2} - \underbrace{\int_{-\xi}^0 e^{-\pi(t+i\xi)^2} dt}_{I_3} - i \underbrace{\int_{-\xi}^0 e^{-\pi(-R+i t+i\xi)^2} dt}_{I_4} \right]$$

$R \rightarrow \infty:$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \rightarrow \text{Laplace integral} = e^{-\pi \xi^2} \left| \frac{\text{subst}}{\text{Fubini}} \right|$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^0 e^{-\pi R^2} e^{2R i(t+\xi)} e^{-(t+\xi)^2} dt = \int_{-\xi}^0 0 = 0$$

pp: majorant $\left| e^{-\pi R^2} e^{2R i(t+\xi)} e^{-(t+\xi)^2} \right| =$

$$= \left| e^{-\pi R^2} e^{-(t+\xi)^2} \right| \leq e^{-\pi R^2} \text{ integrab.}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_3 = \int_{-\infty}^0 e^{-\pi t^2 - 2\pi i \xi t + \pi \xi^2} dt = e^{\pi \xi^2} F(e^{-\pi x^2})(\xi)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^0 e^{-\pi(-R+it+i\xi)^2} dt = \int_{-\xi}^0 0 dt = 0$$

pp: majorant $e^{-\pi R^2} e^{\pi \xi^2}$

$$0 = -e^{-\pi \xi^2} + e^{\pi \xi^2} e^{\pi \xi^2} F(e^{-\pi x^2})(\xi)$$

$$c^{-\pi \xi^2} = F(e^{-\pi x^2})(\xi)$$

$$h_0(x) = e^{-\pi x^2} \quad F(h_0) = h_0$$

$$\begin{cases} h_n \\ F(h_n) = h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\text{Wiener}) \\ F^4 = \text{Id} \end{cases}$$

2. Opakování pojmu z topologie a teorie měry

1

Pozopakování měkl. pojmu z topologie a teorie měry
 se budeme věnovat příkladem Haarových měr.
 Podstatným pojmem je lokální kompatibilita.

Topologický prostor na X :

$$1) X \neq \emptyset$$

2) topologie na X = podmnožina potenciálních množin
 $\tau_X \subseteq 2^X$ splňující

$$a) \emptyset, X \in \tau_X$$

b) I množina, $(A_i)_{i \in I}$ systém množin indexovaný I . $\forall i \in I (A_i \in \tau_X) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_X$

$$c) A, B \in \tau_X \Rightarrow A \cap B \in \tau_X$$

Pozn.: Systém množin je zobrazen
 S jednotkou jež jen přes obraz (takto zobrazen)

$I = \mathbb{N}$ (A_1, A_2, \dots) je zobrazen. $a : I \rightarrow \tau_X$

Nesprávný \underline{a} , ale $\text{Rng}(a)$.

Právě τ_X ještě otevřené. Uvažujme $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$
 kde $U_i \in \tau_X$. (Otevřená množina je uzavřená. Uzávěrečná
 nejsou otevřené, $\tau_X \subseteq 2^X$.)

Def: Topologická grupa = Hausdorffov top. prostor G , že: $G \times G \rightarrow G$,
 $-^1: G \rightarrow G$, $e \in G$ definiují strukturu
 grupy a \cdot a $-^1$ spojité.

Pozn.: Na $G \times G$ součinná topologie.

Pozn.: $-^1: G \rightarrow G$ je homeomorfizmus, neboť $-^1$ je spojite
 a involution ($f^2 = \text{Id}$).

- Pr.: 1) Každá grupa s diskretní topologií!
 2) Každá grupa s aspoň dvojma průkya trivialej top. neu!
- 3) Grupa $U(1) \subseteq \mathbb{C}$, $U(1) = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$ abelovská!
- 4) Každá podgrupa $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ inverti-} \text{bilní}\}$; 3) a 4) s top. induk. podmnožinou (prod. top.)
- 5) $(\mathbb{R}, +, 0)$ s Euklidovou normou. Obecněji $(\mathbb{R}^n, +, 0)$.
- 6) $(\mathbb{Z}, +, 0)$ s Euklidovou normou; totéž co diskretní!
- 7) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s Euklid; $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s diskretní; $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$ diskretní; $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ Euklid; $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ diskretní; $(\mathbb{R}, +, 0)$ Euklid.
- 8) \mathbb{G} někonečna s kofinitní topologií neu!

Připomínka:

Def: $x \in X$, X top. prostor. $V \subseteq X$ se nazývá okolí x , pokud
 $x \in V$ & $\exists U$ otevřená, že $x \in U$ a $U \subseteq V$.

Pozn.: Tj. každá nadmnožina otevřené množiny V obsahuje

$x \in V \rightarrow x \in U$, je okolí x . (Spec. Otevřený obsahuje x jsm okolí.)
 • Okolí nějakého otevřeného: $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ okolí 0 ; $[0, 1]$ nejsou. O

Def: X se nazývá lokalně komp. top. prostor, pokud $\forall x \in X$
 existuje okolí, jehož uzávěr je kompaktní.

Pozn.: Pokud každý bod x je obsazen v otevřené množině,
 je již uzávěr je kompaktní, pak je pisl. prostor
 lokalně kompaktní. (To je ~~ne~~ totéž...)

Popu.: \times kompaktní, pokud \forall otevřené pokrytí $(U_i)_{i \in I}$ má kou. podpokrytí. Tj. $\exists J \subseteq I : \#J < \infty$, že $\bigcup_{j \in J} U_j = X$.

$$\neg X, \bigcup_{i \in I} U_i = X \quad \& \quad \exists J \subseteq I : \#J < \infty, \text{že } \bigcup_{j \in J} U_j = X.$$

- Pr.:
- 1) Kazdý kompaktní je lokálně kompaktní, $\forall V = X$
 - 2) X s diskrétní topologií je lok. kompaktní : singleton
je otevřený i uzavřený.
 - 3) X s trivální topologií je lok. komp., dále kompaktní
 - 4) V -TVS a $\dim V = \infty$ není lok. komp. (je zuámo)
 - 5) \mathbb{R}^n -TVS je lok. kompaktní.

Pr.: $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s diskr. je lok. komp., ale $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s indukovanou topologií je otevřená v \mathbb{Q} až \mathbb{Q} s indukovanou topologií je otevřená v \mathbb{R} .
 → \mathbb{R} není lokálně kompaktní (prostřednictvím \mathbb{Q} s indukovanou topologií).
 D.k. Vzmi $x_0 = 0$ a komp. okolí V bodu x_0 .
 mnoho irac. y_0 → $y_0 \in V$ → $y_0 \in U$.
 ~~$y_0 \in U$~~ → $y_0 \in U \cap \mathbb{Q}$ → $y_0 \in U$ → $y_0 \in V$.
 Vzmi iracionální $y_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Existuje $q \in \mathbb{Q}$ tak, že $|y_0 - q| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 $q \in U$ → $y_0 \in U$.

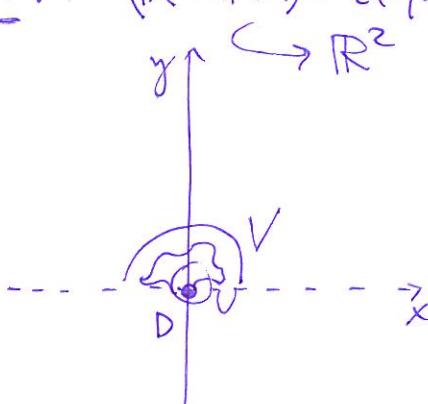
$$\text{Uvažme: } \mathbb{Q} \ni a_n = \frac{\lfloor 10^n y_0 \rfloor}{10^n} \rightarrow y_0 \in \mathbb{R} \text{ a } a_n \in U.$$

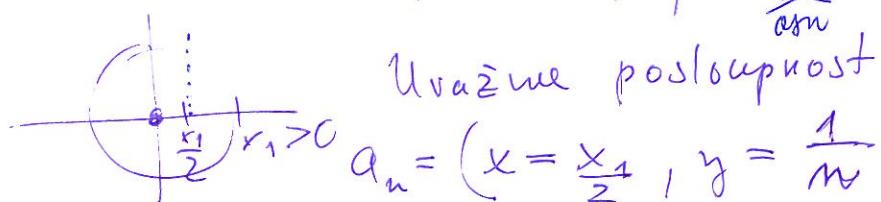
pro dost velká n . $(a_n)_{n \geq n_0}$ je cauchyovská

$\Rightarrow a_n \rightarrow a$, tedy $a \in V$, ale nekonverguje ve V .

Tj. V není kompaktní!

$[V \subseteq \mathbb{Q}]$

- Pr.: $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cup \{(0,0)\}$ nem' lok. kompaktní, nebat' nula

 nemá prisl. okolí. Pro spor (\exists)
- Nechť V je okolí $(0,0)$ - obsahuje sedlo f otevřenou U , že $(0,0) \in U$. Chceme najít posloupnost ve V , jež je Cauchyovská, ale "vykonverguje" (nekonverguje ve V)
 - $U = \bigcup_n U_n \cap M$, U otevřená v \mathbb{R}^2 a U obsahuje $(0,0)$ $\xrightarrow{\text{fornir } \mathbb{R}^n}$ U obsahuje kruh D s centrem $(0,0)$. Nechť D parabolický v bodě $x_1, y_1 > 0$.



$$a_n = \left(x = \frac{x_1}{2}, y = \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}.$$

Od jistého čísla j je a_n v D , t.j. je $U \subseteq V$.

$$\text{Zjednou\v{e}} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \left(\frac{x_1}{2}, 0 \right) \notin V$$

$\therefore (a_n)_{n \geq n_0}$ Cauchyovská - zřejmě $|a_n - a_m| = \frac{m-n}{nm}$
 Limita nemá ve $V \Rightarrow V$ nem' koupl.

Zde o: Siedmouček lok. kompaktních A_1, A_2 v lok. koupl.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$: nemá být lok. koupl., protože je uvažováno v topologii indukované $\neq M$.
 [Disj. sjednocení je jiný problém.]

Thm.: Naivní Cauchyovské mohou nict konvergencí v \mathbb{R}^2 .

Toto stačí. [Konv. \Rightarrow Cauchyovská]

Y.

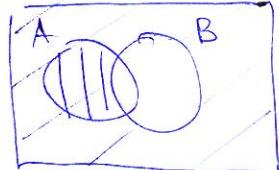
(2) NEZBYTNOSTI Z MÍRY

(5)

- Def: σ -algebra na $X \neq \emptyset \equiv \sum \subseteq 2^X$ taková, že
2. $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \sum \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sum$
 3. $A \in \sum \Rightarrow X \setminus A \in \sum$

1. $\emptyset \in \sum$ nebo ekv. i empty set in Sigma

- Příklad: 1) $\sum \neq \emptyset: \emptyset \text{ a } X \in \sum$.



$$2) \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)}_{\in \sum} \in \sum$$

$$3) A, B \in \sum \Rightarrow A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \sum$$

$$(4) A \cup B = A \setminus B \cup A \cap B \cup B \setminus A \quad \sum$$

5) Prvky Sigma se nazývají
meritelné (Sigma-meritelné).

Míra a topologie

X topol. prostor a $T_X \subseteq 2^X$ topologie na X .

Borelova σ -algebra (na (X, T_X)) = σ -algebra \sum na X
obsahující T_X a nejménší taková.

Při pomeření nejmenší: $\forall \sum$ σ -algebra na X obsahující
 $T_X \quad j \in \sum \geq \sum$.

((Minimalní := neexistuje menší))

Existence Borelovy σ -algebry

$A_{T_X} := \{ \sum | \sum \text{ je } \sigma\text{-algebra obsahující } T_X \}$ (klasický)

tak; $2^X \in A_{T_X} \Rightarrow A_{T_X} \neq \emptyset$. obsahující T_X

$\sum_0 := \bigcap A_{T_X} \rightarrow$ a) \sum_0 je σ -algebra
b) je nejménší ($\forall \sum: \exists \sum' \nsubseteq \sum_0 \Rightarrow \sum' \neq \sum_0$)

$\bigcap A_{T_X} \subseteq \sum_0 \cap \sum' \subseteq \sum_0$ - $\sum_0 \subseteq \sum'$

Ukázka

Nejmenší je jediný $\left(\begin{array}{l} \sum_0^1 \subseteq \sum_0^2 \\ \sum_0^2 \subseteq \sum_0^1 \end{array} \right)$ slabě antisymmetrie $\sum_0^1 = \sum_0^2$

Oznacení: Pokud $X \neq \emptyset$ a Σ je σ -algebra na X , nazveme (X, Σ) měřitelný prostor. (6)

Def: $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ nazveme měr. měru na měr. prostoru (X, Σ) , pokud

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ $\forall (A_i)_{i=1}^{\infty}$
 $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (σ -aditivita
na disj. systému)

take elementarní

Pozn.: 1) g schodovitá, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. $\int g d\mu := \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i)$
 $g = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}$ \times
 $i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset, A_1, \dots, A_m \in \Sigma$

2) $\int f d\mu := \sup \left\{ \int g d\mu \mid g \leq f, g \text{ schodovitá } g \geq 0 \right\}$
 \times

std. posloup. je definovat

• Nechť $f = f_+ - f_-$, pak $\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$, kde

$$f_+(x) := \max \{f(x), 0\} \geq 0$$

$f_-(x) := -\min \{f(x), 0\} \geq 0$, pakud prava strana

ma smysl v rámci arithmetiky na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$L^1(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \int f d\mu < +\infty\}, L^1(X) \cong$
 $f \cong g \Leftrightarrow f - g = 0 \text{ s.v.} \Leftrightarrow \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$

Pozn.: $(L^1(X), \| \cdot \|)$, kde $\|f\| = \int |f| d\mu$, je Banachov

$\forall (X, \Sigma)$ měřitelný prostor a měru μ na něm.

(Nejprve "topologizace".)

Pr.: 1) $X \neq \emptyset$, $\Sigma \subseteq 2^X$, $\mu(A) = \begin{cases} \text{míra měřitelná} & A \in \Sigma \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$

číbovalna
σ-algebra na X

2) $X = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \{A \subseteq X \mid A \text{ je lebesgueovský měřitelný}\}$. Σ je ^(?) Borelovský pro topologii indukovanou Eukleidovou normou na \mathbb{R}^n .

Známe: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená $\Rightarrow U$ je lebesgueovský měřitelný.

Terminologie: (X, Σ) měřitelný prostor a μ míra na něm
(konvence) Pak (X, Σ, μ) nazíváme prostor s měrou.
Pakud X topologický prostor a Σ je Borelovská, pak nazíváme Borelovou měrou.

Def: $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ budoucí na X . μ má být lokálně konečná $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U \in \mathcal{T}_x$, že $\mu(U) < \infty$.

Pozn.: $\mathcal{T}_x \subseteq \Sigma$, def. má smysl.

Pr.: 1) Lebesgueova míra je lok. konečná!
2) $X = \mathbb{R}$, top. dana Eukleidovou normou,

Σ Borelovská a μ počítací. Pro $x=0$ má existovat otevřená U (nejen měřitelná!).

$\Rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ pro všechny ε .

Pak vypadá $\mu(U) = \mu(-\varepsilon, \varepsilon) + \mu(U \setminus (-\varepsilon, \varepsilon))$

$$\geq \mu(-\varepsilon, \varepsilon) = \infty.$$

Počítací na \mathbb{R} není lok. konečná!

Definice: Borelova měřitelnost. 8
 if 1) $\mu(A) = \sup\{\mu(K)\} \forall A \text{ měřitelnou}$
 $K \subseteq A$ [měřitelnost, reg.]
 & 2) $\mu(U) = \inf\{\mu(K) \mid A \supseteq K \text{ cpt.}\}$
 3) $\mu(K) < \infty \forall K \text{ cpt.}$

Pozn.: 1) Lebesgueova na \mathbb{R}^m je Radonova
 2) $X = \mathbb{R}$, s kóspoc. měřov. Co je to kospočetná
 měra? Nechť $\emptyset \neq X$ je množina.

Cílem a) Kospočetná topologie: $\phi \in \mathcal{T}_X$ a pro $\phi \neq A \subseteq X$
 je $A \in \mathcal{T}_X$ iff $X \setminus A$ je spočetná.
 (Kofinální je podmína kospočetné!)

Proč je to topologie? 1) $\phi \in \mathcal{T}_X$. 2) $A, B \in \mathcal{T}_X \Rightarrow$
 $\Rightarrow X \setminus A \wedge X \setminus B$ spočetné $X \setminus (A \cap B) =$
 $= (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ spoč. 3) $(A_i)_{i \in I}$ lib. systém
 a) $\mathcal{T}_X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ spočetná $\forall i \in I$

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i), \text{ (de Morgan)}$$

Průnik spočetných je spočetný, tj. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_X$.

PODROBNE

VIZ DODATKY

(A) (B) (C)

b) Kezmemme Borelovu σ -algebru pro kospoč. topologii na X . Spec. každá měra se spoč. doplňkem je měřitelná.

Polož $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ spočetná} \\ 1 & jinak. \end{cases}$

Kospoč. měra. (Neužívají i řeší to měra.)
 dlekonce

Ad příklad: $X = \mathbb{R}$ Vezmme $A := \mathbb{Q}$ měřitelná a $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

Uvažme \mathbb{R} s kospoč. topologií a kospoč. měřov.

$\cup \supseteq \mathbb{Q}$ budou otevřená, tj. $\mathbb{R} \setminus U$ je spočetná \Rightarrow (9)

$\Rightarrow U$ je neospočetná \Rightarrow

$\rightarrow \mu(U) = 1$, Je tedy $\inf_{U \supseteq \mathbb{Q}} \mu(U) = \inf_{\text{ot.}} \{\dots\} = 1$

$$m(\mathbb{Q}) = 0$$

Záver:

\mathbb{R} s kospočetnou měrou tedy není Radonova.

Definice: Nechť G je topologická grupa a μ je Borelova měra na ní. Tuto nazveme Haarovou, pokud je Radonova, neulova a $\forall g \in G \quad \forall U$: otevřenou v G je $\mu(gU) = \mu(U)$, kde $gU = \{gu \mid u \in U\}$.

nekdy pro kazdou U meritelnou

Pozn.: Analogicky pro pravou Haarovu. pro lok. komp. Hausd. stejne

Cílem je konstrukce Haarovy měry pro lokační kompaktní grupy.

[S. 10 neužit]

Co slabá vnitřní regularita? protipříklad?

Pozn.: Príklad neospočetné měry se

"opírá" X triv. spoč. hriv
" " X mspoc. \rightarrow A spoč. D
 \rightarrow A mspoc (ALE)

\Leftrightarrow A je kospoč.

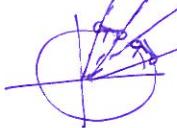
spoč. je negace kospočetnosti
zde!

Lze ale i snadne, viz krodička.

Cílem:

1. $U(1) := \{ e^{2\pi i \varphi} \mid \varphi \in [0, 1] \} \subseteq \mathbb{R}^2$ s indukovanou topologií.

Násobení a inverze v $U(1) \subseteq \mathbb{C}^\times (= \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Dokážte, že $U(1)$ je top. grupa

a) $U(1)$ je Hausd. neboť \mathbb{R}^2 je Hausd. a top. $U(1)$ je indukována inkzesi $U(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\cos 2\pi \varphi + i \sin 2\pi \varphi \mapsto (\cos 2\pi \varphi, \sin 2\pi \varphi)$). 

b) $U(1) = \{ e^{2\pi i \varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R} \}$

$\cdot : (z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$ je spojite!

c) $^{-1} : z = e^{2\pi i \varphi} \mapsto e^{-2\pi i \varphi} \quad \varphi \mapsto -\varphi$ spoj. a $\exp : x \mapsto e^x$

j je spoj.

2. $GL(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ je regulární} \} \subseteq M(n, \mathbb{C})$ top.,

Nás. a inverze matic je topologická grupa

a) $M(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2n}$ Hausd; $GL(n, \mathbb{C})$ s induk. je Hausd.

b) $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$ polynom

c) $(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$ ← A s výjimkou j-ky má n řádků a s-výjimkou sl.

prodl' polynomu

3. $(\mathbb{Q}_+^\times, \cdot, 1)$ je topologická grupa pro diskrétní a eukleidovskou topologii

a) Hausd. mřejma' v oboru

b) \mathbb{Q}^+ má diskrétní → $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ má diskrétní ⇒
 uvažujeme spojité. Spojitost je inverze z diskr. \mathbb{Q}^+ .
 Ad $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ diskrétní. Bud $U \subseteq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ otevřená.
 Chtěme U je otevřená! $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} = \bigcup_{(x,y) \in U} \{(x,y)\}$.

Stačí $\{(x,y)\}$ je otevřená, ale jde o $p_1^{-1}(x) \cap p_2^{-1}(y)$,
 kde $p_i : (\mathbb{Q}^+)^2 \rightarrow \mathbb{Q}^+$ jsou projekce na příslušné
 faktory součinu $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$. $\{x\}, \{y\} \subseteq \mathbb{Q}^+$ otevřené
 $p_1^{-1}(\{x\}) \cap p_2^{-1}(\{y\})$ otevřené (p_i spojité při součino-
 vě topologii). Průnik otevřený, tj. jsme hledali.
 Předpokládáme ale, že součinná topologie existuje.
 (Min. top. „obsahující“ $\{\bar{p}_i^{-1}(U_i) | U_i \text{ otevřené } X_i, p_i : X_i \rightarrow X_i, i \in I\}$, pak vezmeme prů-
 niky.)

c) Spojitost uvažíme pro $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{R}$. Plyne ze spojitosti
 uvažíme pro \mathbb{R} (vezměme průniky přísluš-
 ných intervalů z $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^+$).

4. Necht X je množina. Uvažujeme ~~s topologií kofinitem~~, tj. U otevřena ⇔ $X \setminus U$ je konečná nebo
 $U = \emptyset$. Doháleme, že kofinitem topologie je „skutečně“ topologie.
 Ukažte, že X s touto topologií není Hausdorffov, pokud X má nekonečný počet prvků.
 Snažme se sám prokázat.

- a) $A, B \in \mathcal{T}_X \Rightarrow X \setminus A$ konečná, $X \setminus B$ konečná
- b) $X \setminus (A \cup B) = X \setminus A \cup X \setminus B$ konečná
- c) $\bigcap_{i \in I} X \setminus A_i = \bigcap_{i \in I} \overline{X \setminus A_i}$ konečná.
- d) $\# X \geq \infty \quad x+y$ oba $\neq X$. Tj. $\exists U_x \ni x \quad \exists U_y \ni y$
- $$U_x, U_y \in \mathcal{T}_X \wedge U_x \cap U_y = \emptyset$$
- $$\# X \setminus U_x < \infty \wedge \# X \setminus U_y < \infty$$
- $$X = X \setminus (U_x \cap U_y) = \underbrace{(X \setminus U_x)}_{\# \downarrow < \infty} \cap \underbrace{(X \setminus U_y)}_{\# \downarrow < \infty} \Rightarrow \# X \geq \infty$$

$\# X \geq \infty$.

5. p-adická grupa \mathbb{Q}_p

Uvažme na \mathbb{Q} pro každé prvočíslo p funkci

$| \cdot |_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ def. $|\frac{a}{b} p^n|_p = p^{-m}$, kde $p \nmid a \wedge p \nmid b$
 $a, b \in \mathbb{N}$ a $|0|_p = 0$. (Mohu požadovat i $(a, b) = 1$)

Tvrzení: $|\cdot|_p$ je výlučce na \mathbb{Q} , tj.

$$1) |a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p \quad 2) |ab|_p = |a|_p |b|_p \quad 3) |a|_p = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Dk.: 1) Počítáme } \left| \frac{a_1}{b_1} p^m + \frac{a_2}{b_2} p^m \right|_p = \left| \frac{a_1 b_2 p^m + a_2 b_1 p^m}{b_1 b_2} \right|_p = \\ = \left| \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 p^{m-n}}{b_1 b_2} p^m \right|_p = p^{-n} = |a|_p \leq |a|_p + |b|_p \text{ (z už. 1))} \\ \therefore \text{ a) ncm } \left| \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 p^{m-n}}{p \times b_1 b_2} p^m \right|_p = p^{-n} = 1 \text{ je pravé.}$$

By mohlo muset dělit $a_1 b_2, b_1, a_2, b_2$, ale ani jedno dle předpokladu nedělí!

b) Pokud $m=n$, pak $\left| \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} p^n \right|_p$ musí mít rovnat 14

Jinak: Nechť $p \nmid a_1 b_2 + a_2 b_1$, tj. $a_1 b_2 + a_2 b_1 = kp^\alpha$

α nejdeš jinoučkou. Pak $\left| \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} p^n \right|_p = p^{-(n+\alpha)}$.

Ovšem $|a|_p = p^{-n}$. Celku $|a+b|_p \leq |a|_p$,

tj. $|a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p$

c) $a=0 \vee b=0$ trivialn.

$$2) \left| \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} p^{+n+m} \right|_p = p^{-m-n} = |a|_p |b|_p \checkmark$$

$$3) |x|_p = p^{-n} = 0 \text{ iff } x = 0 \checkmark$$

Absolutbetrag
↑

Def: Teleso K s valuací $| \cdot |_p$ (velky abs. hodnoty)

služí archimedovské pakud:

$\forall x \in K \setminus \{0\} \forall y \in K : |x| \leq |y| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
 $|nx| > |y|$. Jinak služí nearchedovské.
 $|nx| > |y| \Leftrightarrow$ s normou $| \cdot |$ \leftarrow klas. abs. hodnotou

Prv: $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ jsou archimedovská.

Dk. d-cv:

Prv: Dokaže, že $(\mathbb{Q}, | \cdot |_p)$ není archimedovské.

$$|nx| = |\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-krát}}| \leq \max \{ |(n-1)x|, |x| \} = \dots = \max \{ |x| \}$$

$$= |x|. \quad \exists x \in K \setminus \{0\}, x \neq 1, y = 1 \quad |ny| = 1 \neq |y| = 1.$$

$|x+y| > 1$. Použili jsme $|nx|$
jež je mydokárem. $N(x+y) \leq \max \{ N(x), N(y) \}$,
 $N = | \cdot |_p$.

Košpočetná topologie a miera

Dôsledok A, B, C.

(A)

$$1. X \neq \emptyset, \mathcal{T}_X = \{ U \subseteq X \mid U = \emptyset \text{ alebo } \underline{X \setminus U \text{ spocetné}} \}$$

$$\text{a) } X \text{ spoc.} \Rightarrow \mathcal{T}_X = 2^X$$

b) \mathcal{T}_X je topol.: de Morgan (ubážte podrobne)

"Tezistí je \downarrow súad": $A, B \in \mathcal{T}_X$. Pak $X \setminus A \cap B = X \setminus A \cup X \setminus B$. $A \cup B$ pravda! $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}_X$
 $A \cap B$ nepravda! $\Rightarrow X \setminus A \cap X \setminus B$ spocetné.
 Sjednocený spoc. je spocetný. \square

obecne "poznamka"
 \downarrow

2. Bud' B Borelova pro lib. top. \mathcal{T}_X . Pak B je minimálna!
 σ -alg. obsahujúci \mathcal{T}_X . Pkud B' je minimálne obsahujúci \mathcal{T}_X , je Borelova. T_j -Borelova \equiv minimálne obsahujúci \mathcal{T}_X

Dk.: a) B je nejedná $\Rightarrow B$ je minimálne (triv.)
 b) Nech B' je minimálne. Ciekoje Borelova, tj. nejedná.

Prosor: $\exists B'' \ B'' \neq B' \Rightarrow B'' \neq B \Rightarrow B'' \cap B \neq B', \text{ tj.}$

B' nemá min. \forall : Čeliak B' je Borelova. $\star \neq \emptyset$

Poznámka: $B'' \cap B$ je σ -alg. (obsahujúci \mathcal{T}_X). Prváik
 σ -alg. je σ -alg. (súadne). \square

[Prváik
 σ -alg. je
 σ -alg.]

• Bod 2 umožňuje Borelom (σ -algbra definovať ekr. jadro
 minimálne σ -algbra obsahujúci \mathcal{T}_X). $\supseteq \mathcal{T}_X$

3. $\Sigma_X := \{ A \subseteq X \mid A \text{ spocetné v Akospetná} \} \neq \text{Bor}, \sigma\text{-alge-}$
 $\text{bra} \text{ pri košpet. topologii na } X$.

Dk.: Oper súadné: $\phi(X) \in \Sigma_X$. Rozdiel súadné: i) A spoc.

ii) Akospet $A = X \setminus (X \setminus A)$. Sjednocený súad $\neq \Sigma_X$.

i) $A_i \in \Sigma_X$ i) A_i Vspocetné. Pak $\bigcup_{i \in I} A_i$ spoc. $\forall i \in I$

súad:

ii) $\exists j, A_j$ košpetné. $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \setminus X \Rightarrow X \setminus A_j \supseteq$
 $\supseteq \bigcup_{i \in I} A_i \setminus X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \setminus X \in \Sigma_X$

$\supseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow$

tj. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma_X$.

Dále: Σ_x je minimální! Sporem. Nechť $\exists \Sigma' \neq \Sigma_x$. ~~je doloženo~~

metr.: Σ' vznikla vynutím, spolehlivě užitočné početné, možnou

možnost možnost $\in \Sigma_x$. $= \Sigma_x \quad \Sigma'$

Opet: a) X spoč. $\Rightarrow T_x = 2^X$. Jelikož Borelova alg. ~~jednotlivé~~ $X \Rightarrow 2^X$
~~• tak $2^{\Sigma'} \supseteq 2^X \Rightarrow \Sigma'$ neobsahuje T_x~~

b) X nespoč. i) $\exists \Sigma_x$ výjimky kospoč. $A_0, \text{fj. } X \setminus A_0$ spoč.

$\Rightarrow A_0 \in T_x \Rightarrow$ použití algebra Σ' neobsahuje T_x , f)
neužití Borelova proručovanou T_x

ii) $\exists \Sigma_x$ výjimky spoč. A_0 . "Zkoumání" $X \setminus A_0$. $X \setminus (X \setminus A_0) = A_0$,

fj. $X \setminus A_0$ kospoč. $\Rightarrow X \setminus A_0 \in T_x \Rightarrow X \setminus A_0$ může být

příkl. Borelova patřit $\Rightarrow X \setminus (X \setminus A_0)$ také. Ale $X \setminus (X \setminus A_0)$
def. t-alg.

$= A_0$ jsem využal Σ' .

Def: Σ_x budou Borelova pro kospoč. topologii na $X \neq \emptyset$.

+ tvrdíme Pak $\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ kospoč.} \\ 1 & A \text{ nekospoč.} \end{cases}$ (kospoč. měra) je měra na Σ_x

Dk.: 1) X spoč.: $A, B \in \Sigma_x \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$ spoč. \Rightarrow
 $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ tvr. (sj. spoč.)

(je spoč.)

2) X nespoč.: a) $A, B \in \Sigma_x, A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) = 0$ (spoč., viz 1)

b) A spoč., B nekospoč. $\in \Sigma_x, A \cap B = \emptyset$. Pak $A \cup B$ nespoč.
a méně $\mu(A \cup B) = 1 = 0 + 1 = \mu(A) + \mu(B)$

c) $A, B \in \Sigma_x, A \cap B = \emptyset$, obě kospoč. Nemůže uvažat.

Pak bud tohle $A \cap B = \emptyset$, pak $X = X \setminus A \cap B = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

A, B kospoč. $\Rightarrow X \setminus A$ a $X \setminus B$ spoč. (def Σ_x)

Shrnuto nespoč. = spoč. \cup spoč. Σ'

Пору. Обобщеніи методами згідної X каскад $\Rightarrow T_x$ (5)
 каскада ха-кесі Hausdorff'a.

(Nařízení M. Morganových providlo užívá použit
i (zuránečné) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq x \setminus B$ užívá $B \subseteq x \setminus A$
a pak $B \cap D = \emptyset$, třeba.)

Ad ceturth: Pro $X = \mathbb{R}$ s kospoc. \wedge Utevreal \wedge $\exists Q$

jsem vcela (obsahuji) i interval. To jsem
opět u X s Eulerovou... Protospac. topologie
 jež jsme se naučili: Uot. $\Rightarrow U = \emptyset$ nebo $R \setminus U$
 a lze je nazvat (R $\leq U$)

spoc. $\Rightarrow U = \emptyset$ nesastane ($\emptyset \subseteq U$)
 $\circ U$ nespoc. iji uak by $R \setminus U$ nespoc. $m(\emptyset) = 0$

All $\cup_{n \in \omega} \text{supp } \mu^n(0) = 1$. (Totally since closed.)

- Kospor. náraje lal. kon. ($\mu \leq 1$), tj. vlastní jsme lal. kon. jež neví Radonova.

~~• Presný prototypický na $U \subseteq R$ aleží v körpac. $\wedge U \subseteq Q$~~

\Rightarrow Observation interval: $J := T \cap Q$, d.h.

~~↳ Voraussetzung: $I \neq Q$; json transzendentur. ($I = \text{Idee} \neq \text{jgi}$)~~

$\cup = I \cup Q$ ($\subseteq R$) intervaly măriti. fără ref.).

$\mathcal{I} = \mathcal{U} \cup \mathcal{Q}(\mathbb{F}[k])$ intersecting \mathcal{M}_1

TUQ intervallum nemá. Kedy (a, b) obsahuje čísla, jež nejsou transcendentní, ani racionalní [vzájemně nerozložitelné]

~~Obra'zeč: + + * (→) Osluží (a) pouze IN a veru, když je využit. To je sloužení, nebat "předpokládám", že~~

~~intervaly~~ do krajního pořadí. Neboť vložíme do funkce φ intervaly, respektive uspořádání.

\checkmark Ne platí $\varphi(1) = q_1 \wedge \varphi(2) = q_2$. $1 < 2 \Rightarrow q_1 < q_2$. Ale \exists $q_1 < q_2$ a $\varphi(q_1) = q_1 \wedge \varphi(q_2) = q_2$ očíslovaní $\mathbb{Q} \Rightarrow \varphi$ surj. $\Rightarrow \exists \dots$

q_3 : $q_1 < q_3 < q_2$. φ očíslovaní $\mathbb{Q} \Rightarrow \varphi$ surj. $\Rightarrow \exists \dots$
 jasné.

3. Tychonovova věta a konstrukce Haarovy můry

Tychonovova věta: Součin kompaktního prostoru je kompaktní prostor.

Haarova můra: Radonova (lok. konečná, Borelova + „konvergence“) a i uvařitelná: $\mu(gU) = \mu(U) \forall U \in \Sigma$
 Pořadí se neuloží. $\forall g \in G$ (levourov.)

Pozn.: Pravoinváriantní obdobu: $\mu(Ug) = \mu(U)$.

Pr.: $X = \Theta = \mathbb{R}$, \exists Lebesgueova: $\mu(x+U) = \mu(U)$ tranzit. rův.,

$$\text{Definice} \left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \lambda(U) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| \mid U(a_i, b_i) \subseteq U \right\} \\ \text{b)} \text{N(b)} \quad \lambda(U) := \int_X \chi_U d\lambda, \text{kde } \int_X d\lambda \text{ se definiuje pomocí} \end{array} \right.$$

Lebesg. můry
 schodovitých funkcí (viz minule). $\lambda(x_0 + U) = \int_X \chi_{x_0 + U} d\lambda$
 $= \int_X \chi_U d\lambda = \lambda(U).$

Lok. kou. měřína: $\forall x \in X$ vztah $U = (x-\delta, x+\delta)$, $\lambda(U) = 2\delta$

regulárita (konvergence): $K_n \subseteq U$, $\cup K_n = U$, $K_n \subseteq K_{n+1}$,

$$\Rightarrow \int_{K_n} f d\lambda \rightarrow \int_U f d\lambda$$

Tj. Lebesgue je levoiov. (i pravoiov.) Haarova.

Pr.: Početací: $\mu(Mg) = \# Mg = \# M = \mu(M)$. Lokální
 konečnost $\Leftrightarrow M$ diskrétní.

Konstrukce Haarovy mìry

- Oznaèení: 1. $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$
 X top. prostor
 $(\text{Míze}'' \exists x_0 \in \text{supp}(f), f(x_0) = 0)$
 $x \in \text{supp}(f) \Leftrightarrow f(x) \neq 0$
2. $\|f\| := \sup \{|f(x)|, x \in X\}$ norma na $C_c(X)$.
3. $C_c^+(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f$ spojita, $\text{supp}(f)$ kompaktní, $f \geq 0 \wedge \|f\| > 0\}$

Daleko G grupa: 4. $L_x y := xy \quad \forall x, y \in G$

$$R_x y := y x^{-1}. \quad \text{Výkoda} \quad R_{x_1} R_{x_2} = R_{x_1 x_2}$$

[Pozn.: R_x není homomorfizmus: $R_x(yz) = y z x^{-1}$]
 $R_x(y) R_x(z) = y x^{-1} z x^{-1} \neq y z x^{-1}$]

• $f: G \rightarrow \mathbb{C} \quad L_x f := f \circ L_{x^{-1}}$

$$R_x f := f \circ R_{x^{-1}}$$

5. $(L_x f)(y) = (f \circ L_{x^{-1}})(y) = f(x^{-1}y)$

$[(R_x f)(y) = (f \circ R_{x^{-1}})(y) = f(yx^{-1})]$

Příklad: $R_i \in L(G)$ jsou homomorfizmy G

do $\text{Bij}(G)$, tj. $x \mapsto \underline{R_x}: G \rightarrow G$.

Pro konstrukci Haarovy mìry je potřeba

$$\forall f, \varphi \in C_c^+(G): C_{f, \varphi} := \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \mid m \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_m > 0, x_1, \dots, x_n \in G, \right.$$

$$\left. f \leq \sum_{i=1}^m c_i L_{x_i} \varphi \right\}$$

$(f: \varphi) := \inf C_{f, \varphi} \quad (C_{f, \varphi} \subseteq \mathbb{R}_0^+)$. Je vžitak $C_{f, \varphi} \neq \emptyset$?

Daleko budeme G topologická grupa a rájíme si korektností
 $(f: \varphi)$

Lemma 3: $\forall f, \varphi \in C_c^+(G) \exists x_1, \dots, x_n \quad f \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^n L_{x_j} \varphi$

Dk.: 1. $U = \{x \in G \mid \varphi(x) > \frac{\|\varphi\|}{2}\} \cdot \varphi \in C(G) \wedge \text{supp}(\varphi) \text{ kpt.}$

$$\frac{\|\varphi\|}{2} = \frac{\|\varphi\|}{2}$$

$\Rightarrow \varphi \text{ má koncové supremum} (\Leftrightarrow \|\varphi\| < \infty)$

• $\|\varphi\| > 0 \Rightarrow \|\varphi\| > \frac{\|\varphi\|}{2} \Rightarrow \exists y > \frac{\|\varphi\|}{2} \quad y = \varphi(x),$
 $\text{tj. } U \neq \emptyset \quad \|\varphi\| \exists \exists x$

• Uzavřená: $x_0 \in U \Rightarrow \varphi(x_0) > \frac{\|\varphi\|}{2} > 0$. Na výběr
 okolo x_0 je $\varphi > \frac{\|\varphi\|}{2}$ (spojitost φ) ($\varepsilon := \varphi(x_0) - \frac{\|\varphi\|}{2}$).

2. $\{g_U\}_{g \in G}$ je otevřené pokrytí G

1) otevřené: Nás. g je koncové

2) Pokrytí: $z \in G, h \in U$. Hledám g_0 , aby $z = g_0 h$
 znam $g_0 = zh^{-1}$ (pak $z \in g_0 U \in \{g_U\}_{g \in G}$)

3) Spec. $\{g_U\}_{g \in G}$ pokrývá $\text{supp}(f)$, jenž je kpt.
 $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m, z \in \{x_i U\}_{i=1}^m$ je pokrytí
 $\text{supp}(f)$.

3. $\frac{\|\varphi\|}{2} \leq \varphi(y) \quad \forall y \in U \quad / \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \Rightarrow \|f\| \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \varphi(y) \Rightarrow$

$$f(x) \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \varphi(y) \quad \forall x$$

4. $x \in G \xrightarrow{\text{if } x \in \text{supp } f} \exists x_j \quad x \in x_j U \quad (\{x_i U\}_{i=1}^m \text{ pokrývá}).$
 $y := x_j^{-1} x \in U$. Použijme bod 3.: $f(x) \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \varphi(x_j^{-1} x) =$

$$= 2 \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} (L_{x_j} \varphi)(x) \leq 2 \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^m L_{x_j} \varphi(x)$$

uzápočnost φ

\rightarrow If x not in $\text{supp } f$, take $c_1 = \dots = c_n = 2\|f\|/\|\varphi\|$ as well, getting $0 = \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i} \varphi(x)$



Pozn.: $f, \varphi \in C_c^+(\mathbb{G})$. Dle lemmatu $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{G}$

$$f \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^n L_{x_j} \varphi = \sum_{j=1}^n \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} L_{x_j} \varphi \cdot T_j. \stackrel{\text{pro}}{c_1} = \dots = c_n = \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}$$

$$\text{máme } f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j \in C_{f, \varphi, T_j} \quad [C_{f, \varphi} \neq \emptyset]$$

Navíc $C_{f, \varphi}$ je zdola omezená, t.j. $\exists a \in \mathbb{R}$ takové
číslo.

Věta: $f, g, \varphi \in C_c^+(\mathbb{G})$, $c > 0$. Pak

(druhá
verze)

$$1. (f : \varphi) = (L_x f : \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{invariantnost} \end{array} \right\}$$

$$2. (f+g : \varphi) \leq (f : \varphi) + (g : \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{sublinearity} \end{array} \right\}$$

$$3. (cf : \varphi) = c(f : \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{monotonie} \end{array} \right\}$$

$$4. f \leq g \Rightarrow (f : \varphi) \leq (g : \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{monotonie} \end{array} \right\}$$

$$5. (f : \varphi) \geq \|f\| \|\varphi\|^{-1}$$

$$6. (f : \varphi) \leq (f : g)(g : \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{submultiplicativnost} \end{array} \right\}$$

Dk.: 1. $\sum_{j=1}^n c_j \in C_{f, \varphi}$, t.j. $\forall y \in \mathbb{G}: f(y) \leq \sum_{j=1}^n c_j (L_{x_j} \varphi)(y)$,

$$\forall x \in \mathbb{G} \quad f(x^{-1}y) \leq \sum_{j=1}^n c_j (L_{x_j} \varphi)(x^{-1}y) = \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi(y).$$

$$\text{Cílem } L_x f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j \in C_{L_x f, \varphi}.$$

$$\circ \sum_{j=1}^n c_j \in C_{L_x f, \varphi} \quad \text{j.j. } L_x f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi \Rightarrow$$

$$\forall y \in \mathbb{G}: f(x^{-1}y) \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi(y) \Rightarrow f(z) \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi(y)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi(x_j^{-1} x^{-1} z) = \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1} x^{-1} z) = \sum_j c_j p(x_j^{-1} x z)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi(x) \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j \in C_{f \cdot \varphi} \Rightarrow C_{L_x f \cdot \varphi} \subseteq C_{f \cdot \varphi}.$$

Celkem $C_{f \cdot \varphi} = C_{L_x f \cdot \varphi}$ $\forall x \in G$ (dále následuje).

Pozn.: Odvození jsme k použití patří nejdříve: $f \leq g \Rightarrow L_x f \leq L_x g \quad \forall x \in G$

2. Ukažeme: $C_{f \cdot \varphi} + C_{g \cdot \varphi} \subseteq C_{f+g \cdot \varphi}$. Bud $\varepsilon \in (C_{f \cdot \varphi} + C_{g \cdot \varphi}) \setminus h$.

$$z = z_f + z_g, \text{ kde } z_f \in C_{f \cdot \varphi} \text{ a } z_g \in C_{g \cdot \varphi}. \text{ Pak } \exists x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_m$$

$$f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi \wedge g \leq \sum_{j=1}^m d_j L_{y_j} \varphi \quad (z_f = \sum_{i=1}^n c_i, z_g = \sum_{i=1}^m d_i)$$

$$\text{Odtud } f+g \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi + \sum_{j=1}^m d_j L_{y_j} \varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{j=1}^m d_j \in (f+g) \cdot \varphi$$

$$C_{f \cdot \varphi} + C_{g \cdot \varphi} \subseteq C_{f+g \cdot \varphi} \quad / \inf (\text{obrácené indukce})$$

$$\inf(C_{f \cdot \varphi} + C_{g \cdot \varphi}) \geq \inf(f+g) \cdot \varphi$$

$$\inf(C_{f \cdot \varphi}) + \inf(C_{g \cdot \varphi}) \geq \inf(C_{f+g \cdot \varphi}) \Rightarrow (f \cdot \varphi) \vdash (g \cdot \varphi) \geq (f+g) \cdot \varphi$$

3. Soudné (stv.)

4. $f \leq g$. Chceme $C_{g \cdot \varphi} \subseteq C_{f \cdot \varphi}$. $\sum_{j=1}^n c_j \in C_{g \cdot \varphi}$ $\forall j$. Pak $g \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi$. Zelikož $f \leq g \Rightarrow f \leq \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} \varphi \Rightarrow$
 $\sum_{j=1}^n c_j \in C_{f \cdot \varphi} \setminus h$. $C_{g \cdot \varphi} \subseteq C_{f \cdot \varphi}$. Aplikuj "inf":
 $(g \cdot \varphi) \geq (f \cdot \varphi)$.

$$5. (f \cdot \varphi) \geq \frac{\|f\|}{\|\varphi\|}?$$

$$\sum_j c_j \in C_{f \cdot \varphi} \Rightarrow f(x) \leq \sum_j c_j L_{x_j} \varphi(x) \leq$$

$$\leq \sum_j c_j \|\varphi\|. \quad \|f\| = \sup \{f(x) | x \in G\} \leq \sum_j c_j \|\varphi\| \Rightarrow$$

$$\sum_j c_j \geq \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} \Rightarrow (f \cdot \varphi) \geq \frac{\|f\|}{\|\varphi\|}$$

6. Využ
souběhem
 $+ L_x L_x^* =$
 $L_x^* L_x$

6. $\sum_i c_i \in C_{fig} \wedge \sum_j d_j \in C_{g, \varphi}$. Pak $f \leq \sum_i c_i L_{x_i, g} \wedge g \leq \sum_j d_j L_{y_j, \varphi}$
 $\Rightarrow f \leq \sum_i c_i L_{x_i} (\sum_j d_j L_{y_j, \varphi}) = \sum_{i,j} \underbrace{c_i d_j}_{\tau_{ij}} L_{x_i y_j, \varphi} \Rightarrow$
 $\sum_{i,j} c_i d_j \in C_{f, \varphi}$. Dokouče $\sum_i c_i \sum_j d_j \in C_{f, \varphi} \Rightarrow C_{fig} \cdot C_{g, \varphi} \subseteq$
 $\subseteq C_{f, \varphi}$. Odtud $(f : \varphi) = \inf C_{f, \varphi} \leq \inf (C_{fig} \cdot C_{g, \varphi}) \stackrel{(\geq 0)}{=} = \inf C_{fig} \cdot \inf C_{g, \varphi} = (f : g) \cdot (g : \varphi)$ \square

Definice: $f_0 \in C_c^+(G)$, $\forall \varphi \in C_c^+(G)$: $I_\varphi : C_c^+(G) \rightarrow (0, +\infty)$,
 $I_\varphi(f) := \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}$.

- Cíle: 1. $I_\varphi(f)$ sublineární a transl. invariantní!
 2. Uvyslozená věta (bez dle.)
 3. Tychonovova věta (součin lephů)
 4. Stejnojmenná spojitost

Tychonovova věta: Nechť A je množina a (X_α, T_α) budete pro každý $\alpha \in A$ kompaktní top. prostory. Pak $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se součinnou topologií je kompaktní!

- Postu.: 1. $\{\pi_\alpha^{-1}(U); U \text{ otv. v } X_\alpha, \alpha \in A\}$ je subbase X
 2. $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ $\pi_\alpha(f) := f(\alpha)$ je surjektivní
 3. Def T_X bývá T_X je iniciaální pro rodinu $\{\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha; \alpha \in A\}$, kde π_α def. v brde 2.

Stejnosmerná spojitost

1

Def: G bude topol. grupa a $f \in C(G)$. Rechneme, že f je stejnosmerná spojita, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists$ okolí $V \ni e$, že $\|L_y f - f\| < \varepsilon \quad \forall y \in V$.

Obdobně stejnoum. spoj. zprava.

Lemma 1: Každá $f \in C_c(G)$ je zleva i zprava stejnoum. spojita.

Dk.: $\varepsilon > 0$, $K := \text{supp } f$. Spojitost v $x \in K$: $\exists U_x \ni e$ $\forall z \in U_x$

$$(*) |f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \forall x \in U_x \text{ exist } V_x \ni e, \text{ že } V_x \subseteq U_x$$

$\wedge V_x$ symetrické (Existence bude uloha na cícičku.)

$\{V_x\}_{x \in K}$ pokrývá K . Kdopř $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \ni K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i, x_i}$.

$\bigcap_{i=1}^n V_{x_i} = V$. Zjistíme, že $e \in V$ a V je okolí e . V je symetrické.

$\bullet x \in K, y \in V$. Pak $y^{-1} \in V \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i, x_i}$, proveďte si. Dále:

$y^{-1} x x_i^{-1} \in V \subseteq V_{x_i} \subseteq V_{x_i, x_i} \subseteq U_{x_i}$ pro $y^{-1} \in V$. Tedy

$$|f(y^{-1} x) - f(x)| = |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)| \leq \quad \text{spoj. vlevo + (*)}$$

$$\leq |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)| \leq$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad V_{x_i} \subseteq U_{x_i} (\text{fuk.})$$

$\bullet x \notin K \Rightarrow$ a) $y^{-1} x \notin K$... nerovnost je trivialní!
 b) $y^{-1} x \in K \Rightarrow y^{-1} x x_i^{-1} \in V_{x_i} \ni e$. Odtud

(stále $y \in V$) $x x_i^{-1} = y y^{-1} x x_i^{-1} \notin U_{x_i}$. Tedy

$$|f(y^{-1} x) - f(x)| \leq |f(y^{-1} x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| =$$

$$= |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)|$$

$$< \varepsilon. \quad \text{(Tím spíš pro sup.)} \quad \square$$

Lemma 2: $\forall f \in C_c(G)$ a $\varepsilon > 0 \exists V \ni e$, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pokud

$y^{-1} x \in V$ nebo $y x^{-1} \in V$.

Dk.: $v \in V_1 : \|L_v f - f\| < \varepsilon ; w \in V_2 : \|R_w f - f\| < \varepsilon \quad V := V_1 \cap V_2$

2) $y^{-1} x \in V \Rightarrow y^{-1} x = w \Rightarrow x = y w \quad |f(y w) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{Příp. 1.}$

4) $y x^{-1} \in V \Rightarrow y x^{-1} = v \Rightarrow y = r x \quad |f(r x) - f(v)| < \varepsilon \quad \text{Příp. 2.}$

$x = v^{-1} y \quad \square$

$$\text{Def: } I_\varphi(f) := \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \quad \forall \varphi, f \in C_c^+(G)$$

(1,5)

f₀ znamená první a nejmenší významnou vlastnost
 $I_\varphi(f)$.

Lemma 3: $\forall f, \varphi \in C_c^+(S) : (f_0 : f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0)$

Dk.: $I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}$ · címene

$$(f : \varphi) \leq (f : f_0) \underset{\sim}{(f_0 : \varphi)} \quad \text{BOD 6 "dlauké věhy"}$$

$$\frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \geq \frac{1}{(f_0 : f)} \Leftrightarrow (f : \varphi)(f_0 : f) \geq (f_0 : \varphi)$$

$$\Leftrightarrow (f_0 : f) \underset{\sim}{(f : \varphi)} \geq (f_0 : \varphi), \text{ tj. opět bod 6 dlauké' věhy. linearu'}$$

Lemma 4: I_φ je sublineární, až levoinvariantní.
BOD 2 dlauké věhy

Dk.: 1. $I_\varphi(f_1 + f_2) = \frac{(f_1 + f_2 : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \stackrel{?}{=} \frac{(f_1 : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} + \frac{(f_2 : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} = I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2).$

2. $I_\varphi(cf) = c I_\varphi(f)$ opět dlauká věha, bod 3

3. $I_\varphi(L_x f) = \frac{(L_x f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \stackrel{\text{opět, bod 1}}{=} \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} = I_\varphi(f).$

Urysohn theorem: Let X be locally compact Hausdorff, K compact and $U, K \subset U$, open. Then there exists a compact set C , $C \subset U$ and a continuous function $\varphi: X \rightarrow [0,1]$, s.t. $\varphi(x)=1$ on K and $\varphi(x)=0$ on $X \setminus C$.

Proof: Bc thesis, De Chiffre.

Lemma 5: $\forall f, g \in C_c^+(G) \forall \varepsilon > 0 \exists V \ni \varphi \text{ supp } \varphi \subseteq V$

$\left[\begin{array}{l} \text{"ubrátací"} \\ \text{"subadditivity"} \end{array} \right] I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \leq I_\varphi(f+g) + \varepsilon.$

Dk.: "Uryšov" $\exists h_0 \in C_c^+(G), h_0(x)=1 \quad \forall x \in \text{supp}(f+g)$

$$\forall \delta > 0, h = f+g+\delta h_0$$

$$h_1(x) := \begin{cases} f/h(x), & x \in \text{supp}(f) \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} g/h, & x \in \text{supp}(g) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$h_1, h_2 \in C_c^+(G)$ zc zákl. neto s požad.

Z lemma 2 (důst. stejnou spoj.): pro $\delta \geq \varepsilon \exists V \ni$

$|h_1(x) - h_1(y)| < \delta \wedge |h_2(x) - h_2(y)| < \delta$ pokud $y^{-1}x \in V$

Nechť $\varphi \in C_c^+(G)$ a $\text{supp}(\varphi) \subseteq V$. ~~$\forall x \in G$~~

Nechť $\sum_{j=1}^m g_j \in C_{h_1, \varphi} \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m$, zemánu působ. oddaly

$$\text{Máme } f(x) = h(x)h_1(x) \leq \sum_{j=1}^m g_j(L_{x_j, \varphi})h_1(x) \quad (1)$$

$$g(x) = h(x)h_2(x) \leq \sum_{j=1}^m g_j(L_{x_j, \varphi})(x)h_2(x) \quad (2)$$

$\forall x \in G$: pokud $x_j^{-1}x \in \text{supp}(\varphi) \subseteq V$, máme

$$|h_1(x) - h_1(x_j)| < \delta \wedge |h_2(x) - h_2(x_j)| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} h_1(x) - h_1(x_j) &< \delta \\ 0 \leq h_1(x) &< \delta + h_1(x_j) \end{aligned} \quad \text{Pro ost. } x_j \text{ je } L_{x_j, \varphi} = 0 \text{ a udržuje méně}$$

$$(1) \leq \sum_j g_j(L_{x_j, \varphi})(x)(\delta + h_1(x_j)) \checkmark$$

$$(2) \leq \sum_j g_j(L_{x_j, \varphi})(x)(\delta + h_2(x_j)) \checkmark \quad \forall x \exists x_j: x_j^{-1}x \in \text{supp}$$

$$(f \cdot \varphi) \leq \sum_j g_j(h_1(x_j) + \delta) \quad (g \cdot \varphi) \leq \sum_j g_j(h_2(x_j) + \delta) \quad 4$$

$\in C_{f, \varphi} \text{ (niz u j s)} \quad \in C_{g, \varphi} \text{ (niz u j s)}$

$\inf_{j \in \mathbb{N}} h_1(x_j) \geq \frac{f}{h} + \frac{\delta}{h} = \frac{f+\delta}{h} = \frac{f+\delta}{f+g+\delta h_0} \leq 1$

$$(f \cdot \varphi) + (g \cdot \varphi) \leq \sum_j g_j(h_1(x_j) + h_2(x_j) + 2\delta) \leq \sum_j g_j(1+2\delta)$$

$$L = \frac{(f \cdot \varphi) + (g \cdot \varphi)}{(1+2\delta)} \leq \sum_j g_j \quad \frac{\equiv C_{h, \varphi} \geq \sum_j g_j}{L}$$

L je dolní závora. $\inf_{j \in \mathbb{N}} (C_{h, \varphi}) \geq L$ největší

zde ekvivalentne i maximalni

$$\inf(C_{h, \varphi}) \geq \frac{(f \cdot \varphi) + (g \cdot \varphi)}{(1+2\delta)}, \text{ t.j. } (f \cdot \varphi) + (g \cdot \varphi) \leq \cancel{(1+2\delta)} \leq (h \cdot \varphi)(1+2\delta)$$

$$I_\varphi(f) + I_\varphi(g) = \frac{(f \cdot \varphi)}{(f_0 \cdot \varphi)} + \frac{(g \cdot \varphi)}{(f_0 \cdot \varphi)} \leq \frac{(h \cdot \varphi)}{(f_0 \cdot \varphi)}(1+2\delta) = I_\varphi(h)(1+2\delta)$$

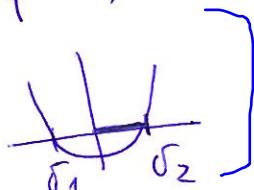
$$\leq (1+2\delta) I_\varphi(f+g+\delta h_0) \stackrel{I_\varphi \text{ sublineární}}{\leq} (1+2\delta) [I_\varphi(f+g)+\delta I_\varphi(h_0)]$$

zač. δ_1, δ_2 : $2\delta I_\varphi(f+g) + (1+2\delta)\delta I_\varphi(h_0) < \varepsilon$.

To lze.

$$2\delta^2 A + 2\delta B \bar{\varepsilon} < 0$$

$$\delta_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 + 2A\varepsilon}$$



celkem $I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \leq I_\varphi(f+g) + \varepsilon.$

□

Věta (Haarovou mřížu - existence): Nechť G je lokálně kompaktní skupinou. Pak G má levou Haarovou mřížu.

Dk (ala Weil): $\forall f \in C_c^+(G) \quad X_f := \left\langle \frac{1}{(f_0:f)}, (f_0:f) \right\rangle, X :=$

$= \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f$ je kompaktní dle Tychonovovy vety. $I_\varphi : C_c^+(G) \rightarrow \mathbb{R}$

Nechť $\varphi \in C_c^+(G)$. Pak $I_\varphi \in X_f$ dle Lemma 3, $\cup X_f (I_\varphi)$

$\forall V$ okolí $e \in G: K_V := \{ I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \text{supp}(\varphi) \subseteq V \}$.

(Vokolí e , zvlášť $\text{supp } \varphi \subseteq V, \varphi \in C_c^+(G) \Rightarrow I_\varphi \in \{ I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \text{supp}(\varphi) \subseteq V \} \Rightarrow I_\varphi \in \overline{\{ \}} = K_V. C_V := \{ I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \text{supp}(\varphi) \subseteq V \}$)

1. K_V je uzavřená v kompaktní X , tj. K_V je kompaktní.

2. $\{K_V \mid V$ okolí $e\}$ má FIT (vlastnost kompaktních průniků):

$\overline{\cap A_i} \subseteq$ Uvaž $K_{V_1}, K_{V_2}, \dots, K_{V_n}$ i V_i okolí $e, i=1, \dots, n$.
 $\subseteq \overline{\cap A_i}$ Zřejmě $e \in \overline{\cap V_i} \neq \emptyset$. Uryson: $\exists \varphi \text{ supp } \varphi \subseteq \overline{\cap V_i}$, tj.
 $I_\varphi \in \overline{\cap V_i}$. Zřejmě $C_{\overline{\cap V_i}} \subseteq \overline{\cap K_{V_i}}$, tj. $\overline{\cap K_{V_i}} \neq \emptyset$.

Systém

$(K_V)_V$

\hookrightarrow (elutrový systém)

3. Chceme I je sublimární a invariántní.

a) Polář "odbočka" (vysvětlení součinné):

$I \in K_V \quad \forall V. \quad \text{Bud } f \in C_c^+(G). \quad \text{Pak (z def. uzavřenosti)}$
 $\exists I_\alpha \in C_V, I_\alpha \xrightarrow{\alpha} I$. Ovšem tří konverg.

existuje $I_\alpha \in C_V, I_\alpha \xrightarrow{\alpha} I$. Ovšem tří konvergenci

uží v součinnu \Rightarrow všechny složky této konvergencii

tj. $\forall g \in C_c^+(G) \quad \pi_g \circ I_\alpha \xrightarrow{\alpha} \pi_g \circ I$. Co je to $\pi_g \circ I_\alpha$?

$\pi_g \circ I_\alpha = I_\alpha(g)$, tj. $I_\alpha(g) \xrightarrow{\alpha} I(g)$. "Rozepisné"

Konvergenz $\Leftrightarrow \exists x_0 \forall \alpha \geq x_0 \mid |I(g) - I(g)| < \varepsilon$ (6)

$\forall g$

b) Norm Invariance: $I \in K_V \quad I_\varphi \in C_V, \quad K_V = \overline{C_V}$

$$\begin{aligned}
 |I(L_x g) - I(g)| &= |I(L_x g) - I_\varphi(L_x g) \\
 &\quad + I_\varphi(L_x g) - I(g)| = |I(L_x g) - I_\varphi(L_x g)| \\
 &\quad + |I_\varphi(g) - I(g)| \leq \\
 &|I(L_x g) - I_\varphi(L_x g)| + |I_\varphi(g) - I(g)| \leq \\
 &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{I a } I_\varphi \text{ j. norm. (2x)} \\ \text{I}(g) \text{ a } I_\varphi(g) \text{ fare} \\ \text{I}(L_x g) \text{ a } I_\varphi(L_x g) \text{ fare} \end{array}}
 \end{aligned}$$

c) Additivität (z Lemma 5):

$$\begin{aligned}
 |I(f+g) - I(f) - I(g)| &= |I(f+g) - I_\varphi(f+g) - \\
 &\quad - I(f) + I_\varphi(f) - I(g) + I_\varphi(g)| + I_\varphi(f+g) \\
 &\quad - I_\varphi(f) - I_\varphi(g)| \leq |I(f+g) - I_\varphi(f+g)| + \\
 &\quad + |I(f) - I_\varphi(f) + (-I(g) + I_\varphi(g))| + |I_\varphi(f+g) \\
 &\quad - I_\varphi(f) - I_\varphi(g)| \stackrel{L5}{\leq} \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.
 \end{aligned}$$

d) $I(cf) = cI(f) \quad \forall c > 0$ obdobue

e) $I(f) := I(f_+) - I(f_-)$ a evnt. $f: G \rightarrow \mathbb{C}$
 $I(f) := I(\operatorname{Re} f) + i(I(\operatorname{Im} f))$

Celkem I: $C_c(G) \rightarrow \mathbb{R}$ je ^{inv}variantní, sublineární a \mathbb{Q} -lin. zobrazení. Navíc je pozitivní (bod 4 dleší věty). Riesz: $\exists \mu$ Radonova, že
 $I(f) = \int_G f d\mu \quad \forall f \in C_c(G)$. Invariance po splnění
 podmínky I. Neutrálnost mítace ($I \neq 0 \Leftrightarrow I_q \neq 0$) □

Pozn.: 1. Ostatní existence pravé Haarovy mry
 2. Jeden. označení Haarovou mrou

Věta (jedn. H.m.): Je-li G lkr. kroup. a μ_1, μ_2 jsou neutrální
 Haarovy mry, pak $\exists! c > 0 \quad \mu_1 = c\mu_2$.

Dk.: Využívám (Toulliho větu). Bc. thesis Marcus
 Dechiffre (Haar + Dechiffre)

Pozn.: 3. může být nejsou regulární, ale i lok.
 Monotoná ve smyslu $m(K) < \infty \quad \forall K$
 kroup. (bod 4 str. 13, Bc. dechiffre)

Věta (mimího Haarovy m.): Nechť G je lokálně kompaktní a máje
levá Haarova měra. Je-li ν levá Haarova měra,
pak $\exists c > 0 \quad \mu = c\nu$

Dk.: Vypočítáme. Viz např. bc-práce M. Dechiffre (Kodan).

Důkaz se opírá o Tonelliho větu (součinnost \exists) a operát
verni Urysohnovy věty □

! Konstrukce modulu (modularu' ře). $\forall g \in G, \mu$ leva H.m.

- $\mu_g(U) := \mu(Ug)$.
- Zajímá $\mu_g(hU) = \mu(hUg) = \mu(Ug) = \mu_g(U)$, t.j. μ_g je
levá H. měra (radounost zajímá). Dle výše
- $\exists c_g > 0, \exists \epsilon \quad \mu_g(U) = c_g \mu(U) + \epsilon$. Definujme
- $\Delta(g) := c_g, \Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^+$. [$\mu_g(U) = \Delta(g) \mu(U)$]

Tvrzení: 1. Δ je homom. grup.

2. Δ je spojibý

3. $\Delta^\mu = \Delta^\nu \quad \forall \mu, \nu$ levé Haarovy měry

Dk.: 1) a) $\Delta(g_1g_2)(\mu(U)) = \mu(Ug_1g_2) = \mu_{g_2}(Ug_1) = \Delta(g_2)\mu(Ug_1) =$
Bud $\mu(U) \neq 0$ (stav?) $= \Delta(g_2)\Delta(g_1)\mu(U)$.
V tomto.
Odtud $\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)$

b) $\Delta(e) = \Delta(e^2) = \Delta(e)\Delta(e)$

$\Rightarrow \Delta(e) = 1 \quad (\Delta(e) = 0 \text{ nelze}$
 $\text{dle } c_e > 0)$. Odtud triviale $\Delta(g^{-1}) = \Delta(g)^{-1}$.

2) spoj. vypočítáme (důsled. měr o stejném spoj.). Dle definice pro

zařízení $\exists c \quad \nu = c\mu$

$$\left. \begin{array}{l} 2_g(U) = \nu(Ug) = c \mu(Ug) = c \Delta^\nu(g) \mu(U) = \Delta^\mu(g) \nu(U) \\ 2_g(U) = \Delta^\nu(g) \nu(U) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^\mu(g) = \Delta^\nu(g) \quad \forall g \quad \Rightarrow \nu(U) =$$

Tvrzec 2: 1. $\Delta = 1$ a jelevá Haarová, pak je i pravá Haarová návra.
 (Analogný: pravá $\xrightarrow{\Delta \text{ pro pravou, návra}}$ jelevá) Platí i \exists jelevá, žež je i pravá $\Rightarrow \Delta = 1$.

2. Gabelovská $\Rightarrow \Delta = 1$.

3. G kompaktní $\Rightarrow \Delta = 1$.

Dk.: 1.a) $\mu(U_g) = \Delta(g)\mu(U) = \mu(U) \Rightarrow \mu(U_g) = \mu(U) \Rightarrow \mu$ pravá

Analog: $\mu(gU) = \Delta^P(g)\mu(U) = \mu(U) \Rightarrow \mu(gU) = \mu(U) \Rightarrow \mu$ leva!

b) μ leva, žež je i pravá: $\left. \begin{array}{l} \mu(U_g) = \mu(U) \\ \mu(U_g) = \Delta(g)\mu(U) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = 1$

2. G abel. $\mu(U_g) = \mu(gU) = \mu(U)$ $\left. \begin{array}{l} \mu(U_g) = \mu(U) \\ \mu(U_g) = \Delta(g)\mu(U) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = 1$

3. G kpt., μ leva $\Rightarrow \mu$ Radon $\Rightarrow \mu(G) < \infty$

Dále $\mu(G) = \mu(Gg) = \Delta(g)\mu(G) \Rightarrow \Delta = 1$.

$G = Gg$ (Rg homeo)

Definice: Glob. kouep., $\Delta = 1 \Rightarrow$ G slouží unimodularu.
 μ leva Haarová, žež je i pravou slouží Haarovou.

Pozn.: • Def unimodularity než načnýdelem (Tvrzec 1)
 • G unimodulární \Leftrightarrow každá leva Haarová je i pravou (\Leftrightarrow každá pravá je leva), jak plyně z Tvrzec 2.

*)

Sometimes we need to divide by $\mu(U)$: A) U any open non-empty $\Rightarrow \mu(U) > 0$: 1. $\mu(G) > 0$ (otherwise $\mu=0$), 2. Since G open \Rightarrow exists K cpt. such that $\mu(K) > 0$ by inner regularity of μ on open sets. 3. U open $\Rightarrow (gU) \subset g$ in G covers K \Rightarrow K subseteq of Union_{i=1}^n (g_i U) $\Rightarrow \mu(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu(g_i U) = \sum_{i=1}^n \mu(U)$. If $\mu(U) = 0 \Rightarrow \mu(K) = 0$ - contr.

B) Exists U open non-empty, s.t. $\mu(U) < \infty$ ("easier"): G locally cpt. Thus, for any g in G exists a cpt. K \ni x and U subseteq K with U open and x in U. Since $\mu(K) < \infty$ (part of def. of Radonnes of μ), $\mu(U) \leq \mu(K)$.

A)+B): there exists U open non-empty with $\mu(U) < \infty$ by B). By A) $0 < \mu(U) < \infty$. We need only: exists measurable with finite non-zero measure. "Otherwise, any measurable would of measure zero or of infinite measure. 'Possible' but excluded as we see"

Příklady Haarovým mér (vč. lejich nebo pravých Haarových mér). 3

1. Lebesgueova na \mathbb{R}^n .

2. Počítat: $\mu(U) = \# U$ pro měřitelnou $U \in \Sigma_X$. Σ_X Borelova

pro X top. prostor. Pokud X diskretní $\Rightarrow \mu$ je Radonova
(vč. lok. konečnosti) a μ je levo-(a pravo-)inváriantní.

Diskretnost X nemá smysl: (X, τ_X) kofinální topologie
na nekoncové množině X . Borelovská σ -algebra:

$$\Sigma_X = \{U \subseteq X \mid U \text{ končit. nebo } X \setminus U \text{ končit.}\}$$

$$\mu(U) = \begin{cases} \# U, & U \text{ končit.} \\ \infty, & jinak \end{cases} \quad \mu \text{ je zjevně lok. kon.}$$

($\forall x \quad U_x := \{x\}$ je $\in \Sigma_X$ a $\mu(\{x\}) = 1$), Radonovskost

(konečné obhíže) a inváriance (ezojma).

3. $(\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot)$ $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R}$ s vlast. topol.

$$\mu(U) := \int_{\mathbb{R}_{>0}} \chi_U \frac{dx}{x} \quad | \quad \mu(a, b) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \chi_{(a, b)} \frac{dx}{x} = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$$

$$\Sigma_{\mathbb{R}_{>0}} = \{\sigma\text{-algebra lib. měřitelných}\}$$

radonovskost (z radonovskosti \mathcal{F}_R)

$$\text{lok. konečnost: } x \in \mathbb{R}_{>0} \dots (\frac{x}{2}, 2x) \ni x \quad \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{dx}{x} = \ln 4 < \infty$$

inváriance: pro intervaly (par + radonovskost):

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x} \quad | \quad \text{Někdy může } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_U(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

4. $(S^1, 1, \cdot)$, $U \subseteq S^1$ měřitelná: $\mu(U) = \int \chi_U(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$

$$\subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{př.: } U = \left\{ (\cos \varphi, \sin \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(Inv: inv. Leb. $\mu(U) = \int_0^{2\pi} \chi_U(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$

transl. inv. Leb. $\chi_U(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) = \begin{cases} 0 & \varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi) \\ 1 & 0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

5. Spockete Δ pro $\mathbb{R}^{>0}$. $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\mu_r(U) = \mu(Ur) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{x} dx = \ln \frac{br}{ar} = \ln \frac{b}{a} = \mu(U) \Rightarrow U = (a, b)$$

$$\Delta(r) = \frac{\mu_r(U)}{\mu(U)} = 1$$

T_j : $\mathbb{R}^{>0}$ je unimodulární (je abelovská).

6. Grupa $G \doteq GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ (rud. topologie)

Ubud' borelovska v G neb' ažecceji měřitelná. Připomínáme, že myží $\mu = \infty$.

$$\mu(U) := \int \chi_U(x) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(x)}{|\det(x)|^n} \text{ n. Bud' } A \in G. \text{ Zkusme ilovit variace!}$$

$$\mu(AU) = \int \chi_{AU}(x) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(x)}{|\det(x)|^n} = \left| \begin{array}{l} x = Ay \\ dx = \det A y \end{array} \right| =$$

$$= \int \chi_{AU}(Ay) \frac{\det(A)}{|\det(Ay)|^n} d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(y) = \int \chi_U(y) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(y)}{|\det(y)|^n}$$

$$= \mu(U) \Rightarrow \mu je levočišná funkce.$$

$\exists \epsilon \neq 0$. \exists radonovská \cdot i.e. \exists i pravé α, β .

7. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x > 0, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(2, \mathbb{R})$; std. euc. topol.

a) G je gruba (cvičení)

b) $G \subseteq \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$. G je lokál. komp. (Naše G je dokonce Lieova)

$$c) \mu(U) = \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^{-2} dx_{\mathbb{R}^2} \quad \left[x^{-2} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) := a^{-2} \right]$$

Vst. v G

$$\mu \left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) U \right) = \int \chi_{\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) U} \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^{-2} d\lambda_{\mathbb{R}^2}(x, y)$$

$$\chi_{\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) U} \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \text{ t.j. } = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in U \Leftrightarrow \frac{1}{a} \left(\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in U \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x & y-b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \in U$$

Integrují tedy $\int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x & y-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}^2 d\lambda \right)_{\mathbb{R}^2}$

$(G \subseteq) \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

" $dx dy = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial x'} dx' dy'$ " $\text{Jac} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix} \right) = a^2$

$= \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x' y' \\ 0, 1 \end{pmatrix} (x' a)^{-2} |\text{Jac}| d\lambda' \right)_{\mathbb{R}^2} = \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x' y' \\ 0, 1 \end{pmatrix} x'^{-2} a^{-2} d\lambda' \right)_{\mathbb{R}^2}$

$(\supseteq) \mathbb{R}^2$

$= \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x' y' \\ 0, 1 \end{pmatrix} x'^{-2} d\lambda' \right)_{\mathbb{R}^2} = \mu(U) \cdot T_j: \text{už je levoúvání}\$

ažut!

- μ nemá pravou úvahu:

$$\mu \left(U \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \int \chi_{U \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} \left(\begin{pmatrix} xy \\ 0, 1 \end{pmatrix} \tilde{x}^2 d\lambda \right)_{\mathbb{R}^2} = \begin{cases} \chi_{U \left(\begin{pmatrix} ab \\ 0, 1 \end{pmatrix} \right)} (xy) = 1 \Leftrightarrow \\ (xy) = \left(\begin{pmatrix} x' y' \\ 0, 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in U \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} xy \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right) \in U \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} xy \\ 0, 1 \end{pmatrix} \frac{1}{a} \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \right) \in U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} x & -xb+ya \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \right] = \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x & -xb+ya \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}^2 d\lambda \right)_{\mathbb{R}^2} = \begin{cases} \text{subst.} \\ x' = \frac{x}{a} \\ y' = -\frac{b}{a}x + y \end{cases}$$

$$\text{Jac} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{a} \Rightarrow \text{Jac} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} = a$$

$$= \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x' y' \\ 0, 1 \end{pmatrix} x'^{-2} a^{-2} \cdot a d\lambda \right)_{\mathbb{R}^2} = \int \chi_U \left(\begin{pmatrix} x' y' \\ 0, 1 \end{pmatrix} \tilde{x}^2 d\lambda \right)_{\mathbb{R}^2}$$

$= \frac{1}{a} \mu(U) \neq \mu(U)$, když $\mu(U) \neq 0$, $a \neq 1$.

(Stačí tedy $a \neq 1$

$\Leftrightarrow \mu(U) > 0$.)

- Podgrupy unimodulárních neměřitelných unimodulární!

8. $SL(n, \mathbb{R})$ je unu neodulärnu

9. Heisenbergova grupea takaé

6.

Pozn.: Ad det ~~odvozenou~~ jacobijova matice a obrazem

$$X \mapsto AX, M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$$

$\frac{\partial}{\partial x^j}$ ~~sloupec~~ sloupec $(AX)_{ij} = \sum_k A_{ik} X_{kj} \quad i=1, \dots, n$

$$\left. \begin{array}{l} \text{je } (A \overset{\downarrow}{\overrightarrow{X_i}})_{i=1, \dots, n} \\ \text{znamená} \\ \text{sloupcový} \\ \text{vektor} \\ \text{a } X_i \text{ je j-ty vektor } X \end{array} \right\}$$

1. Vzniklá matice sestává z

$$\left(\overset{\downarrow}{AX_1} \mid \overset{\downarrow}{AX_2} \mid \dots \mid \overset{\downarrow}{AX_n} \right)$$

$$|\det(\text{Jac}(X \mapsto AX))| = |\det(X \mapsto AX)| = |\text{objemu}|$$

$$\left| \left\{ \overset{\downarrow}{AX_1}, \dots, \overset{\downarrow}{AX_n} \right\} \right| = |\det A|^n.$$

2. Nežo použít $(AE_{ij})_{ke}$, kde $E_{ij} = \delta_{ik} \delta_{je}$

$$(AE_{ij})_{ke} = \sum_m A_{km} (E_{ij})_{me} = \sum_m A_{km} \delta_{im} \delta_{je}$$

\uparrow definice.

$$= A_{ki} \delta_{je}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_{12} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline A_{1n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{nn} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline A_{n1} & A_{n2} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{array} \right)$$

„permutace“ .

nežádoucí dopsáno
přeskočit.

Cílem k před. 6.

1. Okolí v topologických grupách

a) $\forall U \subseteq G$ at., $\forall x \in G$: xU, Ux, U^{-1} otevř.

Dk.: L_x, R_x^{-1} i. $^{-1}$ jsou homeom.

b) $\forall U \subseteq G$ okolí e $\exists V \subseteq U$ sym. okolí e. (V sym $\Leftrightarrow x \in V \Rightarrow x^{-1} \in V$)

Dk.: U^{-1} je okolí e : 1) $e \in U^{-1}$

2) $e \in W \subseteq U$, W at. $\Rightarrow W^{-1}$ at. $x \in W^{-1}$

Zjednou $W^{-1} \subseteq U^{-1}$ ($x \in W^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in W \Rightarrow x^{-1} \in U$
 $\Leftrightarrow x \in U^{-1}$)

$V := U \cap U^{-1}$ je okolí e : $x \in W^{-1} \cap W \Rightarrow x \in W \wedge x \in W^{-1} \Rightarrow$

$x \in U \wedge x \in U^{-1} \Rightarrow x \in U \cap U^{-1}$, h. $W^{-1} \cap W \subseteq V$.

$e \in W, e \in W^{-1} \Rightarrow e \in W \cap W^{-1} \Rightarrow$ 

V sym : $x \in V \Rightarrow x \in U \cap U^{-1} \Rightarrow x \in U^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in U \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow x \in U \\ \Rightarrow x = x^{-1} \in U^{-1} \end{array} \right\} x^{-1} \in V$.

c) $\forall U \subseteq G$ at. \exists okolí e \exists sym. V_1, V_2 $\ni VV \subseteq U$.
 pro jednoduchost $\overset{\uparrow}{\text{okolí e}}$

$\mu: G \times G \rightarrow G$, $\mu^{-1}(U) \subseteq G \times G$, $\mu^{-1}(U)$ at. $\forall (e, e) \in \mu^{-1}(U)$
 na soběm

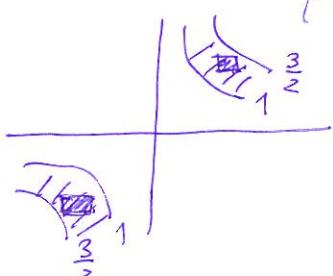
\exists def. souč. topol.: $V_1 \times V_2 \subseteq \mu^{-1}(U)$, V_1, V_2 otevřené a $e \in V_1$ a

$\forall a \in V_2$. $V := V_1 \cap V_2$ $VV = (V_1 \cap V_2)(V_1 \cap V_2) \subseteq V_1 V_2 \subseteq U$:

Bud $x, y \in V_1 V_2$ $xy = \mu(x, y) \in U$, h. $V_1 V_2 \subseteq U$.

Prv.: $\mu^{-1}(U)$ nemá být součinem množin ("dýba" v be-práci'
 delšího). $1 < x < \frac{3}{2} \dots U$

$G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mu^{-1}(U) = \{(x, y) \mid 1 < xy < \frac{3}{2}\}$



Evidentně $\mu^{-1}(U)$ nemá x, ale ...
 obsahuje odbezlenky (součiny).

Konstrukce Haarovy mřížky pro Lieovu grupu. (Cuk před. 6)

G Lieova $\Rightarrow T_e G \Rightarrow T_e^* G \quad \{\in^1, \dots, \in^n\}$ budou báze

$\bar{\omega} := \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \neq 0$. $L_g : G \rightarrow G$ difeo $\circ (L_g)_h^* : T_h^* G \rightarrow T_{(L_g)^{-1}(h)}^* G$ since $(L_g)^{-1}(h) = g^{-1}h$ $(L_g^{-1}) \circ L_g(h) = g^{-1}g h = h$.
 $T_j. (L_g)_h^* : T_h^* G \rightarrow T_{g^{-1}h}^* G$. (Recall $L_g(h) := gh$.)

$\omega_{g^{-1}} := (L_g)_e^* \bar{\omega}$ a) $\omega \in \Gamma(\wedge^n T_e^* G)$
 dif-geom. b) $\omega_{g^{-1}} \neq 0 \quad \forall g \in G$, už L_g difeo
 $\Rightarrow (L_g)_h^*$ izom. $\Rightarrow (L_g)_h^*$ farebné (lin. algebra)

c) Invariance: $\stackrel{L}{=} (L_g)_{h^{-1}}^* \omega_{h^{-1}} = (L_g)_{h^{-1}}^* (L_h)_e^* \bar{\omega} =$
 $= (L_h \circ L_g)_e^* \bar{\omega} = (L_{hg})_e^* \bar{\omega} = \omega_{(hg)^{-1}}$

Thus, $L = (L_g^* \omega)_{g^{-1}h^{-1}} = \omega_{g^{-1}h^{-1}}$. Therefore $L_g^* \omega$ = ω .

$(\phi^* \alpha)(p) = \phi^* \tilde{\alpha}_{\phi(p)} \phi^*(p)$ *) $(\Phi^* \alpha)(p) = \Phi^* \tilde{\alpha}_{\Phi(p)} \Phi^*(p)$ *)

$$(\Phi^* \alpha)(p) = \Phi^* \tilde{\alpha}_{\Phi(p)} \Phi^*(p)$$

$$= \alpha_m (\Phi^* [\Phi^{-1}(m)] t_{[\Phi^{-1}(m)]})$$

$$\int f d\mu := \int f \omega. \quad \int (L_g f) d\mu = \int (L_g f) \omega = \int L_g f L_g^* \omega$$

$$= \int L_g^* (f \omega) = \int f \omega \stackrel{\text{anal. uav. tich. def.}}{\stackrel{\text{def}}{=}} \int f d\mu$$

*.) Když lepsi "násobku" už počítanou bude využívávat.

$$\omega := L_g^* \bar{\omega} \mid L_h^* \omega = L_h^* L_g^* \bar{\omega} = (L_g \circ L_h)_e^* \bar{\omega} =$$

$$= L_{gh}^* \bar{\omega} = \omega \quad \begin{array}{l} \text{Moc ne. Bodiu učiteli,} \\ \text{že bereme správné...} \\ \text{Korektně je } \textcircled{c}. \end{array}$$

4. Základy teorie ^{+ mož.} reprezentací topologických grup

Motivace: Chceme analog $e^{2\pi i(x,y)}$ pro "obecnou grupu."

$x \in \mathbb{R}^n$ působí, $\mathbb{R}^n \rightarrow y \mapsto e^{2\pi i(x,y)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $e^{2\pi i(x,y)}(z) := e^{2\pi i(x,y)} z$, $y \in \mathbb{C}$
 Tato charakteristická exponenciální je element $U(1)$,
 $U(n) = \{ A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}_n \}$
 $A^* = \overline{A^T}$, $\mathbb{1}_n = E$

Def.: G topologická grupa, H říplý lokálně konvexní topologický množinový prostor (Banachov, Hilbertov...). Když homeomorfismus $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ naznačí reprezentaci G na H , pokud je přidružené zobrazení $\psi : G \times H \rightarrow H$ spojité, kde $\psi(g, v) = \rho(g)v$, $\forall g \in G, v \in H$. Často označujeme (ρ, H) .

Oznacení: $\text{Aut}(H) := \{ T : H \rightarrow H \mid T \text{ je bijekce}, T \text{ je spojitele a } T^{-1} \text{ je spojitele inverzí} \}$ (je homeomorfismus; můžete použít i když o obecném zobrazení)
 "Banach"

Príklad: 1. $\rho : SO(3) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^3)$ $\rho(g)v := g(v)$, $\forall g \in G, v \in \mathbb{R}^3$
 (tautologická repr.) ; $SO(n) := \{ A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}_n \}$

2. $\chi_x : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$, $\chi_x(t)v := e^{2\pi i xt} v$, tzn. unitární charakter \mathbb{R} (příslušný x) --- právě ve Fourierově transf.

3. $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(L^2(\mathbb{R}))$, $\rho(s)f](t) = f(t-s)$; na $L^2(\mathbb{R})$
 top. induk. (f, g) := $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt$

tzn. indukovaná levou translaci $L_s(t) := s + t$

$(\rho(s)f = L_s f (= f \circ L_{-s}^{-1} = f \circ L_{-s}))$

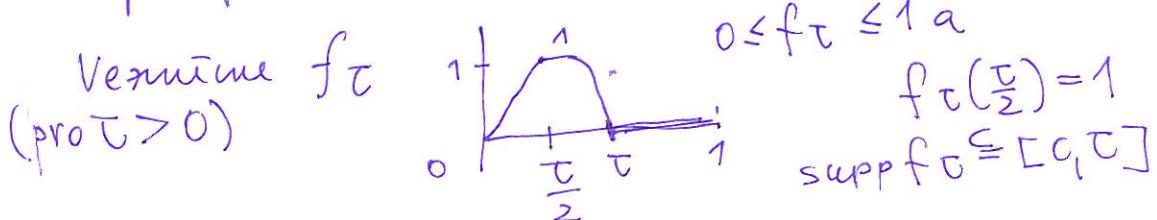
4: $\rho_m : S^1 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ $\rho_m(e^{2\pi i m\varphi})z := e^{2\pi i m\varphi} z$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$

Pozn.: Když bydrem uvažovali topologii na $\text{Aut}(H)$, když $H = \mathbb{C}$,
 např. v případě H Banachových indukovaných map, tedy operátorů
 mormon, vracaje se, že „bezvě“ reprezentace (homomorfizm)
 byl neobyčejně spojite. $\xrightarrow{\text{std. topol}} (\cong s')$

Pr. (cvičení): $\rho : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\underbrace{C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}_{\cong H} \text{Banachov})$
 na $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ uvažují $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |f(t)|$ (\exists spoj. na kpt.),

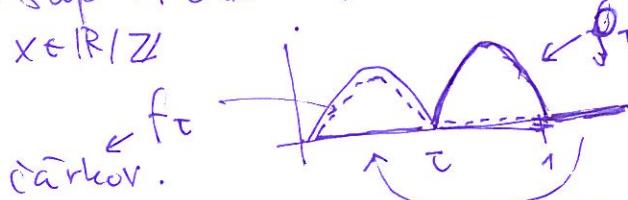
$$(\rho(t)f)(x) := f(x-t), x, t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

1. $\rho \dots \rho(t) : C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{do}} C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$; $\rho(t)f$ je všeobecně spojite.
2. $\rho \dots$ homom. (tvr)
3. ρ je lineár. jako zobrazení $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\underbrace{C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}_H)$
 a op. topol. indukovaných $\|\cdot\|$.



$$\|f_\tau\| = 1, \quad \|\rho(\tau) - \text{Id}\|_{\text{op}} \geq \|\rho(\tau)f_\tau - f_\tau\| =$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |f_\tau(x-\tau) - f_\tau(x)|$$



V rozdílu se nevyvratit: s tímto sup je 1

$$\text{Tj. } \|\rho(\tau) - \text{Id}\|_{\text{op}} \geq 1 \quad \forall \tau: 0 < \tau < 1$$

$$\text{Trivialně } \|\rho(0) - \text{Id}\|_{\text{op}} = \|\text{Id} - \text{Id}\|_{\text{op}} = 0$$

Existuje i „přirozenější“ případ $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

Pojde nám o tzv. unitární reprezentaci, tj. H bude Hilbertův prostor; $(,)$ slk. součin na H .

Def: $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ reprezentace, nazveme unitární, pokud $\forall g \in G \quad (\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w) \quad \forall v, w$

Poz.: $T_j: \rho \xrightarrow{\text{do}} U(H) = \{T: H \rightarrow H \mid T^*T = TT^* = \mathbb{1}_H\}$

Obecní izometrie je slabší pojem, $= \xrightarrow{\uparrow} \text{Id}_H$

neb uemusi být na (tedy nemusí

být bijekce). Slabší: Izometrie, jež neoplňuje
rci v def $U(H)$.

• Pokud H je nad \mathbb{R} , stále mluvíme o unit. rep. Def T^* je
 $(T^*v, w) = (v, Tw) \quad \forall v, w$ uzávisle na telesi.

Pr.: 1. $\rho: SO(n) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ $\rho(g)(v) = g(v)$, tautologická repr. ortogonální grupy.

2. Shift $T(e_i) := e_{i+1}$ v separabilním Hilbertově prostoru H (uem na), $i \in \mathbb{N}_0$.

Speciální význam pro unitárnost je kompatibilita grupy.

Věta (unitarovitelnost repr. komp. grup): Budě G kpt. grupa a $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ repr. G na Hilb. prostoru $(H, (,))$

Pak existuje slk. součin $((,))$ na H , že $(\rho_g(H), ((,)))$ je unitární a topologie $(H, ((,)))$ a $(H, ((,)))$ jsou stejné.

Dk.: Nechť my je pravá (nutně i levá dle vety z minulé hodiny, $\Delta = 1$) Haarova měra na G . Definujme: $((v, w)) := \int (\rho(g)v, \rho(g)w) d\mu, \quad \forall v, w \in H$.

1. Kriterium: • $(\rho(g)v, \rho(g)w)$ je spojita (stačí pro $v, w \in H$)
 $\psi''(g, v) \quad \psi''(g, w)$
 na v, w). Spojitá na konc. má \int .

• $((v, v)) = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)v) d\mu \geq 0$
 ≥ 0

(jasné). $0 = ((v, v)) = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)v) d\mu = 0 \Rightarrow$
 $\geq 0 + \text{proj. } \rho(g)v = 0 \Rightarrow v = 0$

Je to sl. soudí.

2. ρ je unitární (málo by byl nesoudí): $\forall h \in G \quad \forall v, w \in H$

$$((\rho(h)v, \rho(h)w)) = \int_G (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w) d\mu = \\ = \int_G (\rho(gh)v, \rho(gh)w) d\mu g = \begin{cases} g^{-1} = h^{-1} \\ \text{je pravo} \\ \text{inv.} \end{cases} = \int_G (\rho(g)v, \rho(g^{-1})w)$$

$d\mu = ((v, w))$.] Stačila pravost.

3. $((,), ((,))$ -topologie. Ekvivalence norm. $\|v\|^2 = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)v) d\mu$

$\rho(g)v d\mu = \int_G (\rho(g)\rho(g)v) d\mu$. $\tilde{g} \mapsto (\rho(g)v)^T$ spojita
 (dok. repr. pomocí $((,))$) pro $\forall v \in H$. Je definována

kpt. \Rightarrow geometria.

Banach-Schauder (bodová sm. \Rightarrow sljn. sm. "):

$\sup_{g \in G} \|(\rho(g)v)\|_1 < \infty \quad \forall v$, což jsou právě otevřili, tak

$$\sup_{g \in G, \|v\|=1} \|(\rho(g)v)\|_1 (\sup_{g \in G} \|\rho(g)\|_{op}) < \infty$$

$$M := \sup_{g \in G} \|\rho(g)\|_{\text{op}} < \infty$$

znam!

$$\|\rho(g)v\|^2 \leq \|\rho(g)\|_{\text{op}}^2 \|v\|^2 \leq M^2 \|v\|^2$$

$$M^{-2} \|v\|^2 = M^{-2} \|\rho(g^{-1})\rho(g)v\|^2 \leq M^{-2} M^2 \|\rho(g)v\|^2 = \|\rho(g)v\|^2$$

$$c M^{-2} \|v\|^2 \leq \|v\|^2 \leq M^2 \|v\|^2 c, \text{ kde } c = \int_G dm \quad \begin{matrix} \text{(klanická)} \\ \text{normal.} \end{matrix}$$

4. ρ spoj. výš. $(H, H) \xrightarrow{3.} \rho$ je spoj. výš. (H, H) .

Celkovu $(\rho, (H, ()))$ je unitární reprezentace. \square

Definice: i) ρ bud. repr. G na sítiplném lok. konvexním topologickém prostoru H . Uzávřený podprostor $H' \subseteq H$ nazvu invariantní, jeli

$$\rho(g)H' \subseteq H' \quad \forall g \in G.$$

ii) Reprezentaci nazov irreducibilní, nemá-li žádoucí neutrivialní ($\neq 0$) vlastnost ($\neq H$) podprostor.

iii) Bud. repr. G na sítiplném lok. konv. top. prostoru H .

ρ' nazvu equivalentní ρ , pokud existuje lineární homeomorfismus $T : H \rightarrow H'$, že $T\rho(g) = \rho'(g)T$

$$(T \downarrow \circ \uparrow T) \quad \forall g \in G.$$

Oznámení: $\rho \cong \rho'$ nebo $(\rho, H) \cong (\rho', H')$

Pozn.: Ad uzavřenosť. Príklad s translacej spojiteľov:

$C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ zrejmé je \mathbb{H} -v. podprostорom, $\forall k > 0$, vč. $k=+\infty$

$C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ však nemá uzavřený v $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

($C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ bych chcel prohlásit za irreduc., avšak ďalšie aspekty by mi napäť umožnily mať uvedeného mnoho invariantných podprostorov.)

! Pozn.: Pokud (g, H) a (g', H') sú unitárni, tak

požadují navič projekčiu ekvivalenciu, aby $T : H \rightarrow H'$ byla izometrická bijektia, t.j.

$(Tv, Tw)_{H'} = (v, w)_H \quad \forall v, w$ (tedy leží unitár H' nazývaná).

Oznacenie: \hat{G} je možnosť všetkých irreducibilných unitárnych reprezentácií G podľa relácie ekviv. \simeq

[Obecneji \hat{G} / \simeq a \hat{G}_n / \simeq unitárnych irid.]

Pozn.: \hat{G} je říkať duality a jejich popis je hlavním predmetom teorie reprezentácií (topolo grup).

Def: Operátorům z definice ekviv. reprezentací se říká ekvivariantní nebo spléhající (nebo Θ -homomorfizm). Tyjich prostorů se nazívají $\text{Hom}_G(H, H')$ apod.

Pozorování: • $T \in \text{Hom}_G(H, H') \Rightarrow \text{Im } T$ je invariantní, pokud $\dim T < \infty$. $\text{Im } T$ uzavřený (jinde uzavěry a limity; spojitost je dobré přizpůsobena).

$$g'(g) \underbrace{T v}_{= w \in \text{Im } T} = T g'(g)v \in \text{Im } T$$

• $T \in \text{Hom}_G(H, H') \Rightarrow \text{Ker } T$ je invariantní! Uzavřenosť je spojitostí ($\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\})$; každý TVS je Hausdorffův + předpokladka). $v \in \text{Ker } T$, $g(g)v \in \text{Ker } T$? Ano, než

$$T(g(g)v) = g(g)Tv = 0$$

Dále jde H, H' ... konečné rozměrné a komplexní.

Zdá se, že se v Schur. lemmatu předp. že $\dim H, \dim H' > 0$.

Schurovo lemma o ekviv. zobrazení: $\text{Nicht } (\rho, H), (\rho', H')$ jsou dve vektorové prostory s reducibilními repr. na kon. dimenzionálních prostorech nad telosem \mathbb{C} . Pak

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(H, H') = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \rho \not\simeq \rho' \\ 1 \Leftrightarrow \rho \simeq \rho' \end{cases}$$

Dk.: a) $\dim_{\mathbb{C}} = 0 \Leftrightarrow \rho \simeq \rho' \Rightarrow \exists T$ bijektivní $\Rightarrow \text{Hom}_G(H, H') = 0$

b) $\dim_{\mathbb{C}} = 1 \Rightarrow \exists 0 \neq T: H \rightarrow H'$ a T spléhající: $\text{Ker } T \neq 0$. \Rightarrow

$\text{Ker } T = 0 \vee \text{Ker } T = H$. Druhá nelze, než T by bylo 0.

$\text{Im } T$ inv. $\Rightarrow \text{Im } T = H'$ v $\text{Im } T = 0$. Druhá nelze, než T by bylo 0.

Celkem T je inj. a na, tedy $\rho \simeq \rho'$.

c) $g \neq g' \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(H, H') > 0 \Rightarrow \exists T \text{ splétající nulový } \mathbf{z}.$
 Obdobně i jinak: $\text{Ker } T = 0 \vee \text{Ker } T = H \mathbb{C}$
 $\text{Im } T = 0 \mathbb{C} \vee \text{Im } T = H' \cdot$ Celkem T je bijektivní,
 což je spor s $g \neq g'$.

d) Nájemnost (zákl. v. algebry): $g \cong g' \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(H, H') \geq 1$
 (exist. spléty) Buděte $T, S \in \text{Hom}_G(H, H')$. Cílem je jich lin.
 nuz. Pokud je asy. jeden z nich nulový, je ovl. z. Nechť
 oba nejsou, např. T . Pak T je bijektivní (stejně jako v_b) \vee
 c), $\text{Im } T = H' \wedge \text{Ker } T = H$ kvůli nulovostí). Vezmě
 $T^{-1}S : H \rightarrow H \xrightarrow{\text{Gauss/Lionville/Sylvester}} \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ Ker}(T^{-1}S - \lambda) \neq 0$ (existen
 ce vl.v. nad \mathbb{C})
 $T^{-1} \in \text{Hom}_G, S$ také, Id také $\Rightarrow \text{Ker}(T^{-1}S - \lambda \text{Id}) \neq 0$
 $\xrightarrow{\text{inv. + red.}} \text{Ker}(T^{-1}S - \lambda \text{Id}) = H \Rightarrow T^{-1}S = \lambda \text{Id}$.
 T j. $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(H, H') \leq 1$ □

Pozn.: 1. \exists modifikace nad \mathbb{R} (nad H). Soudružství $g : \text{SC}(2) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ fiktivní. vliv. red.: $\text{Id} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ splétají:
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\varphi & c\varphi \\ -c\varphi & s\varphi \end{pmatrix}$ tzn. sympl. forma
 $\begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\varphi & c\varphi \\ -c\varphi & s\varphi \end{pmatrix}$. Lze ukázat, že generují $\text{Hom}_{\mathbb{R}}$
 $\dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_G = 2$; ale $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G = 1$ opět.

2. Zobecnění pro unitární reprezentaci mimo repr. kpt.
 grup na Hilb. prostorech (viz unitárnitativitačnost v tomto
 druhém případě).

3. Nech. irred. nekoji¹ kromě nulového řádu¹ splétají¹

9.

Ekv. irreducibilní¹: Splétají¹ jsem jein na's. jiducho řešeního.
meho. Příp. $H=H'$ jde o Id.

Důležité jsou reprezentace abelových gr.

\uparrow v harmonické analýze (ter. komut. harmon. anal)
(Níže Opoz. $\dim H > 0$)

Veta (irred. repr. abelových): (ρ, H) budou konečné dimenzionální¹
irreducibilní¹ komplexní repr. abelovské G. Pak $\dim_{\mathbb{C}} H = 1$.

Dk.: 1) $\forall h \quad \rho(h)$ je splétají¹. $\rho(g)\circ\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) =$
 $= \rho(h)\circ\rho(g) \quad \forall g \in G$

2) Dle Schur. lemmatu $\forall h \exists c_h \in \mathbb{C}: \rho(h) = c_h \mathbb{1}_V$

3) $v_0 \in V$ budou nemulovy¹. Pak $\rho(h)v_0 = c_h \mathbb{1}_V v_0 =$
 $= c_h v_0 \in \langle v_0 \rangle$. Odhad $\langle v_0 \rangle$ je iuv.

4) Z irreducibility (ρ, H) je $V = \langle v_0 \rangle$, tj. $\dim V = 1 \quad \square$

Posu.: 1) Komplexnost V opak. rcl. důl: $\rho: SO(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ tauto
a irred, $SO(2)$ abel, ale $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^2 = 1$).

Rovnost v závorce je nutně interpr. k zv. komplexní¹
strukturem.

2) $\mathbb{C}(t)^X$ telosrac. fá. bez 0. To je grupa.

$\rho: \mathbb{C}(t)^X \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}(t))$, $\rho(f)(g) = fg$.

Je irred., ale $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t) = +\infty$. Tj. pp. k-dimenze
je podst. Zde ji ovšem v naším kontextu otáčka
sloji hosh podstatná. (Aby zapadla do kont. HA,
museli bychom využít $\mathbb{C}(t)^X$ topol. a testovat

8. HODINA

Míňule: reprezentace - iuv. pp., irreducibilita, spléťající operator, ekvivalence
 - spojitosť repr. (príklad, \cong top. Aut(H) norm.)
 utávrienosť iuv. pp., $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$)

- unitarizovat. repr. konvp. na H. p. (princip principovania - B-St.)

- Schur pro k.d. repr., rep. ab. pro k.d. prostory
 \hat{G}

G bud. lok. komp. grupa (predpoklad celekroznych prirodnych)

Pozn.: $\forall \chi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ reprezentace sluje charakterom; \mathbb{C} std. top.
 obenji $\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{k})$, \mathbb{k} topol. telo, maf. det. valiaci

Pozn.: Charakter se používá v teorii repr. i v jiných významech
 (stope reprezentací: $g \mapsto \text{Tr}_{\mathbb{C}}(g)$, pokud existuje; méně běžejí
 kvazi definici jako akce centra univ. obalující algebry).

Pozorování: Pokud χ_1, χ_2 jsou charaktery, pak definujme
 $\chi_1 \chi_2: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$, $(\chi_1 \chi_2)(g) := \chi_1(g) \chi_2(g)$, $g \in G$.

$\chi_1 \chi_2$ je také reprezentace (nezávisle na stře G):

Dk.: $(\chi_1 \chi_2)(gh) = \chi_1(gh) \chi_2(gh) = \chi_1(g) \chi_1(h) \chi_2(g) \chi_2(h) =$
 $= \chi_1(g) \chi_2(g) \chi_1(h) \chi_2(h) = (\chi_1 \chi_2)(g) (\chi_1 \chi_2)(h)$.

Spojitosť: souborně určený $(1 \cdot 1_{\mathbb{C}})$.

Pozorování: $G := \{ \chi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}) \mid \chi \text{ je charakter } G \}$ má strukturu
 abelovské grupy.

Dk.:
 • $\chi(g) := \text{Id}_{\mathbb{C}} \in \widehat{G}_1$, \bullet $\chi_1 \chi_2$ viz výšky
 • $\chi \in \widehat{G}_1 \Rightarrow \bar{\chi}^{-1} (\bar{\chi}(g) := \chi(g)^{-1}) \in \widehat{G}_1$ (spoj. + komom.
 triviální)
 • asociativnost: $[(\chi_1 \chi_2) \chi_3](g) = [\chi_1(g) \chi_2(g)] \chi_3(g) =$
 asoc. $\mathbb{C} = \dots = [\chi_1(\chi_2 \chi_3)](g)$

- komutativnost: $(\chi_1 \chi_2)(g) = \chi_1(g) \chi_2(g) = \chi_2(g) \chi_1(g) = (\chi_2 \chi_1)(g)$. \square^2

Pozn.: nezávislost na výberu reprezentantů?

$$\chi_1 \cong \chi_1', \chi_2 \cong \chi_2' \quad \chi_1' \chi_2'(g) = \chi_1'(g) \chi_2'(g) = T \tilde{\chi}_1(g) T^{-1}$$

$$\cdot \chi_2(g) S = T T^{-1} \chi_1(g) \chi_2(g) S^{-1} S = \chi_1(g) \chi_2(g) = (\chi_1 \chi_2)(g)$$

komut. \square

$\Rightarrow \hat{G}_1 := \{\chi \mid \chi \text{ je charakter } G\} / \cong$ má laté stru ab.

$$\text{grupy } ([\chi_1][\chi_2])(g) := \chi_1(g) \chi_2(g) \quad \forall g \in G$$

• Někdy vhodné „nahrazení“ \hat{G}_1 nejaky w selektorem na \hat{G}_1 .

Pozn.: Všimněte si, že můžeme dle výbory reprezentací abelovských v případě komutativního G ztotožnit (mámerovnost) $G_1 = \{\chi \mid \chi \text{ je irreducibilní reprezentace } G \text{ na koudim. v. prostoru}\}$. Analogicky pro \hat{G}_1 .

Nyní se němujme klasické látce - determinaci i red. reprezentací abelovských abelovských grup.

! Príklad: Irreducibilní repr. S^1 na H. p. konečné dimenze. (Pozn. kou. dimenze lze v tomto případě dokázat jeho disl. i reducibilita a spojitost. My již předpokládáme.) Repr. nazveme $\tilde{\chi}$ či χ ...

z Vorrepr. abel.: $\dim H = 1$. Tedy $\tilde{\chi}: S^1 \rightarrow \text{Aut}(H)$, kde je char.

z Vorrepr. abel.: $\dim H = 1$. Tedy $\tilde{\chi}: S^1 \rightarrow \text{Aut}(H)$, kde je char.

z unitarovitost: (g, H) je ekv. unitární, nebo přímo dokazuje: $1 = \tilde{\chi}(1) = \tilde{\chi}(e^{2\pi i}) = [\tilde{\chi}(e^{2\pi i})]^q \quad \forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \tilde{\chi}(e^{2\pi i}) \in U(1) \Rightarrow \tilde{\chi}(e^{2\pi i}) = \tilde{\chi}(e^{2\pi i})^p \in U(1).$$

Dále spojitost (spojitost repr. nebo silná spoj.) Zde význam bude:

$$\bullet \tilde{\chi}(e^{2\pi i \varphi})v = \tilde{\chi}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2\pi i \varphi_n}\right)v = \lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{\chi}(e^{2\pi i \varphi_n})v] =$$

$\begin{cases} \text{jako s poj.} \\ \rightarrow U(1) \\ \text{a oper. top} \end{cases}$

$$\varphi \in [0, 1], v \in H \quad H (\cong \mathbb{C}) \quad p_n \in \mathbb{Q}$$

$$\tilde{\chi} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(e^{2\pi i \varphi_n}) \right]_{\text{lim v}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(e^{2\pi i \varphi_n}) \right]_v =$$

Víto o limitesouciu n
(to je onto „fotelž“) $\left| \begin{array}{l} = Av, \text{ kde } A \in U(1), \text{ nebat } U(1) \text{ je uzavřená} \\ v \text{ Aut }(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{array} \right.$

Tj. prímo jme obdrželi, že $\tilde{\chi}$ je dokoněl unitární. $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ položme

$$\chi(e^{2\pi i \varphi}) := \tilde{\chi}(e^{2\pi i \tilde{\varphi}}), \text{ kde } \tilde{\varphi} \in [0, 1) \text{ a } \tilde{\varphi} \equiv \varphi \pmod{\mathbb{Z}}. \text{ Zjist.}$$

Kvůli učitelnosti na předu $\chi_\varphi := \chi_{\substack{2\pi i \varphi \\ (\in \text{Aut } \mathbb{C})}}$. Máme $\chi_{\varphi_1 + \varphi_2} = \chi_{\varphi_1} \chi_{\varphi_2}$ když $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

zvolme $l_u = l_v$, aby ručiček výřezu $l_u \varphi$ byl disj. s paprsky $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$

a $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$. Pak $l_u \chi_{\varphi_1 + \varphi_2} = l_u \chi_{\varphi_1} + l_u \chi_{\varphi_2}$ a položme

$$f(\varphi) := l_u \chi_\varphi. \text{ Máme } f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2). \text{ Její spojita-}$$

řízení značí $f(\varphi) = c\varphi$, $c \in \mathbb{C}$. Používáme již známou

fact, že $\tilde{\chi}$ je spojitej i, jako zobrazení $S^1 \rightarrow U(1)$, kde $U(1)$ má normovou topologii $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, jíž se kvýží s operačorovou,

ale přidělením se silou, jíž definuje spojitosť reprezentace.

Takže $\chi(e^{2\pi i \varphi}) = e^{2\pi i c \varphi}$. Kvůli unitaritě χ může $c \in$

\mathbb{R} . Spojitosť χ vyplývá $c \in \mathbb{Z}$ (proč!!).

Nyní ověříme, že $\chi_m(e^{2\pi i \varphi}) = e^{2\pi i m \varphi}$ je monom. (triv.)

a spojita (opět jen dle začkl. nelze z mat. analýzy) a

získáme, že $\chi_m \in \widehat{S^1}$.

Označme-li $\widehat{S^1}_{\text{k.d.}}$ (Hilb. k.d. repr. S^1), vidíme $\widehat{S^1}_{\text{k.d.}} \simeq \mathbb{Z}$.

[Dokazujeme, $\widehat{S^1} \simeq \mathbb{Z}$ (pro Hilberta H.p.)]

Pozn.: $f(\varphi_1) + f(\varphi_2) = f(\varphi_1 + \varphi_2)$ značí Cauchyho funkcionální rovnice.

$$\bullet f(n) = f(n-1+1) = f(n-1) + f(1) = \dots = f(1) + \dots + f(1) = \underbrace{n f(1)}_{n\text{-krát}} \quad !!$$

$$\bullet c = f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{q\text{-krát}}\right) = q f\left(\frac{1}{q}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{c}{q} \quad \text{C}$$

9. hodina

$\widehat{G}_1 = \{ \chi : G \rightarrow U(\mathbb{R}) \mid \chi \text{ je irred. rep. na } H.p. \text{ a } \chi \text{ unitarní} \}$

brauž jako selektor (výber reprezentací).

Tzíjsme máliže $\widehat{G}_{k.d.}$ abelovská grupa.

Definice (Fourierova transf.): $\forall \chi \in \widehat{G}_{k.d.}, f \in L^1(G)$, kde G je lokálně kompaktní grupa definujme $\widehat{f}(\chi) = \int_G f(g) \overline{\chi(g)} d\mu$, funkci $\widehat{f} = F(f) : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$.

Pozn.: 1. $\|f\chi\|_1 \leq \|f\|_1 \Rightarrow \widehat{f}$ je dobré definována a $\|\widehat{f}\|_1 \leq \|f\|_1$.

2. Uvažujeme i G neabelovskou.

3. $G = \sum \widehat{f}(e^{2\pi i u \chi})$ je Fourierův koeficient f

$G = \mathbb{Z} / \widehat{f}(e^{2\pi i u \chi}) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} f(u) e^{2\pi i u \chi}$ kouvalenci δ_χ pro hy, když máte teorii distribucí (dualní $\mathfrak{S}, \mathfrak{C}, \mathfrak{E}_c, \mathfrak{D}, \dots$).

Využení: $f, g \in L^1(G)$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ pro každou lokál. komp. grupu a (teorii) H.u.

$$\text{Dk. : } \widehat{f * g}(\chi) = \int_G (f * g)(x) \overline{\chi(x)} d\mu_x = \int_G \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu_y \overline{\chi(x)} d\mu_x$$

Fubini

$$= \int_G f(y) \int_G g(y^{-1}x) \overline{\chi(x)} d\mu_x d\mu_y = \int_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)}$$

$$\int_{x \in G} g(y^{-1}x) \overline{\chi(y^{-1})} \overline{\chi(x)} d\mu_x d\mu_y = \left| \begin{array}{l} z = y^{-1}x \\ z \in G \end{array} \right| =$$

$$= \int_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)} \int_{z \in G} g(z) \overline{\chi(z)} dz = \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi). \quad \square$$

Posu.: 1. $\overline{\chi(y^{-1})} \overline{\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1})} \overline{\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1})\chi(x)} = \overline{\chi(y^{-1}x)} =$
 $\overline{\chi(y^{-1}x)}$. Rovnost tak neovlivňuje možnosti uvažování
 struktur grupy \widehat{G} .

2. Na abelovské grupě \widehat{G}_1 lze zavést topologii, která učiní \widehat{G}_1 lokálně kompaktní.

Def: \widehat{G}_1 bude vybaven kompaktně-otvřenou topologií, tj. zadanou (\subseteq)
 z top. na $\mathcal{C}(G, \mathbb{Q})$ generovanou $O(K, V) := \{x \in \mathcal{C}(K, V) \mid x(K) \subseteq V\}$, kde
 kompaktní $K \subseteq G$ a V otevřená v \mathbb{Q} . To bude být topologie
 na \widehat{G}_1 .

Věta: \widehat{G}_1 je topologická grupa, vše kompaktně-otvřené topologie.

Dk.: Dokážeme, že $\alpha(x, y) := xy^{-1}$ je spojite.

$$\begin{aligned} & |(x(x)y(x)^{-1} - x'(x)y'(x)^{-1})| \leq |x(x)y^{-1}(x) - x(x)y'^{-1}(x)| + \\ & + |x(x)y'^{-1}(x) - x'(x)y'^{-1}(x)| = |y^{-1}(x) - y'^{-1}(x)| + \\ & + |x(x) - x'(x)|, \quad \forall x \in G. \end{aligned}$$

$$O_{K, \frac{\varepsilon}{2}}(xy^{-1}) = \{r \in \widehat{G} \mid \|yr - xy^{-1}\|_K < \frac{\varepsilon}{2}\}, \|r\|_K = \sup_{x \in K} |rx|.$$

Je tedy zřejmě, že $O_{K, \frac{\varepsilon}{2}}(x) \times O_{K, \frac{\varepsilon}{2}}(y) \subseteq O_{K, \frac{\varepsilon}{2}}(xy^{-1})$, tj. $\alpha : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ je spojite.

Hausdorffovskost: $x, y \in \widehat{G} \Rightarrow x(g) \neq y(g) \exists g$
 $x \in O(\{g\}, U_1) =: O_1$ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
 $y \in O(\{g\}, U_2) =: O_2$ Hausd. \mathbb{Q}

$$\text{Zjistíme } O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

□

Výpráklad: $G = C_n = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k=0, \dots, n-1\}$ budoucyclická grupa. Diskretní!
a trochu Hausdorffova (top. zdečlení \mathbb{C}), h. lok. kompaktní.
teorie repre- Počítací měra jí Haarova (leží i pravá).
zentaci

C_n je abelovská $\Rightarrow (\widehat{C}_n)_{k.d.}$ sestává jen z jednoromérych
reprezentací.

Opatrování $\mathbb{C}[G] := \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp}(f) < \infty\}$ grupová \star algebrou

$\mathbb{C}[G] \cong \langle \{f_g, g \in G\} \rangle$ jako \mathbb{R} -vekt. prostor, kde

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 0 & g \neq h \\ 1 & g = h \end{cases} \in \mathbb{C}[G] \quad \text{balte: i) } f = \sum_{g \in G} f(g) \delta_g \text{ sumující funk.} \\ \text{ii) } \sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g = 0 / h \Rightarrow \sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g(h) = 0 \Rightarrow \lambda_h = 0 \forall h \end{math>$$

$\text{Conj}(G) := \{C \subseteq G \mid C \text{ je konjugacií trídy v } G\}$

$\text{Conj}(C_n) \cong C_n$, nebat C_n je abelovská.

- $(\widehat{C}_n)_{k.d.} \cong \text{Conj}(C_n)$ izomorfismus v kategorii muo-
žin (Set). Platí pro G konečnou: $(\widehat{G})_{k.d.} \cong \text{Conj}(G)$.
- $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{[V] \in \widehat{G}} (\dim V) V$ (Další zábecem je Peter-
Weyluv teorema pro $L^2(G)$,
kde G je kompaktní.)

Pro G konečnou.

Vlivařská značení $(g \cdot f)(h) := f(g^{-1}h)$ tzn. pravou
 $(Rgf)(h)$

regulární reprezentaci.

$\star)$ Násobení je konvolucí: $(f * g)(x) := \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x)$ $\left| \begin{array}{l} (f * g)(x) = f(x)g(x) \\ \text{jde o alternativní "množ. v } \mathbb{C}[G] \end{array} \right.$

Všimněte si, že v případě konečných abelovských

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{\widehat{G}} (\dim V) V \quad \& \text{ reprezentace abelovských}$$

poškyhne, že $\widehat{G}_{k.d.} \cong G$ ($\cong \text{Conj}(G)$). Definujme

$$\chi_m(g)v := g^m v \quad \forall v \in \mathbb{C}, \forall g \in C_m, m = 0, \dots, m-1$$

$$\text{Fred. k dim } \mathbb{C}, \chi_{m_1} \neq \chi_{m_2} \text{ k } m_1 \neq m_2, \frac{2\pi i k m_1}{m} = \frac{2\pi i k m_2}{m} \Leftrightarrow \frac{k}{m} (m_1 - m_2) \in \mathbb{Z} \text{ k } k \text{ spc } k=1 \text{ m } | m_1 - m_2 \Rightarrow m_2 \equiv m_1 \pmod{m}$$

$$\widehat{C}_{m.k.d.} \cong \{\chi_m \mid m = 0, \dots, m-1\} \text{ izom. n set (bijekce)}$$

$$(\mathcal{F}f)(\chi_m) = \sum_{k=0}^{m-1} f(e^{\frac{2\pi i k}{m}}) e^{-\frac{2\pi i k m}{m}} \quad \forall f \in \mathbb{C}[G] \cong L^1(G)$$

$$(\mathcal{F}\delta_h)(\chi_m) = \sum_{k=0}^{m-1} \delta_h(e^{\frac{2\pi i k}{m}}) e^{-\frac{2\pi i k m}{m}} = \\ h = e^{\frac{2\pi i l}{m}} \quad k=0 \\ = e^{-\frac{2\pi i l m}{m}} = \left(e^{\frac{-2\pi i l}{m}}\right)^m$$

Vzorec známý z tvr. "discrete Fourier transformace" (DFT).

Jde o důst. definice F.t. pro G lok. kroup. v případě

$$G = C_m.$$

Příklad: Four. transf. byvala zvykem definovat jen na G lok. kroup. a abelovských. Uvaž. je definice obecnější.

$$G = S_3$$

$$\text{Conj}(S_3) \cong \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 1 \cdot 2 \\ \hline 3 \cdot 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \cdot 2 \\ \hline 1 \cdot 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \cdot 1 \\ \hline 2 \cdot 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \cong$$

$$\cong \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} 3 = 3 \\ 3 = 2 + 1 \\ 3 = 1 + 1 + 1 \end{array} \right\} \cong \text{Par}(3)$$

Theorie repr.: $(\widehat{S}_3)_{k.d.} \stackrel{\text{v.v.}}{\cong} \text{Conj}(S_3) \rightarrow 3 \text{ ueber. ir. rep.}$

$$\dim \mathbb{C}[S_3] = \# S_3 = 6$$

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus (\dim V) V \quad | \quad 6 = \sum_{i=1}^3 (\dim V_i)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 \\ 6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 \\ 6 = 3^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{zurue}} \begin{array}{l} \dim V_1 = 1 \\ \dim V_2 = 1 \\ \dim V_3 = 2 \end{array}$$

$$\chi_1(g) := \text{Id}_{\mathbb{C}} \quad \forall g$$

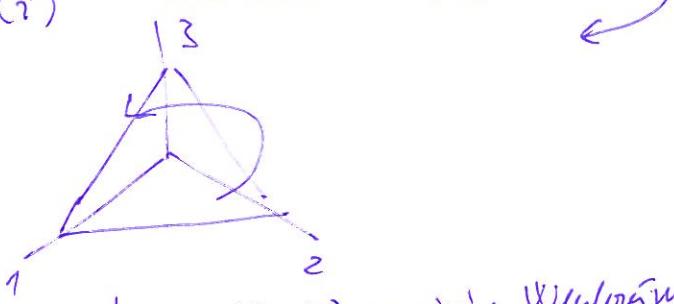
$\chi_2(g) = \text{sgn}(g) v, v \in \mathbb{C}$. Die repr., wobei sgn je kompl.

Zwei reelle 2-dimensional

$$V_3 := \left\{ x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ base \mathbb{C}^3 .

$$\rho_3(g)v := \sum_{i=1}^3 x_i e_{g^{-1}(i)}$$



Mit einer S_3 operiert positionell.

$$(\mathcal{F}f)(\chi_1) = \sum_{g \in S_3} f(g)$$

$$(\mathcal{F}f)(\chi_2) = \sum_{g \in S_3} \text{sgn } g \cdot f(g)$$

| Form. (1) a (2) sowing's Weylform
| projecting over $\bigotimes^3 \mathbb{C}^n$
| (viz Goodman, Wallach:
| ... Classical Groups...)
| zverte

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{F}\delta_n)(\rho_3) = \sum_{g \in S_3} \delta_n(g) [\rho_3(g)]^* \\ \text{mit } \rho_3 \text{ neuer charakter} \end{array} \right\} \quad \text{Notwendig j. i. def. unzuverl.}$$

$$\bullet f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_p \text{krát}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{q}\right) = p f\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}. \quad 4$$

• Zespojitoská (aherstoty \mathbb{Q} v \mathbb{R}): $f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

[„Mnohočlenské řešení užlovaých „balíků“ \mathbb{R} nad \mathbb{Q} .”]

$$\underline{\text{Pozorování}}: \bullet c_n(f) := \int_0^1 f(\varphi) e^{-2\pi i n \varphi} d\varphi, \quad \varphi \in [0, 1], \quad \text{jde}$$

tzv. n -by' koef. F. řady 1-periodické funkce
 $\in L^1(\mathbb{R})$. (ctážky bodové konvergence ujmíšování.)

$$\text{Je řady } \overline{[c_n(f) = \int_0^1 f \bar{\chi}_n d\mu]}, \quad \text{kde ujmí}$$

$$\mu(U) := \int_U \chi_U (\cos 2\pi \varphi, \sin 2\pi \varphi) d\lambda(\varphi), \quad U \subseteq S^1 \text{ měřitelná}$$

Leb. měřena \mathbb{R}

Ide o tružníku jako v příkladě 4 Haarových
 měr. Je využití jinou „parametrizaci“ kružnice
 (V glob. analýze ctážka parametrizací prostatuá,
 byť se pak měří nezávislost na příp. orientovaných
 reparametrizacích, na nich.)

$$\bullet \text{Konvergence: Máme } \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \varphi} \rightarrow f$$

$\in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \text{jde je } 2\pi \text{ periodická.}$

(Bodové konvergence: $\sum |c_n| n^k < \infty \wedge f$ spoj.
 \Rightarrow dále $(\sum c_n (e^{2\pi i n \varphi})^{(k)}) \rightarrow f$ bodově
 možna' za delších drobných předpolodí.)

Nelze \sum reprezentovat barej' jde integrál

podle Haarovy měry, jak v rámci vysle?

! Příklad : Irred. repr. \mathbb{Z} na k. d. (Hilb.) prostoru.

Z věty o repr. komut. $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(H) \Rightarrow \dim H = 1$.
 $\chi(m+n) = \chi(m)\chi(n)$. Opět logaritmuj; bera oklad na výřezu. Dospejí ke Cauchyově rovnici.

$\chi_c(m) = e^{\frac{2\pi i m}{c}}$, $c \in \mathbb{C}$ libovolné. χ_c je zřejmě repr. \mathbb{Z} na \mathbb{C} . Irreducibilita, již jsme příliš nezmínkováli, je u repr. dim 1 zřejmá: Cílová žádoucí metr. v. ul. pro prostor.

- Chceme-li však ještě unitarní, získáme omezení $|e^{mc}| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} c = 0 \Rightarrow$ uvažujeme reálné c , jen $\chi_x(m) = e^{\frac{2\pi i x m}{c}}$, $x \in \mathbb{R}$. Celkem $\chi_x \in \hat{\mathbb{Z}}$ (spojitost sami).

- Vsieme si, že $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$, pak $\chi_x = \chi_y$.

- Definujeme-li nyní následkem s předp. unitarity,

$\hat{\mathbb{Z}}_{k.d.} := \{ \chi \mid \chi \text{ je irred. unit. repr. } \mathbb{Z} \text{ na k.d. Hilb. prostoru} \}$, vzdívme, že $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}_{k.d.}$, $r \mapsto \chi_r$ je mo. injektivita z minimálními periody $z \mapsto e^{2\pi i z}$. Celkem

$$\hat{\mathbb{Z}}_{k.d.} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

! Vsieme si, že $\hat{\mathbb{Z}}_{k.d.} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ a

$$\hat{\mathcal{S}}^1_{k.d.} \cong \mathbb{Z}. \quad \text{Toto je za'kladem}$$

Pontrjaginovy duality.

Pozn.: Ve fyzice (kvantové) typické může $\mathbb{R} \rightarrow i\mathbb{R}$ a mít iho $\mathbb{Z} \rightarrow i\mathbb{Z}$.

! Příklad: Irid. unit. repr. \mathbb{R} na k.d. Hilb. prostoru.

Opet dim $H=1$. $\chi: \mathbb{R} \rightarrow U(1) \subseteq \mathbb{C}$ budoucoby,

tedy spojity homomorfismus \mathbb{R} do $U(1)$.

$\exists \delta > 0 \quad \chi([- \delta, \delta]) \subseteq \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ respoj.

Nechť $y \in [-\frac{1}{4\delta}, \frac{1}{4\delta}]$, t.e. $\chi(\delta) = e^{2\pi i \delta y}$.

($\exists!$ Jedu $y \in [-\frac{1}{4\delta}, \frac{1}{4\delta}]$ pro $e^{2\pi i \delta y} \in \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.)

Dale analogicky (pro dlejší jinou y) je zároveň logaritmí...: $\chi(\frac{\delta}{2})^2 = \chi(\frac{\delta}{2})\chi(\frac{\delta}{2}) = \chi(\delta) = e^{2\pi i \delta y} \Rightarrow$

$$\chi(\frac{\delta}{2}) = \pm e^{2\pi i \delta y} = \pm \cos(\pm \pi \delta y) \pm i \sin(\pm \pi \delta y) \in$$

$\in \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\} \Rightarrow \chi(\frac{\delta}{2}) = e^{2\pi i \delta y}$. Poluáujeme-li, pak

$$\chi(\frac{\delta}{2^n}) = e^{2\pi i \delta \frac{y}{2^n}}. \text{ Dale } \chi(\frac{k}{2^n} \delta) = (e^{2\pi i \delta \frac{y}{2^n}})^k$$

$$= e^{2\pi i \delta y \frac{k}{2^n}}, \text{ ze spojitosti a hustoty}$$

$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}: \chi_y(x) = e^{2\pi i xy} \quad \forall x \in \mathbb{R};$ označení

tedy χ_y . Celkově opet analog. om. (unitarity nutná pp.) $\widehat{\mathbb{R}}_{k.d.} \cong \mathbb{R}(\chi_y \leftrightarrow y)$.

Pozn.: Zde vidíme $\widehat{\mathbb{R}}_{k.d.} \cong \mathbb{R}$, tj. „ \mathbb{R} je samodualní“.

Coby to znacílo pro konvergenci? $f = \widehat{\widehat{f}}$? Kde

$$\widehat{\widehat{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i xy} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\chi_y(x)} dx \text{ a } \int_{\mathbb{R}} \dots = f$$

(+) Cyba v Deitmar 'First course on harm.' : $\operatorname{Re} z > 0$. NE

Vyšlouží tedy složitou formuli pro inverzi Fourierovy transformace?

CVIČENÍ 8

$(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ je marduiu užitkovské (Užit.)

V: $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ nemá říplus t.v.s. (nad \mathbb{Q}) .

Dk.: Pro $p \geq 5$. $1 < a < p-1$ $\exists a$ (pro $p=2 \vee 3$ už) inspirace
wikipedia

$$x_n := a^{p^n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\|a^{p^{n+1}} - a^{p^n}\|_p = \|a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)\|_p = (*)$$

Dle důst. Eulerovy věty (\cong malé Fermatova věta): $a^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0(p^n)$, neboť

důst.
Eul. fce: $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1) : 1, 2, \dots, p-1$
 $\quad \quad \quad p+1, p+2, \dots, 2p-1$
 $\quad \quad \quad \vdots$
 $\quad \quad \quad p^{n-1}+1, \dots, p^{n-1}p-1 < p^n \quad \left. \begin{array}{l} p^{n-1}(p-1) \\ \text{neodděl. číslo} \end{array} \right\}$

$$(*) = \underbrace{\|a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)\|_p}_{p^n \rightarrow \infty} < p^{-n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \text{ Tj.}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|_p = 0$. Dílčí marduiu užitkovskosti: tato

slouží pro cauchyovskost (Existuje $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$)

Pp. $\forall x_n \rightarrow x \in \mathbb{Q}, x = \lim_n x_n \Rightarrow |x|_p = \lim_n |x_n|_p$

pozor! opacní Δ -uvolnění.

$\forall n \in \mathbb{N}: p \times a^{p^n} \Rightarrow |x_n|_p = 1, \text{ tj. } |x|_p = \lim_n 1 = 1.$

Dalle $x \neq 0$. Rovněž $\underline{x} = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = \lim_n (x_n)^p =$

$$= (\lim_n x_n)^p = \underline{x^p}_{x \neq 0} \Rightarrow x^{p-1} = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$0 < x-a < p \Rightarrow p \nmid a-x \Rightarrow |x-a|_p = 1$$

Deklikož $x_n \rightarrow x$, tedy $\exists n_0 \forall n \geq n_0 \ |x_n - x|_p < |x - a|_p^{(**)}$, tj.

$$|a^{p^n} - x|_p < |x - a|_p \quad \text{nebo} \quad |x - a|_p = |x - a^{p^n} + a^{p^n} - a|_p$$

$$\leq \max\{|x - a^{p^n}|_p, |a^{p^n} - a|_p\} \quad (\text{málo.})$$

$$|x - a|_p > |x - a^{p^n}|_p \quad (**) \Rightarrow |x - a^{p^n}|_p < |a^{p^n} - a|_p, |x - a^{p^n}|_p$$

vezměte maxim. Tj. max. je $|a^{p^n} - a|_p$.

$$|a - x|_p = |a^{p^n} - a - a^{p^n} + x|_p = |a^{p^n} - a|_p = |a|_p |a^{p^{n-1}} - 1|_p$$

$$[|a^{p^n} - x| \neq |x - a|_p \quad \begin{matrix} \Delta \text{ jenom} \\ \text{rovnováze} \\ \text{ne} \end{matrix}] \quad \begin{matrix} \text{při různých valecích} \\ \text{je } |a|_p = \max. \end{matrix}$$

$$= |a^{p^{n-1}} - 1|_p < 1 \quad \text{dle dříš. male F. vely.}$$

$\hookrightarrow |x - a|_p = 1$. Tj. $(x_n)_n$ je konvergentní.

Def: $\mathbb{Q}_p := \overline{(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)}$, záplnění! Tedy p-adické čísel.

Def: $(X, |\cdot|_X)$ buď normovaný prostor. $(Y, |\cdot|_Y)$ násob záplnění,

if \exists izomorfie $i: X \rightarrow Y$, $i^*(x) \neq x$ když $x \in Y$.

$\exists: Y = \{(x_n)_n \mid (x_n)_n \text{ Cauchy}\} / \simeq \quad (x_n)_n \simeq (y_n)_n \text{ rgg (def.)}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$. $i: X \rightarrow Y \quad i(x) := [(x, x, \dots)] \in Y$

$$\text{dlo } [x_n]_Y := \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_X$$

Konvergence $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow ([x_n]_X)_n$ Cauchy (obr. Δ)

$(x_n)_n \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathbb{R}$ záplnění $\Rightarrow \lim_n [x_n]_X$ existuje.

Tvrzení: \mathbb{Q}_p záplněního tělesa s normou již má správné operace.

5. Základy Banachových algeber a Gelfandovo
zobrazem!

Definice: Nechť G je lok. kompaktní grupa a μ je nejednačková Haarová měry. $L^p(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |f|^p d\mu < +\infty\}$ a $\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$.

Definice: $f, g \in L^1(G)$. Pak $(f * g)(x) = \int f(y)g(y^{-1}x) d\mu_y$ nazveme kouvalencí f a g , když existuje.

Věta (ex. kouv.): $f, g \in L^1(G) \Rightarrow f * g \in L^1(G)$.

Dk.: a) $f * g$ je měřitelná. Využívám, viz D.-E. "Principles".

b) $\|f * g\|_1 \leq \int \int |f(y)g(y^{-1}x)| d\mu(y) d\mu(x) \stackrel{\text{Fubiniho v.}}{=} \int \int |f(y)g(y^{-1}x)| d\mu(x) d\mu(y) = \int \int |f(y)g(x)| d\mu(x) d\mu(y) \stackrel{\text{linearity}}{=} \|f\|_1 \|g\|_1$

$$d\mu(y) = \int |f(x)| d\mu(x) \int |g(x)| d\mu(y) = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Pozn.: 1. $f * g \exists$ když s.v. (a je $\in L^1$).

2. Lze $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G) \Rightarrow f * g \exists$ s.v. ($1 < p, q < \infty$). Hölderova nerovnost.

3. měřitelnost není celá součást.

\mathcal{G} lok. komp $\Rightarrow (L^1(G), *, \|\cdot\|_1)$ algebraicko-axial. struktura

Hodlím k algebraické.

Veta: $(L^1(G), \ast, +)$ je asociačnú algebra nad \mathbb{C} .

Dk.: a) $\ast: L^1(G) \times L^1(G) \rightarrow L^1(G)$, do. Predch. veta.

$+ : L^1(G) \times L^1(G) \rightarrow L^1(G)$, do. Δ -kerovnosť (v §) + lineárita

b) Distr.: $[(g+h)\ast f](x) = \int_G (g+h)(xy^{-1})f(y)d\mu(y) =$

$\stackrel{\text{lineár}}{=} \int_G g(xy^{-1})f(y)d\mu(y) + \int_G h(xy^{-1})f(y)d\mu(y) =$

$= (g \ast f)(x) + (h \ast f)(x) \quad \forall x \in G$

Zprava analog.

• b) Asociatívnosť: $[f \ast (g \ast h)](x) = \int_{y \in G} f(y)(g \ast h)(y^{-1}x)d\mu(y)$

$$= \int_{y \in G} f(y) \int_{z \in G} g(z)h(z^{-1}y^{-1}x)d\mu(z)d\mu(y)$$

• $[(f \ast g) \ast h](x) = \int_{y \in G} (f \ast g)(y)h(y^{-1}x)d\mu(y) =$

$$= \int_y \int_z f(z)g(z^{-1}y)h(y^{-1}x)d\mu(z)d\mu(y) =$$

$$= \int_y \int_z f(y)g(y^{-1}z)h(z^{-1}x)d\mu(z)d\mu(y) =$$

$$= \left| z' = y^{-1}z \right| = \int_y f(y) \int_{z'} f(z')h(z'^{-1}y^{-1}x)d\mu(z')d\mu(y)$$

d) $c(+ \ast g) = (cf) \ast g = f \ast (cg) \quad \forall c \in \mathbb{C}$ tviv. (lineárita).

$$c(f \ast g) = cf \ast cg \quad \wedge \quad (c+d)f = cf + df \quad \begin{cases} \text{def} \\ \text{nás. sk.} \end{cases}$$

(5. Základy Banachových algeber a Gelf. zobecnění) 1

Definice: $(A, \|\cdot\|)$ nazvu Banachovou algebra, pokud A je algebra nad \mathbb{C} (asociat.) a $\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ je norma splňující $\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \forall a, b \in A$ (submultiplikativnost) a taková, že $(A, \|\cdot\|)$ je řízený normovaný prostor.

Tvrzení: Bud $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra. Pak $\cdot : A \times A \rightarrow A$ je spojité.

Dk.: $\lim_m a_m = a$, $\lim_m b_m = b$, $(a_n)_n, (b_n)_n$ sítě (máčí post.)
 $\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab\| \leq \|a_n(b_n - b)\| + \|(a_n - a)b\| \rightarrow \|a\| \cdot 0 + 0 \cdot \|b\| = 0$. omezený.

Pozn.: A je (asoc.) algebrou až když $\sum_{n=1}^{\infty} \|ab\|^n = A$ je okruh, t.j. k -vazebal $r(ab) = a(r(b)) = (ra)b$

Př.: 1. těleso \mathbb{C} s hodnotou, např. absolutní hodnota, $\|\cdot\|$ daje multipl.

$$2. \text{ Mat}(n, \mathbb{C}) \quad \|a\| := \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

$$\|ab\| = \left\| \sum_j a_{ij} b_{jk} \right\| \leq \sum_j \|a_{ij} b_{jk}\| = \sum_j \sum_{i,k} |a_{ij} b_{jk}|$$

$$\|a\| \|b\| = \sum_{i,j} |a_{ij}| \sum_{k,l} |b_{kl}| \geq \sum_j \sum_{i,k} |a_{ij}| |b_{jk}| = \|ab\|$$

$$3. V \text{ Banachov } B(V) := \{T: V \rightarrow V \mid T \text{ lín. spojité}\}, \quad \|\cdot\| \text{ norma na } V$$

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |Av| = \sup_{\|v\|=1} |Av| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{\|v\|}.$$

Spojité \Rightarrow omezené, $\|\cdot\|$ dobré definována

řízený \uparrow FTIAL ANAL.

3.1. Dále $K(V)$ kompaktní na V

3.2. $F(V)$ Fredholmovy ap. na V nejsou všeob. pros. $\frac{a_{ij}}{\lambda_{ij}}$

4. X lok. kompaktní top. prostor $C_0(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ spojité a } f \text{ má nerozestupný funk. v místech, kde}\}$

f má minimální hodnotu, počet

$\forall \varepsilon \exists$ hýček C_ε kompaktní X , že $|f(x)|_{C_\varepsilon} \leq \varepsilon$, ~~f je komp. na X~~ 2

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, kde $|\cdot|$ je abs. hodnota v \mathbb{C} . Supremum existuje.

dle výzvy o uvažování maxima na kompaktní množině. $|\cdot|$ je abs. h.
v \mathbb{C} .

Pozn.: V tomto případě uvažujeme $C_0(X)$ a zodoujme na sekce 4.

! 5. Globální (L¹(G), *, ||·||) $\|f\| = \int |f| d\mu_G$ je levá Haarova.

Definice: A Banachova algebra. Definujme $\Delta_A := \{m: A \rightarrow \mathbb{C} \mid$

(někdy shavový prostor) m homomorf. algebry (spojitý) a $m \neq 0\}$. Δ_A slouží struktuřním prostorům A a jimi průkazy shavovy:

Prv.: 1. $A = C_0(X)$, X lok. kompaktní (Nejdou to stavět
ze \mathbb{C}^* algebry.)

$$\forall x \in X \quad m_x: A \rightarrow \mathbb{C} \quad m_x(f) := f(x)$$

$$m_x(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x) = m_x(f)m_x(g) \text{ homom. alg.}$$

Pozn.: Spojitost v def. dekačíme, nejdílčí vlastnosti.

Pozn.: Homom. algebry: $m(a+b) = m(a) + m(b)$

$$m(ra) = r m(a)$$

$$m(ab) = m(a)m(b)$$

$a, b \in A$

$r \in \mathbb{C}$

Definice: $\forall m, n \in \Delta_A \quad (m \cdot n)(a) := m(a)n(a)$ a prirozené

$$(m+n)(a) := m(a) + n(a)$$

Ani m, n , ani $m+n$ nemusí být $\in \Delta_A$. □

Pozn.: $m, -m \in \Delta_A$ avšak $m+(-m) = 0 \notin \Delta_A$. Neur.
ani vekt. prostor.

Základní konstrukce - argumentace

Banach. alg. A nemusí mít v obecném jediný, tj. element

$1 \in A$, $1x = x 1 = x \quad \forall x \in A$.

Pr.: X lok. komp. nekompl. $C_0(X) \neq 1$

Argumentace algebry: $\tilde{A} := A \times \mathbb{C}$

$$(a, \alpha)(b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha \beta)$$

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta)$$

$$\|(a, \alpha)\|_{\beta}^{\sim} = \|a\| + |\alpha| \quad \forall a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{A} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

Soussov's & Alexandrovov komparativaci' $X \hookrightarrow X^\infty = X \cup \{\infty\}$
 alex. topal $\mathcal{C}(X^\infty) \cong \mathcal{C}(X)^\sim$
 dop. na X^∞
 viz Reih. - Echt.

$$\text{Pr.: } \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^2 \setminus \boxed{\text{---}} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\text{Pozu.: } \forall m \in \Delta_A \quad V(m) := \{x \in A \mid m(x) = 0\} \subseteq A \text{ uzavřená}$$

(Alg.j.) a kodi meiri 1 : i) $x_n \rightarrow x \in A, x_n \in V(m) \nrightarrow$

$$0 = \lim_m m(x_n) = m(\lim_n x_n) = m(x) \Rightarrow \\ x \in V(m); \text{ Spoj. m užívá, "uzavření".} \\ \text{předp.}$$

$$\text{ii) } m: A \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

$$\text{Ker } m \oplus \overline{\text{Im } m} \cong A$$

$$m \neq 0 \Rightarrow \overline{\text{Im } m} \cong \mathbb{C} \Rightarrow \text{Ker } m \text{ má kodi meiri 1} \\ \overline{\text{Im } m} = \text{Im } m'$$

$$x \stackrel{y}{\not\in} V(m) : m(\alpha y) = m(\alpha) m(y) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} m(x+y) = 0 \\ m(\lambda x) = \lambda m(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V(m) \text{ je ideal} \\ \text{v A.} \end{array}$$

$V(m)$ je uz. ideal a maximální \Rightarrow analogie 1
 ideallem $V(I)$ v algebraické topologii :

$$I(X) = \{p \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid p(a) = 0 \quad \forall a \in X\}$$

Verschwindungs id. \uparrow

$$(X := \{a \in \mathbb{k}^n \mid \forall p \in S \quad p(a) = 0\},)$$

$$I \subseteq \mathbb{k}[x_1^1, \dots, x_n^r]$$

$$V(I) = \{a \in \mathbb{k}^n \mid \forall p \in I \quad p(a) = 0\}$$

varieba

Definice: Pakud A nažidněk, nazveme ji unitálu' ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a^4$)
 $\Rightarrow 1 = 1'$)

Množ. invertibilních prvků v algebře A nazýváme

$$A^\times = \{a \in A \mid \exists a' \quad aa' = a'a = 1\}.$$

Lemma (o Neumannové radiu): Pakud $(A, \| \cdot \|)$ je unitálu' Banachova
 nebo algebra, $a \in A$ a $\|a\| < 1$. Pak

$$1) 1-a \in A^\times \wedge (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

2) $A^\times \subseteq A$ je otevřená.

$$\begin{aligned} \text{Dk.: } 1) s_n &= \sum_{m=0}^n a^m & \|s_{n+p} - s_n\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n+p} a^k - \sum_{k=0}^n a^k \right\| = \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|a\|^k \leq \\ &\leq \|a\|^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \|a\|^k = \|a\|^{n+1} \underbrace{\frac{1}{1-\|a\|}}_{\text{lim}} \end{aligned}$$

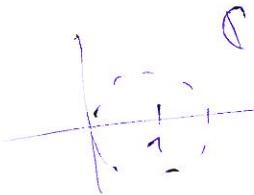
$\forall \varepsilon \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \|s_n - s_{n+1}\| < \varepsilon \quad (\|a\| < 1)$

Tj. $(s_n)_n$ je cauchyova řada \Rightarrow je konvergentní, tedy otevřená.

$$\begin{aligned} 2) (1-a)s &= (1-a) \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} = \\ &= 1 - (a + a^2 + \dots) = 1 \quad (\text{kde } a \text{ je jinou otevřenou řadou } = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n). \end{aligned}$$

2) Otevřenosť A^\times . Necht $x \in A^\times$. Uvažme

$$B_1(1) = \{y \in A \mid \|y-1\| < 1\} \subseteq A$$



$B_1(1)$ otevřená z definice a víc.

navic $\forall a \in B_1(1) \exists \tilde{a}^1$ a platí $\tilde{a}^{-1} = (1 - (1-a))^{-1} =$
 $= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-a)^n$ dle lemmatu o Neumannově řadě,

neboť $|1-a| < 1$ na $B_1(1)$. Tedy $B_1(1) \subseteq A^X$.

* $x \in A^X \Rightarrow x \in x \cdot B_1(1) = \text{Im } L_x|_{B_1(1)}$, $L_x|_{B_1(1)} : B_1(1) \rightarrow L_x(B_1(1))$. $L_x^{-1}|_{L_x(B_1(1))} : L_x(B_1(1)) \rightarrow B_1(1)$ je
 spojitý a i uverzál k $L_x|_{B_1(1)}$ speciálně $x \cdot B_1(1)$
 je homeomorfus' otevřeného $B_1(1)$.

Nechť $y \in x \cdot B_1(1) \Rightarrow \tilde{y}^{-1} = \tilde{z}^{-1} \tilde{x}^{-1} \Rightarrow x \cdot B_1(1) \subseteq A^X$
 $y = x \cdot z$

Pozn.: $(A^X, \cdot, 1)$ je topol. grupa. $A^X \subseteq A$ Hausdorffova
 uská, neboť (fetivná) v normované, tedy Hausdorffova
 ská A . Spojitost. Bylo. spojitost $??$. Ozn. $I := \tilde{a}^{-1}$
 $A^X \rightarrow A^X$, tj. $\forall a_0 \in A^X$ je I spojite v a_0 . $I(a) = \tilde{a}^{-1}$.

Chtěme $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in U_\delta(a_0) \cap A^X (\neq \emptyset)$ je
 $\|\tilde{a}^{-1} - \tilde{a}_0^{-1}\| < \varepsilon$. Bud $\|a - a_0\| \geq \frac{1}{2} \|\frac{1}{a_0}\|^{-1} = \delta$ (klas.
 trik). Pak $a = a_0 (1 - \underline{\tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a)})$. Spojitost normy

$$\|(I - \tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a)) - 1\| = \|\tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a)\| \leq \|a_0^{-1}\|_2 \|\frac{1}{a_0}\|^{-1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 1 - \tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a) \in B_1(1) \Rightarrow$ má inverzi. Navíc

$$(1 - \tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a))^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [\tilde{a}_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \left([a_0^{-1}(a_0-a)]^{-1} \right)^n a_0^{-1} \right\| = \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (a_0^{-1}(a_0-a))^n a_0^{-1} \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|a_0^{-1}\|^{n+1} \|a_0-a\|^n \\
 &\quad \text{podmnožitkovost} \\
 &= \frac{\|a_0^{-1}\|^2 \|a_0-a\|}{1 - \frac{1}{2} \|a_0-a\| \|a_0^{-1}\|} \stackrel{?}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n ? \\
 &\quad b^2 \rho < \varepsilon - \varepsilon \frac{1}{2} \rho b \Rightarrow \rho \frac{b^2}{1-b} + \rho \frac{b\varepsilon}{2} < \varepsilon \\
 &\quad \rho < \frac{\varepsilon}{b^2 + \frac{b\varepsilon}{2}} \quad \text{takové } \rho \text{ stačí volit,} \\
 &\quad \text{abakové } \exists \rho \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{a_0} \right\|
 \end{aligned}$$

Pozn.: $\exists \rho > 0$ je jde o reálné, zde $g \rightarrow 0$ reálné vnitřní lib. ε (burraviny na a_0 , jen a_0).

Definice: Pro $a \in A$: $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a-\lambda I \text{ nemá spektrum inverzní prvek v } A\}$. Neu-li A unitální, $\sigma_A(a) = \sigma_{A^n}(a)$ (v augmentaci $\tilde{A} \supseteq A$).

$\text{Res}_+(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$ (rezolventa).

Pozn.: Koncept holomorfnosti. $f: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow V$ (normovaný prostor) je holomorfus, i f $\forall z \in D$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \text{ kde } D \text{ je otevřené v } \mathbb{C}. (\frac{1}{h} \in \mathbb{C})$$

Lemma: A unitální Banachova. Pak $\forall a \in A$ $\sigma_A(a) \subseteq B_{\|a\|}(0)$.

Dk.: 1) $A^x \subseteq A$ o.t. $F: \mathbb{C} \rightarrow a - \gamma_1$ spoj. $\Rightarrow \text{Res}_A(a)$ je kteřína 6
 a když $\sigma_A(a)$ uzavř. $\Rightarrow \gamma \neq 0$ spec.) $a - \gamma_1 \in A \setminus A^x$
 a když $\sigma_A(a)$ uzavř. $\Rightarrow \gamma \neq 0$ spec.) $a - \gamma_1$ má inverzi, nebat $\sigma_A(a)$ uzavř.
 2) Budv $\gamma \in \mathbb{C}$ $|\gamma| > \|a\|$. $a - \gamma_1$ má inverzi, nebat $\sigma_A(a)$ uzavř.
 $\|a - \gamma_1\| < 1 \Rightarrow 1 - \gamma^{-1}a$ je invertibilní!
 Lemma (Neumannova řada)
 $\gamma_1 - a = \gamma(1 - \gamma^{-1}a)$ také, nebat $\gamma \neq 0$. Tj. $\gamma \in \text{Res}_A(a) \Leftarrow$
 $\Leftarrow |\gamma| > \|a\|$. Spektrum je kompaktní!

!! Věta: A budu unikátní Banachova algebra $a, a \in A$. Pak
 $\boxed{\sigma_A(a) \neq \emptyset}$

Dk.: $\exists a \in \sigma_A(a) = \emptyset$, $\alpha: A \rightarrow \mathbb{C}$ spojiby' fúzal. $f_\alpha(\lambda) = \alpha\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)$
 je halo $(\frac{1}{a-\lambda})$ je halo, spoj. lim. o hal. je halo
 Budv $|\lambda| > 2\|a\|$
 $|f_\alpha(\lambda)| = \left| \alpha\left(\frac{1}{a-\lambda}\right) \right| = \frac{1}{|\lambda|} \left| \alpha\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} \right| =$
 $= \frac{1}{|\lambda|} \left| \alpha\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \alpha\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n \right| \leq \alpha \text{ spoj. } C = \|a\|_{op}$
 $\leq \frac{C}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda^{-1}\|^n \leq \frac{C}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2C}{|\lambda|} . \lim \lambda \rightarrow \infty$.

Liouville $f_\alpha(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha \in A$

$\Rightarrow \frac{1}{a-\lambda} = 0$ (Hahn-Banach - "dostih prvního A' "). \square

V₀ Pozn.: Z lemmatu plýve: $\forall m \in \Delta_A$ je spojiby'.
 Dk.: Jen pro A unikátní: $m(1) = m(1 \cdot 1) = m(1)^2 \Rightarrow$
 a) $m(1) = 0 \Rightarrow m(a) = m(1a) = 0$

Základ b) $m(1) = 1: m(a - m(a)1) = m(a) - m(a) = 0 \quad \forall a \in \Delta_A$

Platí ~~$a - m(a)1 \in A \setminus A^x$~~ ; γ b invertible pak
 $1 = m(1) = m((a - m(a)1)b) = m(a - \frac{m(a)1}{m(b)})m(b) = 0 \cdot m(b) = 0 \notin$

$T_j. \Rightarrow m(a) \in \sigma_A \Rightarrow m(a) \in B_{\|a\|}(0)$. Odtud

$\frac{1}{\|m(a)\|_{op}} \leq \frac{|m(a)|}{\|a\|} \leq 1. \quad \square$

Důsledek (Gelfand-Mazur): Nechť A je miskompl. Banachova kádou, \exists
 že λ nemá ani inverzní bilinu. Pak $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

Dk.: $\forall a \in A \setminus \mathbb{C} \cdot 1 \nexists \lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \neq 0 \Rightarrow a - \lambda 1$ je inverzní bilinu
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (předpoklad)
 $\Rightarrow \sigma_A(a) = \emptyset \nexists$.

Def.: $\forall a \in A$ miskompl. Banachové def. spektrální polomer
 $r(a) := \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a)\}$

Veta (o spektrálním polomeru): $r(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ a $r(a) \leq \|a\|$.

Dk.: 1. Dokážeme

$$r(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$$

Bud $\forall \lambda \in \sigma_A(a)$. $\lambda^n - a^n = (\lambda - a) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a^{n-1-j} \Rightarrow \lambda^n \in \sigma_A(a^n)$
 kde je iuv.

[λ nemá iuv. $\Rightarrow \exists b$ nemá iuv. $\lambda \in \sigma_A(b)$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_A(b)$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_A(a)$]

Tedy: $|\lambda|^n \leq \|a^n\| \Rightarrow |\lambda|^n \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ ✓

$$\bullet \bullet (\lambda - a)^{-1} = \lambda^{-1} \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}} \quad \forall |\lambda| > \|a\|$$

$(\lambda - a)^{-1}$ halom na $|\lambda| > \|a\| \Rightarrow \sum a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ konvergeje

$$(rA) \Rightarrow a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}} \text{ omezená} \Rightarrow \|a^n\| \leq C |\lambda|^{n+1} \quad \forall n$$

$$\|a\|^{\frac{n}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}} |\lambda|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow |\lambda| \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(a) \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

$$2. r(a) = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \stackrel{l.s.}{\leq} (\|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|.$$

■

sub mult. A

□

*.) Dohouce i pro $|\lambda| > r(a)$; viz předchoz.

Definice : $\forall a \in A$ (unitární) Banachova algebra. Číslo

$$r(a) := \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a) \} \subseteq B_{\|a\|}(0)$$

nařeme spektrálním polomerem.

Pozn. : $r(a) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ (vlastní) a $\exists \lambda \in A$ (předv. fyzický)

Věta (ospekr. polomeru) : $\forall a \in A \quad r(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, in particular $r(a) \leq \|a\|$.

Dk.: Díky výme, že $\forall \lambda \in \sigma_A(a)$ je $|\lambda| \leq \|a\| \Rightarrow r(a) \leq \|a\|$
ukážeme, že $r(a) \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$
 $\leq r(a) \left(\text{tj. } \liminf = \limsup \right)$
 $\Rightarrow \lim \exists \delta = \lim r_n =$

$$1) \lambda \in \sigma_A(a) : \lambda^n - a^n = (\lambda - a) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} a^j}_{A_j} = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} (a - \lambda)$$

Left inverse is the right inverse if both exist.

$$\lambda^n - a^n \notin A^X \Rightarrow \lambda^n \in \sigma_A(a)$$

$$|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|a^n\| \quad (\text{kom. spektra}) \Rightarrow |\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \liminf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} / \sup_{\lambda}$$

$$r(a) \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$$2) (\lambda I - a)^{-1} = \lambda^{-1} \left(1 - \frac{a}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}} \quad \text{for}$$

$$\left\| 1 - \frac{a}{\lambda} \right\| < 1, \text{ tj. } \|a\| \leq |\lambda| \quad \text{z lemma a}$$

Neumanova věta, že jestliže $(\lambda I - a)^{-1}$ je kladou na $|\lambda| > r(a) = \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a) \text{ non-inv.} \}$. Tj. pro každé

Nutné $a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ je konvergentní a tedy

phi jsou členy v
 $\text{sum}_n \phi(a^n)/\lambda^{n+1}$
omezené C_ϕ . C_ϕ nezávisí na phi ze stejnomyré omezenosti.

$$\|a^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}\| \leq C \quad \|a^n\| \left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) < C \quad \|a^n\| \leq C|\lambda|^{n+1}$$

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}} |\lambda| |\lambda|^{\frac{1}{n}} / \limsup_n$$

$$\limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| / \lambda / r(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$$

□

Beweis: $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, X \mathbb{C} -komp.

$f - \lambda$ univ. iff $\exists x_0 \ f(x_0) - \lambda = 0$ iff
 (bodové)

$$\lambda \in \text{Rug } f \Rightarrow [\sigma_A(f) \supseteq \text{Rug } f]$$

Dokonce $\sigma_A(f) = \text{Rug } f$ since then $\frac{1}{f - \lambda}$
 je spojita, if λ not in σ spectrum.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f - \lambda} = \frac{1}{f(x_0) - \lambda} \Rightarrow \text{spojost.}$$

$\rightarrow A = L^1(G)$, $*$)

8

Př.: Nechť G je lok. komp., μ_G l. Haarova měra, $\forall x \in \widehat{G}$. Uvažme
 $m_x(f) := \widehat{f}(x)$ $\forall f \in L^1(G)$. Cílem je $m_x : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ ještě doložit.

$$m_x(f * g) = \widehat{f * g}(x) = f(x)g(x) = m_x(f)m_x(g)$$

$$m_x(f + g), m_x(cf)$$
 súadí.

Spojitost: $f_m \rightarrow f$ v $L^1(G)$

Lebesgue monoton.

$$m_x(\lim_m f_m) = \int \lim_m f_m \bar{x} d\mu_G \stackrel{d}{=} \lim_m \widehat{f_m}(x) =$$

$$\lim_m m_x(f_m). \text{ Tj. } m_x \text{ je spojité. (Re, Im; u g = e)}$$

Nenulovost zřejmá: $f = \sum_i x_i \chi$ (vlast.)

charfce character

Shaw: \widehat{G} (Hausdorffova) topologická grupa. $\nabla F : L^1(G) \rightarrow \mathcal{F}\ell(\widehat{G})$

Cílem dle topologi (prostorný stav): Vezmout normu

$$\text{na } \Delta_A \subseteq A', \| \alpha \| = \sup_{\| v \| < 1} \| \alpha(v) \|_A. \text{ Písmo jin } \| \| -$$

- rozlišitelné z kontextu.

první slv. prostoru

Lemma (normy slv. prostoru): Pokud A je Banachova elg. a $m \in \Delta_A$.

Pak $\|m\| \leq 1$. Pokud někdo A je unikátní, $\|m\|=1$.

Dk.: 1. A je unikátní. $m(1)=m(1^2)=m(1)m(1) \Rightarrow m(1)=1$
nebo $m(1)=0$. Pokud $m(1)=0 \Rightarrow m(a)=m(a \cdot 1)=0$ &

pro $a \in A$: $m(a - m(a)1) = m(a) - m(a) = 0 \Rightarrow$

$a - m(a)1$ nemá inverzii. $[zz^{-1}=1 \Rightarrow m(z)m(z^{-1})=1 \Rightarrow m(z) \neq 0]$

$$\Rightarrow m(a) \in \overline{\mathcal{T}_A(a)} \subseteq \overline{B_{\|a\|}(0)} \Rightarrow |m(a)| \leq \|a\|.$$

charakteristika spektra

$\Rightarrow \|m\| \leq 1$. Není-li $m(1)=1 \Rightarrow \|m\|=1$.

2. A není unikátní $\Rightarrow \tilde{m} : A' \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{m}(a, \alpha) :=$

$m(a) + \alpha$. Opatrnost o spojitosti: $m(a) = \tilde{m}(a, \alpha) - \alpha$

$$|\mu(a)| = |\mu(a, \mathbb{Q})| \leq \|a\| \Rightarrow \|\mu\| \leq 1.$$

□

9

Def: $(V, \|\cdot\|)$ normovaný. Slabost-topologie na $V' = \text{inicialní pro } \{\delta_v : V' \rightarrow \mathbb{C}, v \in V\}$, $\delta_v(x) := x(v) \forall x \in V'$

$(x_j)_j \subseteq V'$ konverguje k $x \Leftrightarrow x_j(v) = x(v) \forall v \in V$

Banachova - Alaogluova věta: $(V, \|\cdot\|)$ normovaný. Pak $\overline{B}' := \{f \in V' \mid \|f\| \leq 1\} \subseteq V'$ je slabost-topologické kompaktní (Hausdorff).

Dk.: $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. $f \in \overline{B}' \iff |f(v)| \leq \|v\| \forall v \in V \Rightarrow f(v) \in \frac{\|v\|}{\leq} \overline{B}$ (kompaktní). $\exists: \overline{B}' \rightarrow X(\|V\| \overline{B}), f \mapsto \left(f(v)\right)_{v \in V}, f \in \overline{B}' \times \text{kpt. Hausdorffův (Tychonov)}$.

\exists je injektivní. Je $\exists(\overline{B})$ uzavřená? $(f) \xrightarrow{\alpha} f \Leftrightarrow$

$\forall v \in V: (f_\alpha)(v) \xrightarrow{\alpha} f(v)$ (konv. na X) $\Leftrightarrow f_\alpha \xrightarrow{\alpha} f$ ve slabost-top.

$\|f\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \leq 1}} |f(v)| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \leq 1}} \lim_{n \in \mathbb{N}} f_\alpha(v) \leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \leq 1}} 1 = 1 \Rightarrow$ uzavřenosť.

Uzavřenosť $\exists(\overline{B})$ kpt. jde Lepet.

□

Def: Δ_A bude označovať uzavřenosť slabost-topologie. (spoj. vnitřní!)

Definice (Gelfandova zobrazení): $\forall a \in A, \hat{a} : \Delta_A \rightarrow \mathbb{C}$

$\hat{a}(m) := m(a)$ (Gelfandovo zobrazení) a $\hat{\cdot} : A \rightarrow \mathcal{E}(\Delta_A)$,
kde $\hat{\cdot}(a) := \hat{a} \in \mathcal{E}(\Delta_A)$. Píšeme \hat{a} (Gelfandova transformace). [$\mathcal{E}(X) :=$ prostor $\forall f \in X$ možného \mathbb{C}]

Pozn.: Na str. 11 je popsáno myšlenka norem. Přečeštění.

✓ Veta (o Gelfandově zobrazení): Nechť A je Banachova

algebra. Pak

1. Δ_A je lokálně kompaktní Hausdorffův,

2. A je unitalní $\Rightarrow \Delta_A$ je kompaktní

3. $\forall a \in A \quad \hat{a} \in \mathcal{E}(\Delta_A)$ a méně v nesoučtu.

$\wedge: A \rightarrow \mathcal{E}_0(\Delta_A)$ je homomorfismus algebry.

4. $\forall a \in A \quad \|\hat{a}\|_{\mathcal{E}(\Delta_A)} \leq \|a\|$, a tak \wedge je spojite!

Dk.: 1 & 2:

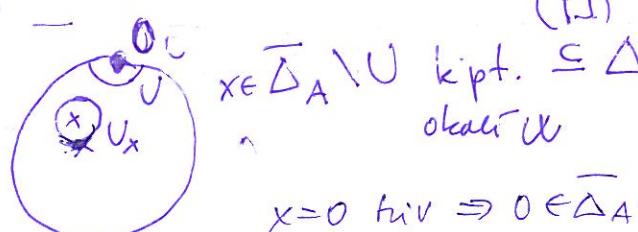
- a) A unitálmú: $m_n \in \Delta_A$, $m_n \xrightarrow{m} f$, $f \in A'$ ($m_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ homom. algebra). • $f(ab) = [\lim_m m_n](ab) = \lim_m [m_n(ab)] =$
 $= \lim_m [m_n(a)m_n(b)] = \lim_m [m_n(a)]\lim_m [m_n(b)] =$
 $= (\lim_m m_n)(a)(\lim_m m_n)(b) = f(a)f(b)$
- analog. pro $\lambda a + \mu b$
 - $f(1) = \lim_m m_n(1) = 1 \Rightarrow f \neq 0 \Rightarrow f \in \Delta_A$

Celkem $\overline{\Delta}_A = \Delta_A \cup \overline{\Delta}_A$ kpt. (Bau-Alaog.) $\Rightarrow \overline{\Delta}_A$ kpt.

- b) A unitálmú: $m_n \in \Delta_A$, $m_n \xrightarrow{m} f$, $f \in A'$ stejný (obdobné):
 $\forall g \in \Delta_A: \tilde{g}(a+\lambda 1) := g(a) + \lambda$; $\tilde{g}: A' \rightarrow \mathbb{C}$ argumentace! Linearity $\tilde{g}(a+\lambda 1) = \tilde{g}(a) + \tilde{g}(\lambda 1)$
 $\tilde{g}(a+\lambda 1)(b+\mu 1) = g(a)b + g(b)\lambda + \mu g(a) + \lambda\mu$,
 $\tilde{g}(a+\lambda 1) \tilde{g}(b+\mu 1) = g(a)g(b) + \lambda g(b) + \mu g(a) + \lambda\mu$,
 tj. opak \tilde{g} je homom. alg. / $\tilde{g}' = 0 \Rightarrow g(0) = -\lambda \forall \lambda$
 $\tilde{g}'(1) = \tilde{g}'(1 \cdot 1) = \tilde{g}'(1)^2 \Rightarrow \tilde{g}'(1) = 0$ nebo $\tilde{g}'(1) = 1$.
 $m_n \xrightarrow{m} f \Rightarrow \tilde{m}_n \xrightarrow{m} \tilde{f}$. stejný \tilde{f} ažul. homom. alg.
 A , $f(ab) = \tilde{f}(ab) = \tilde{f}(a)\tilde{f}(b) = f(a)f(b)$, tj. f homom.
 alg. Také. Minimální případ je $f = 0$.
 Pak ale $\overline{\Delta}_A \subseteq \Delta_A \cup \{0\}$ (□)

Celkem $\overline{\Delta}_A$ opak kpt. Celkud Δ_A lokalně komp.

$x \neq 0$ \cup_{U_x} kdežto
 odděluji 0 a x .
 Poludoplji v $\overline{\Delta}_A$.



3. $\hat{a} \in \mathcal{F}\alpha(\Delta_A)$

$$\hat{a}(m) = m(a) \lim_n [\hat{a}(m_n)] = \lim_n [m_n(a)] = ((\lim_n m_n)(a)) =$$

$$= m(a) = \hat{a}(m) = \hat{a}(\lim_n m_n) \Rightarrow \hat{a} \in \mathcal{E}(\Delta_A)$$

Muzet:

a) Δ_A kpt. triv.

b) $\overline{\Delta}_A = \Delta_A \cup \{0\}$

$$\hat{a}(0) = 0, \text{ tj. } \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{a}(m) = 0 \quad (\forall \epsilon < \frac{1}{r} \Delta_A).$$

$$\widehat{ab}(m) = (ab)(m) = m(ab) = m(a)m(b) = \widehat{a}(m)\widehat{b}(m) =$$

$$= \widehat{a}\widehat{b}(m) \quad (\mathcal{E}_0(\Delta_A) \text{ s. bodovým uvažováním})$$

str. prostředí
PV kdo
Lemma (normy)

$$4. \|\widehat{a}(m)\|_{\mathbb{C}} = |m(a)| \leq \|m\| \|a\| \leq \|a\|_A \Rightarrow \|\widehat{a}\|_{\mathcal{E}_0(\Delta)} = \sup_{m \in \Delta_A} |\widehat{a}(m)|$$

(1) označuje normu na \mathbb{C} (valuaci)
absolutní hodnota.)

$$\|\widehat{a}\|_{op} = \sup_{\|a\| \leq 1} \|\widehat{a}\|_{\mathcal{E}_0(\Delta)} \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \|\widehat{a}\|_A \leq \sup \{1\} = 1.$$

□

Pozn.: 1. $\|m\|_{\mathcal{E}_0(\Delta_A)} = \sup_{\|a\| \leq 1} |m(a)|_{\mathbb{C}}, a \in \Delta_A \quad [A']$

2. $\|\widehat{a}\|_{\mathcal{E}_0(\Delta_A)} := \sup_{m \in \Delta_A} |\widehat{a}(m)|_{\mathbb{C}} \quad [\mathcal{E}_0(x)]$

[A]

3. $\|a\|_A$

4. $| \cdot |_{\mathbb{C}}$ (valuace), norma na \mathbb{C} (abs. hodn.)

[C]

5. $\|T\|_{op} := \sup_{\|a\|_V \leq 1} \|Ta\|_W \quad T: V \rightarrow W \quad [\text{Hom}_S^{\text{cont}}(V, W)]$

~~sedej norm je součástí funkce~~

Ideally v Banachových algebách

Definice: $I \subseteq A$ nazveme idealem (z idealu obsírují), pokud $\forall a \in I \ \forall b \in A \ ab \in I \wedge ba \in I$.

I nazveme maximální, pokud je vlastní ($\neq A$)

a $\forall J$ vlastní $J \supseteq I \Rightarrow J = I$ ($\Leftrightarrow J \supsetneq I \Rightarrow J = A$).
 [Je maximální v množině všech vlastních (ideal) ch.]

Poznámka: $\forall a \in A^{\times} \ \forall u \in I$ ideal $\Rightarrow I = A$ (také \Leftarrow)
 $\exists b \in A : b = b \bar{a}^{-1} \in I$ "levost" I

(dále \Rightarrow) Je tedy $A^{\times} \cap I = \emptyset$ pro maximální I (stáč vlastní)
 - Mluvíme o σ -unitálních algebrech
 (Neop $_{\sigma}$ (X), X nekomp, $K(H)$, $\dim H > \infty$, také ne).

Tvrzení: Anuitální Banachova. Každý vlastní ideal je v nějakém maximálním. Každý maximální je uzavřený. Pokud A je komutativní $\forall a \in A \setminus A^{\times} \ \exists I_a$ max. $I_a \supseteq a$

Dk.: 1. I vlastní. $X = \{J \mid J$ vlastní $\wedge J \supseteq I\} \neq \emptyset$
 $\leq = \subseteq (X, \leq)$ neprázdná částečně usp. množina
 $(J_x)_{\alpha}$ řetězec; $\bigcup_{\alpha} J_x$ je komut. závora?

$\bigcup_{\alpha} J_x$ ideal, vlastní, $J_{\beta} \subseteq \bigcup_{\alpha} J_x \nmid \beta$ zřejmě.

Zorn.: X má maximální prvek, Z . Z je max id.
 $((\forall Z' \supsetneq Z \wedge Z \neq A \Rightarrow Z' \in X \wedge Z'$ není maximální-))

2. I maximální. \overline{I} je také maximální!

a) \overline{I} je ideal: $a \in A, b \in \overline{I}$

$a \lim_n b_n = \lim_n ab_n \in \overline{I}$. Obdobně zprava.
 spojitost

b) \bar{I} je vlastní. \vdash : ① $\exists c \in A^X \cap \bar{I}$, $c_n \xrightarrow{\psi} c \in A$ (2)
 A^X of. $A^X \cap \bar{I} = \emptyset$? [y $\exists c \in A^X \cap \bar{I}$, $c_n \xrightarrow{\psi} c \in A$
 Vložit c v of. A^X , $c_n \in U$

③ Tj. $\bar{I} = I$ a I je uzavřený. ∇ of. $\Rightarrow c_n \in A^X$ a $c_n \in I \Rightarrow y$

3. $a \in A \setminus A^X$: $I_a := aA$ je ideal (kom. A). $1 \notin I_a$ (jíme $a \in A^X$)

Odtud I_a je vlastní. $\exists I_{\max}: I_a \subseteq I$.

□

Pozn.: Budou komutativní Banachova algebra. Pak

$\chi: \Delta_A \rightarrow \text{Spec } A := \{I \mid I \text{ maximální}\}$, $\chi(m) := \ker m$,
 je bijektce.

$m: A \rightarrow \mathbb{C}$

a) dobré def.: $\ker m \oplus \overline{\text{im } m} = A$ $\overline{\text{im } m} = \text{im } m' \cong \mathbb{C}$
 \Rightarrow $\ker m = 1 \Rightarrow$

$\ker m$ je maximální jako r.p. ($m \neq 0$)

$[m \text{ spoj.} \Rightarrow \ker m \text{ uz.} \Rightarrow \chi \rightarrow \text{uzavř. idealu}^\circ]$

$a \in \ker m \Rightarrow m(ab) = m(a)m(b) = 0 \Rightarrow ab \in \ker m$
 $b \in A$

b) χ je inj.: $\chi(m_1) = \chi(m_2)$, f. $x_0 \in \chi(m_1) \Leftrightarrow x_0 \in \chi(m_2)$

f. $m_1(x_0) = 0 \Leftrightarrow m_2(x_0) = 0$. $1 \notin \ker m$ (jíme $m \neq 0$)

$x = x_0 + \lambda 1$ $m_1(x) = \lambda m_1(1) = \lambda = m_2(x_0 + \lambda 1) = m_2(x)$

$\ker m \quad \text{im } m$

$\Rightarrow m_1 = m_2$.

c) χ je surj.: $I \in \text{Spec}(A)$ A/I je Banachova

$\|x + I\| = \inf_{i \in I} \|x + i\|$, I uzavřený, f. kvocienku

norma je dobré def. $(x+I)(y+I) := xy + I$ jíme
 A/I komut. A/I nobsahuje žádoucí ul. ideal $(\pi'(J_0) \oplus I) \subset I$

\Rightarrow V prvek je invertibilní dle bodu 3 předch. tvrzení

Tj. Gelfand-Mazur: $A/I \cong \mathbb{C}1 \Rightarrow A \cong I \oplus \mathbb{C}1$ (3)

$m(x + \lambda 1) := \lambda$ does the job.

Δ_A hráje úlohu $\text{Spec } A$. ~~Před A~~
ideally

Posu.: A komut. unitalní \Rightarrow stavy \Leftrightarrow bijekce s max.

ideally. $X_{\text{alg. variete}} \cong \text{Spec } \mathbb{C}[x]$
reducibilní

sour. obor X

lokalitace $([z_1, \dots, z_n])$ prode "Verschwindungsideal" X .

Δ_A hráje roli prostoru. Zde siče Δ_A kompaktní,
ale $\Delta_A \subseteq A' \leftarrow$ obecně, nelly!

Banachova *-algebra a Gelfand-Naimarkova veta

Definice: Banachova *-algebra je kádá Banachova algebra $(A, \cdot, \| \cdot \|)$ vybavená navíc $*: A \rightarrow A$ involučním
vnitřním anti-automorfismem, jkž je izomorfismem
normovaného prostoru $(A, \|\cdot\|)$ (= izometrií).

Posu: $* * a = a$ $*(ab) = *b * a$ $*(a + \lambda b) =$
 $*a + \bar{\lambda} b^*$

$\| *a \| = \| a \|$. Známe $a^* = *a$ normovací^{normovací}
Invol. a norm. $a \| a^* \| = \| a \| \Rightarrow$ *-algebra^{možné} užívají^{užívají}

Definice: Banachova *-algebra se nazývá C^* -algebra /
pokud $\| a a^* \| = \| a \|^2$ (C^* -identita).

Příklady: 1. $(B(H), \cdot, \| \cdot \|_{op}, *)$ adjunkce operátorů
H Hilbertov V C^* -alg.

2. $K(H)$ analogicky. Tzísť uravnenost na $*$. C^* -alg.

3. $(C_0(X), \cdot, \| \cdot \|, *)$ $f^*(x) = \overline{f(x)}$ C^* -alg.
X komp.

Pozn.: $L^*(G)$ je C^* -alg. iff $G = \{e\}$ (dle viz Deit/Echt.). (4)

"Občasné" se: \mathbb{K} Banachovy $*$ -algebry \approx občasné C^* -algebra. (stejně repre., obdobně jako $a \in G \rightarrow U(a)$)

$$:= \overbrace{T(a)}^{< X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], X, Y \in G >} \leftarrow \begin{matrix} \text{ideál v} \\ \text{bal. algebra} \end{matrix}$$

(občasné \rightarrow enveloping) $T(G) := \mathbb{K} \oplus g \oplus \otimes^2 g \oplus \dots$ Tw.univerz. \Rightarrow Obdobné
také G kom. $\approx \mathbb{C}[G]$ grup. algebra; stejně repre. oper.

Důl. roli hrají $C(H)$ alg. kpt. op na fyz. prostoru H .

Vícej. repre. $C(H)$ je izomorf. taatologické, tj.

$\text{id} : C(H) \rightarrow B(H) \quad \text{id}(A)v = A(v) \quad \forall v \in H \quad \forall A \in C(H)$
 \Rightarrow obdobné vlastnosti mají funk. lineární

C^* -algebry (zasvěcené limináře!), dale
postlimináři; antilimináři

\Rightarrow Je i $\mathbb{C}r^*(G)$, fuk. vzd. C^* -alg., obecně jiná.

! Pozn.: \mathcal{S} repre. G (funk. gva) $\approx \tilde{\mathcal{S}} : L^*(G) \rightarrow \text{End}(V)$
 $f \in L^*(G) : \tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{S}(g) f(g) d\mu_G, \tilde{\mathcal{S}}$ je repre. funk. alg.
 $L^*(G)$. G Pard. $\dim V < +\infty \Rightarrow \int_G$ podstatn.
Pard. V jeu Banachov \Rightarrow fuk. Bochnerov
integrál.

!! Pozn.: $m(f) \in \mathbb{C} \quad \forall f \in L^*(G); \chi \in \widehat{G}_{\text{1dim.}}$

$$\chi : G \rightarrow U(1) \approx \tilde{\chi} : L^*(G) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}) \stackrel{\text{v.p.}}{=} \mathbb{C}$$
$$\tilde{\chi}(f * g) = \int_G \chi(h) (f * g)(h) d\mu_G(h) = \int_h \chi(h) \int_{\mathbb{C}} f(\lambda) \bar{g}(\lambda) d\mu_G(\lambda) d\mu_G(h)$$

\triangleright Příklad: $(L^1(G), \star, \star, \| \cdot \|_1)$ je Banachova \star -algebra, kde
konvalence

$f^*(g) := \Delta_G^{-1}(g) \overline{f(g^{-1})} \quad \forall g \in G \text{ a } \|f\|_1 = \int |f| d\mu_G, \text{ pokud}$
 G je lok. komp. grupa. (μ_G evná H.m.)

Dle.: 1. Banachova $\|ab\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$ bylo.

2. $\star: L^1(G) \rightarrow L^1(G)$

$$\text{a) involutivnost: } f^{*\star}(g) = (\underline{f^*})^*(g) = \Delta_G^{-1}(g)$$

$$\overline{f^*(g^{-1})} = \Delta_G^{-1}(g) \overline{\Delta_G^{-1}(g^{-1})} \overline{\underline{f(g)}} =$$

$$= \underline{\Delta_G^{-1}(g)} \Delta_G(g) \underline{f(g)} = f(g)$$

Δ_G jé komom.

Δ_G komom.

a do IR

b) antikomomorfizmus: $f, h \in L^1(G)$

$$(f * h)^*(g) := \left(\int f(y) h(y^{-1}g) d\mu_G(y) \right)^* =$$

$$= \Delta_G(g^{-1}) \int f(y) h(y^{-1}g^{-1}) d\mu_G(y).$$

$$(h^* * f^*)(g) = \int h^*(y) f^*(y^{-1}g) d\mu_G(y) =$$

$$= \int \Delta_G(y^{-1}) \overline{h(y^{-1})} \overline{f(g^{-1}y)} \Delta_G(g^{-1}y) d\mu_G(y) =$$

$$= \Delta_G(g^{-1}) \int \overline{h(y^{-1})} \overline{f(g^{-1}y)} d\mu_G(y) \left| \begin{array}{l} z = g^{-1}y \\ gz = y \\ y^{-1} = z^{-1}g^{-1} \end{array} \right.$$

$$= \Delta_G(g^{-1}) \int \overline{h(z^{-1}g^{-1})} \overline{f(z)} d\mu_G(z), \text{ tj. (•)}$$

3. \star je \star -homom. $L^1(G)$. Složitě!

Vede však na vlastnosti pravých substit.
pro levo H.m. Užitečné.

\Rightarrow Proto dlešíme lemu o charakteru fórii levo H.m.
z pravé „translaovaný“ fórii.

Lemma: 1. $\int (Ryf)(x) d\mu_G(x) = \Delta(y^{-1}) \int f(x) d\mu_G(x)$ (4)

2. $\int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\mu_G(x) = \int f(x) d\mu_G(x)$

Dle.: $(Ryf)(x) = f(Ry^{-1}x) \quad Ryx = xy^{-1}$

$= f(xy)$ [v souladu s uavimi definicemi]
borelovská

1. a) $f = \chi_U, U \subset \Sigma, \mu(U) > 0$

$$\int_U \chi_U(xy) d\mu_G(x) = \int_{Uy^{-1}} \chi_{Uy^{-1}}(x) d\mu_G(x) =$$

$\stackrel{G}{=} 1 \Leftrightarrow xy \in U \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{druhe zadanou } \mu_{y^{-1}}, \mu_{y^{-1}} \dots \\ \Leftrightarrow x \in Uy^{-1} \end{matrix}$

$$= \mu_G(Uy^{-1}) = \mu_G^{y^{-1}}(U) = \Delta(y^{-1})(\mu_G(U)) =$$

$$= \Delta(y^{-1}) \int_U \chi_U(x) d\mu_G(x)$$

b) $\int f d\mu_G = \lim_i \int f_i d\mu_G, \text{ kde } f_i = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{U_j}, c_j \in \mathbb{C} / \{0\}$
 a dalé mod a)

2. Δ spojibý (dechiftre) i μ_G leva H.u.
 $\tilde{\Delta}(x) := \Delta(x^{-1}) = \Delta(x)^{-1}$ $\begin{matrix} \leftarrow \text{homom. (proc? zopár když je)} \\ \text{bod 1} \end{matrix}$

Posu: $\tilde{\Delta}$ je
 homomorfizmus (hom. IR)
 $g \geq 0 \quad (g \cdot \mu)(U) :=$
 $\quad \quad \quad = \int \chi_U g d\mu$

a) $\int Ry(f\tilde{\Delta}) d\mu_G = \Delta(y^{-1}) \int f \tilde{\Delta} d\mu_G$
 b) $\int (Ryf) \tilde{\Delta} d\mu_G \stackrel{(\text{hom.})}{=} \int (Ryf)(x) \tilde{\Delta}(xy) \tilde{\Delta}(y^{-1}) d\mu_G(x)$
 $= \tilde{\Delta}(y^{-1}) \int (Ryf)(x) \tilde{\Delta}(xy) d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}(y^{-1}) \tilde{\Delta}(y^{-1})$
 $\bullet \int Ry(f\tilde{\Delta}) d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}(y^{-1}) \Delta(y^{-1}) \int f \tilde{\Delta} d\mu_G$
 shomom... $= \int f \tilde{\Delta} d\mu_G.$

Celkem $\int (Ryf) (\tilde{\Delta} d\mu_G) = \int f (\tilde{\Delta} d\mu_G) \Rightarrow$

Tedy I: $f \mapsto \int f \tilde{\Delta} d\mu_G$ je pravojuv. fiall $\Rightarrow \tilde{\Delta} \mu_G$ je
 pravojuv. mřva (nebot' že dle Riesz):

$$(\Delta_{\mu_G})(U \cdot y) = \int_G \chi_{U \cdot y}(x) \tilde{\Delta}_{\mu_G}(x) d\mu_G(x) = \int_G \chi_U(x^{-1}y) \tilde{\Delta}_{\mu_G}(x) d\mu_G(x) =$$

def. char. fct, s. a uasobem
mívý fct

\$ \downarrow \$

$\chi_{U \cdot y}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in U \cdot y \Leftrightarrow x^{-1}y \in U$

$$= \int_G \chi_U(x) \tilde{\Delta}(x) d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}_{\mu_G}(U) \Rightarrow \tilde{\Delta}_{\mu_G} \text{ je pravourov.}$$

$\int_G \tilde{\Delta}_{\mu_G}(U) d\mu_G(U) = 1 > 0.$

c) $\mu_G^{-1}(U) := \mu_G(U^{-1})$, $U \in \Sigma$, $\mu_G(U) > 0$ [náhled $\frac{1}{\mu_G(U)}$]

$$\mu_G^{-1}(U \cdot y) = \mu_G(y^{-1}U^{-1}) = \mu_G(U^{-1}) = \mu_G^{-1}(U) \Rightarrow \exists! c$$

$\Rightarrow \mu_G^{-1} \text{ je pravourov. varianta} \Rightarrow \boxed{\tilde{\Delta}_{\mu_G} = c \mu_G^{-1}}$

d) $c = 1$? $\varepsilon > 0$, $h \in C_c^+(\mathbb{S})$, $\exists V$ sym. [zidu. Haavoy mívý]
(pravé)
(kresť)

$\exists h, \exists \forall x \in V: h(x) = h(x^{-1})$, $\text{supp } h \subseteq V$.

(sym-fct) [h je prepravidelné čo do \exists ; jinak tieto...
viz de Bruffre]

$\xrightarrow{\text{def } \mu_G^{-1}} (+\text{def } \tilde{\Delta}_{\mu_G})$ (na X,
schod., lemn.)

\triangle_g spojre: $|\Delta_g(x) - 1| < \varepsilon$. $\int_G h(x) d\mu_G^{-1} = \int h(x^{-1}) d\mu_G$

$\xrightarrow{\text{merivý počet}}$ $= \int h(x) d\mu_G$. Píjme: $|c(1-\varepsilon) \int h(x) d\mu_G^{-1}| =$

$= |c \int h(x) d\mu_G^{-1}(x) - \int h(x) d\mu_G^{-1}(x)| \xleftarrow{\text{dle výme}} =$

$\text{def } c = \left| \int h(x) \tilde{\Delta}(x) d\mu_G - \int h(x) d\mu_G \right| =$

$\leq |\varepsilon \int h(x) d\mu_G| \rightarrow 0 \Rightarrow c = 1$. \square

•• T.j. $\boxed{\int f(x) \Delta_G(x^{-1}) d\mu_G(x) = \int f(x^{-1}) d\mu_G(x)} \xrightarrow{\text{tuž.}} \int f(x) d\mu_G^{-1}(x)$

Nyní rozmetrickost:

$k(g) := f(g^{-1})$ $\int_G f(g^{-1}) \Delta_G(g^{-1}) d\mu_G(g) = \int_G f(g) d\mu_G(g)$,

Pro (••) zvíd. $f(x) \mapsto f(x^{-1}) = \int f(x^{-1}) \Delta_G(x^{-1}) d\mu_G(x)$ \square

$= \int f(x) d\mu_G(x)$; dale abs. krokužly
(L¹!!)

Tvrzení: G komutativní $\Leftrightarrow L^*(G)$ komutativní.

$$\text{Dk.: } (f * g)(y) = \int_G f(x) g(x^{-1}y) d\mu_G(x) = \int_G g(x^{-1}y) f(x) d\mu_G(x).$$

$$\text{H.m. } (g * f)(y) = \int_G g(x) f(x^{-1}y) d\mu_G(x) = \int_G f(x^{-1}) g(x^{-1}y) d\mu_G(x).$$

Lemma (2). $\exists \int g(z^{-1}) f(z^{-1}y) d\mu_G(z)$
"z prava doleva"

$$d\mu_G(z) = \int_{\substack{z^{-1} = x^{-1}y \\ y = xz^{-1}}} \phi(x^{-1}y) f(x) \Delta(x^{-1}) \Delta(y) d\mu_G(x) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} &= \int g(x^{-1}y) f(x) 1 \cdot 1 d\mu_G(x) \leftarrow \text{kom.} \Rightarrow \text{uni-} \\ &\text{modul.} \\ &\text{anita} \end{aligned}$$

Pozn.: Na přednášce jsme trochu odbyli mod. faktor

Nehýkáj ve formulích výše stále jsem $\equiv 1$. Avšak
Nejde víc jsme diskutovali možnost následkem N-účty

2022/23 mimořádnou Pontryaginovy duality. (Proza'kl.
porozumět bylo, svršlosti' netřeba.)

Pozn.: $C^*(G)$ (obalující $L^*(G)$) $\xrightarrow{\sim} C_0(\Delta_{L^*(G)})$ -
okud G komutativní. (Netřeba)

Nehýká se 22/23: ✓

Zákl.: $G_1 := \{ x: G \rightarrow U(1) \mid x \text{ spojibl. } \} / \cong$
Víme G_1 je top. grupa ($d(x, y) = \dots$) spc. Hausdorffov.
Odebrali bychom G_1 lok. kon. skupinu (vynecháno, viz
Diekmann-Eckberhoff). Našmále $G_1 \approx C^*(G) \approx$
 $C_0(\Delta_{L^*(G)})$, ale co to je \approx (pozor že G komut.)
✓ lok. kon. struktura G_1 ještě probereme.

*^{Vděčíme} Svatomej: pp. komutativní použit, co už paralelji:
Můžete už průběžně dosazovat $\Delta = 1 \cdot \text{ct.}$
komutativní $xy \dots$

Lemma: A kom. C^* -algebr. Pak $\forall m \in \Delta_A \quad \forall a \in A$

$$m(a^*) = \overline{m(a)}$$

5

Dk.: Pp. $A \ni 1$. $a = \operatorname{Re}(a) + i \operatorname{Im}(a)$, $\operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2}(a+a^*)$

$$\operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2i}(a-a^*) \text{. Re \& Im symetrické.}$$

Stav $a = a^*$ (symetrické a). $x, y \in \mathbb{R}_0$ $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\exists e m(a) \in \mathbb{R}, m(a) = x+iy \quad a_t := a+it \Rightarrow$$

$m(a_t) = x+i(y+t) \Rightarrow |m(a_t)|^2 = |x+i(y+t)|^2 = x^2 + (y+t)^2$. Avšak $|m(a)| \leq 1$ (viz druhé), a tak $|m(a_t)|^2 \leq \|a_t\|^2 = \|a\|^2 + t^2$.

$$\therefore \|a^2 + t^2\| \leq \|a\|^2 + t^2$$

Celkem: $x^2 + y^2 + yt \leq \|a\|^2 \quad \forall t \Rightarrow y = 0$. \square

Pozn.: 1. Prvňum $a = a^*$ se říká symetrické (užo samoadjugované, užo hermitovské symetrické). Posledním sporíme, pokud někde využijeme a_0 , že $a \in A$ a A je algebra nad \mathbb{C} .

2. $a^*a = 1 \Rightarrow a^* = a^{-1} \Rightarrow a a^* = 1$ slouží vnitřkmu!

3. $a^*a^* = a^*a$ normalitu

4. Reformulace lemmatu: $\widehat{a^*}(m) = \overline{\widehat{a}(m)} =$

$$= \overline{\widehat{a}(m)}, \quad \text{tj. } \widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}} \quad (\text{popr. } \widehat{a}^*, \text{ kde } {}^*je^{-})$$

$$\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$$

6

Veta (Gelfand-Naimark): A komutativní C^* -algebra.

Pak Gelfandovo zobrazení $a \in A \mapsto \hat{a} \in C_0(\Delta_A)$ je

ikonebrický $*$ -izomorfismus

$$\|\hat{a}\|_{C_0(\Delta_A)} = \|a\|_A \quad \text{a} \quad \hat{a}^* = \bar{\hat{a}}$$

$$[A \xrightarrow{\sim} C_0(\Delta_A)]$$

Navíc Δ_A je kpt. iif A je univerzální. Pak je $\cong C(\Delta_A)$.

Dk.: Použijeme Stone-Weierstrassovu větu:

" X lok. kompaktní Hausdorffův prostor, $A \subseteq C_0(X)$, že

1. $\forall x \neq y \in X \exists f \in A \quad f(x) \neq f(y)$ (A separuje)

2. $\forall x \in X \exists f \quad f(x) \neq 0$

3. A je uzavřené na komplexy konjugaci.

Pak A je hustá v $C_0(X)$.

$\tilde{A} := \{\hat{a}, a \in A\} \subseteq C_0(\Delta_A)$, Δ_A loka. komp. Hausd.

(vím z výhy Gelf. zobr.).

Bud $b = b^*$. Pak dle výhy ospečit. pokudž

$$\begin{aligned} r(b) &= \lim_n b^n & \|b^n\|_A^{\frac{1}{n}} &= \lim_n b & \|b^{2n}\|_A^{\frac{1}{2n}} &= \\ &\stackrel{\text{synchro.}}{=} \lim_n b & \|b^* b\|_A^{\frac{1}{2n}} &= \lim_n b & \left(\|b\|_A^2\right)^{\frac{1}{2n}} &= \|b\|_A \end{aligned}$$

(zajímavé
pro se
uvařit
o sítě)

$$\begin{aligned} \|\hat{a}\|_{C_0(\Delta_A)}^2 &\stackrel{C^*-id.}{=} \|\hat{a}^* \hat{a}\|_{C_0(\Delta_A)} & \|\hat{a}^* \hat{a}\|_{C_0(\Delta_A)} &= \|\hat{a}^* \hat{a}\|_{C_0(\Delta_A)} \\ &\stackrel{a^* a \text{ je sym.}}{=} r(a^* a) & \|\hat{a}^* \hat{a}\|_A &= \|a\|_A^2 & \text{Bod 4 přidali. používáky} \\ &= r(a^* a) & & & \text{6: zobr. je kompl.} \\ & & & & (\text{veta o f. zobr.}) \end{aligned}$$

Gelfandovo zobrazení je izometrie.

Izometrie s hustým obrazem je na. Shací tedy ověřit podruhé W-věty.

ad 1. $\hat{a}(m_1) = \hat{a}(m_2) \forall a \Leftrightarrow m_1(a) = m_2(a) \Leftrightarrow m_1 = m_2$. (7)

ad 2. $\forall m \in \Delta_A \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow \exists a \in A \quad m(a) = \underline{\hat{a}(m)} \neq 0$.

ad 3. $\hat{a}^* \in \mathcal{C}_0(\Delta_A) : \hat{a}^*(m) = \overline{\hat{a}(m)} = \widehat{a^*(m)} \Rightarrow \square$
 $[a \in A \Rightarrow \hat{a} \in \mathcal{C}_0(\Delta_A)] \quad | \Rightarrow a^*(m) \in \text{Im } \hat{a}^*$

Pozn.: Možná úvaha. Obrat i rovnice užíváho TVS
 je užívá \Rightarrow užívá. Užívá a když $=$ celý
 (std.).

Pozn.: 1. zjistili jsme díl. větu, a následek $r(a) = \|\hat{a}\|_A v$
 případě \mathbb{C}^* -algebra. (Pakud a je z.
 pak to platí také.) normovaná $\|\hat{a}\|_A \leq \|a\| \|a^*\|$
 druhý. $\|\hat{a}\|^2 \leq \|a\|^2$

Pozn.: 1. $\|\hat{a}\|^2 \leq \|a\|^2 \wedge \mathbb{C}^*$ -algebra. ($*$ -Bau): $\|\hat{a}\|^2 \leq \|a^*a\|, \text{f. } \mathbb{C}^*$ -alg.

2. $\|\hat{a}\| \|\hat{a}\| \leq \|\hat{a}a^*\| \leq \|\hat{a}\| \|a^*\| \Rightarrow \|\hat{a}\| \leq \|\hat{a}^*\|$
 \mathbb{C}^* -ver. Banach Banachova- $*$. "symetrie": $\|\hat{a}^*\| \leq \|\hat{a}\|$

3. $(*, \mathbb{C}^*, \|\cdot\|)$ $\begin{cases} *-inválece \\ \|\hat{a}a^*\| \geq \|\hat{a}\|^2 \end{cases} \Rightarrow$ Banach $*$ $\Rightarrow \mathbb{C}^*$ -alg.
 normovávaná Banachova

! Do míst. kopl. (Pontr. dualita): $d : \widehat{G}_1^{\text{unit}} \rightarrow \Delta_{L^1(G)}$

Glob. skup. $d : \chi \mapsto d_\chi$

$d_\chi \in \Delta_{L^1(G)}, d_\chi : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}; d_\chi(f) =$
 $:= (f_f)(\chi)$. Injektivita $d \approx \widehat{G}_1^{\text{unit}} \subseteq \Delta_{L^1(G)}$.

Definice: $\delta: G \rightarrow \widehat{G}$ $\delta(g)x = x(g) \quad \forall g \in G \quad \forall x \in \widehat{G}$ se nazývá
Pontrjaginovo zobrazení. (Zde stau' G je topol.)

Pom.: $\delta(g) \in \widehat{\widehat{G}} \Rightarrow \delta(g): \widehat{G} \rightarrow U(1) \Rightarrow \delta(g)x \in U(1)$

ZDE: $\widehat{\widehat{G}} = \widehat{G}$ $\text{mit. v. v. } \widehat{\widehat{G}}$ $\forall x \in \widehat{G}$ $x(g) = \overline{x(g)}$. Víme $\widehat{\widehat{G}}$ je top. grupa.

Věta (Pontrjagin): G lok. kon. kom. grupa. Pak
 δ je homo morfizmus top. grup.

Dle.: 1. $\delta(g)$ je homomorfizmus $\forall g \in G$.

$$\delta(g)(x_\mu) = x_{\mu(g)} = x(g) \mu(g) = \delta(g)x \cdot \delta(g)\mu$$

$\forall x, \mu \in \widehat{G}$ (Na \widehat{G} našobím vedené z definice.)

2. δ je homom.: $\delta(gh)(x) = x(gh) = x(g)x(h)$

$$= \delta(g)x \delta(h)x = [\delta(g) \circ \delta(h)](x)$$

Opet: i.v. \widehat{G} skladáme grupové k.m., že našobit
 můžeme vedené (def.) spojitost $\delta(g)$ jako repr.

3. Spojitost: $x_i \rightarrow x$ lím $\delta(g)(x_i) =$

$$= \lim_i [\delta(x_i(g))] \xleftarrow{\text{spojit. } x_i \text{ j. a. r. repr.}} = (\lim_i x_i)(g) = x(g) = \delta(g)x$$

("máme" zákon konvergencí). [Ne spoj. δ !]

Celkem 1-3: $\delta(g) \in \widehat{\widehat{G}}$. \emptyset

4. Injektivita \emptyset , 5. surj. \emptyset , 6. spojlostiuv.
 (Fourier jen u.) \emptyset sítke Dirakova \square

Věta ("Plancherel"): G lok. kon. komut. Pak $\exists!$ leviuv
 ariantní mra $\widehat{\mu}_G$ na \widehat{G} (lok. kon. vše), že
 $L^2(G) \cong L^2(\widehat{G})$ jako Hilb. prostor (h. izom
 etrie). Pk. \emptyset \square (Perlm. Echt.)

Pozn.: Pontrjagin. dualita vime v prípade (4)
 $\mathbb{Z}, S^1, \mathbb{R}^n$; $\widehat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$; $\widehat{S^1} \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \widehat{S^1}$;
 $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$.

Zajímavost: 6 diskr. $\Rightarrow \widehat{6}$ kompart.

6 kompart $\Rightarrow \widehat{6}$ diskretní.

Další "zajímavost": $e \in L(6) \Rightarrow 6$ diskretní.
($e \notin L(6) \Rightarrow$ méně ale rozdílnost).

Poissonova sumací formule

1. Neformalně (TOTO ZNÁT)

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(x+\ell)$ Pp. konvergencie
absolutná.

$$\exists \text{ } \textcircled{1} g(x+1) = g(x) \Rightarrow g \text{ je 1-periodická.}$$

F. řada g ($= F$. transf. g na S^1) viz def. F-t.

na l.k.g. a intervaly mezi krokmi hodin důležité:

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i kx}, c_k \text{ jako } \int_0^1 g(y) e^{-2\pi i ky} dy \text{ viz předpoklad}$$

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell) = g(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} c_k = \int_0^1 g(y) e^{-2\pi i ky} dy \text{ "stoj. konv." (?)}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(y+\ell) e^{-2\pi i ky} dy =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(y+\ell) e^{-2\pi i ky} dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i ky} dy$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k). \quad \text{Pp. stoj. konv.}$$

Celkem $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$. Poissonova sumací

mí formulé.

2. Formalně.

Veta: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, f počas kroků C^1 s výjimkou konečného mnoha kroků C^1 . $\varphi(x) := \begin{cases} f'(x) & \exists f'(x) \\ 0 & jinak \end{cases}$. Někdy

$x^2 f$ a $x^2 \varphi$ jsou omezené. Pak

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Dk.: ϕ . Posloupnost skoro stejně jde r. neformalně! \square

3. Grupové verze Poissonové sumaci formulí (NEVÝŽEBA ALE ZAJÍMÁME)

A l-k. $B \subseteq A$ uzavřená $\rightarrow A$ pdgr. (A/B je l-k!) skvoc. top.

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{A}/\hat{B} \vdash$ Soudlosti = ?

Def: $E \subseteq A$, $E^\perp := \{x \in \hat{A} \mid x(e) = 1 \forall e \in E\}$

$\forall L \subseteq \hat{A}, L^\perp := \{a \in A \mid \ell(a) = 1 \forall l \in L\}$

stejní anihilátory.

Lemma: $\{1\} \rightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/B \rightarrow \{1\}$ KEP (v kat. top.)

group) E^i ip spoj. komon., i tuj. ip suny: $I_{ni} = \text{Ker } p \equiv \text{def. KEP}$ \Rightarrow v dané kat.

$1 \rightarrow \hat{A}/\hat{B} \rightarrow \hat{A} \rightarrow \hat{B} \rightarrow 1$ je KEP.

Dk.: ϕ , $i(x) = x_0 i$. \square

Veta o Poissonové sumaci: $B \subseteq A$ uz. podgrupa l-k.

komutativní groupy A . $\forall f \in C(A), f^B \in C(A/B)$

$$f^B(xB) := \int_{b \in B} f(xb) d\mu_B(b).$$

[Dle předch. lemmata $\hat{A}/\hat{B} \cong \hat{B}^\perp$]. Pak $\hat{f}^B = \hat{f}|_{\hat{B}^\perp} \wedge \in C(\hat{B}^\perp)$

$$\wedge \int_B f(xb) d\mu_B(b) = \int_{x \in \hat{B}^\perp} \hat{f}(x) \chi(x) d\mu_B(x) \text{ vs.r. } x.$$

\square (viz Defin.-Echt.)

Dk. Vynečán \square

Prv: Veta o Poissonové sumaci pro $A = (\mathbb{R}, +)$,

$A \cong \hat{A} \cong \mathbb{R}$ (vize), $B := \mathbb{Z}, \hat{B} = \hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{S}^1; x = 0$

$$\int_{\mathbb{Z}} f(b) \underbrace{d\mu_Z}_{= \sum_{b \in \mathbb{Z}} f(b)} \rightarrow$$
 návazje diskrétní.

$$\widehat{A/B} = \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = \widehat{\mathbb{S}^1} = \mathbb{Z} \quad (fB^\perp \simeq \widehat{A/B})$$

topol. vieme

(12)

$\int_{X \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(x) \chi(x) dx = \sum_x \widehat{f}(x).$ To je Poissonova
 $e^{2\pi i x y}.$

ještědře $x=0$

sumacní formula (kterou má).

• Aplikace Poissonovy sumací formule ("která" využívá
 Θ -funkce). TOTO ZNAČT PO --- [trigonometrické funkce SL(2, \mathbb{C})
atd.]

Definice: $\Theta(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t k^2}, \quad t > 0$ gely Θ -funkce.
(theta funkce)

Pozn.: Konvergance Θ -funkce $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\text{Necht } \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^{-\pi t(k+1)^2}}{e^{-\pi t k^2}} = e^{-\pi t(2k+1)} \stackrel{?}{<} \underbrace{e^{-\pi t}}_{< 0} \quad [-\pi t(2k+1) < 0]$$

Komutace F na \mathbb{R}^n s rotacemi transf. \mathbb{R}^n a dle.

Pozorování: • $F \circ T_a = e^{\pm 2\pi i a \xi} F$, • $F \circ M_a = \dots$
• $F \circ D^\alpha = (\pm 2\pi i \xi)^\alpha F$; • $T_a f(x) := f(T_a^{-1}(x)) = f(x-a)$ ($M_a f(x) = f(x+a)$)

$$D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$
 • Na's zajímat chování F ($G = \mathbb{R}^n$) a $\tilde{\delta}_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $\tilde{\delta}_a x = ax$, $(\tilde{\delta}_a f)(x) = f(\tilde{\delta}_a^{-1} x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, für. dilatace.

Lemma: $F \circ \tilde{\delta}_a = a^n \tilde{\delta}_1 \circ f$, $\forall a > 0$ (uvařitelnost, co do jejího minimování).

$$\text{Dk.: } [(\tilde{F} \circ \delta_a) f](\xi) = [F f(a^{-1} \cdot)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(a^{-1} \cdot) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \begin{array}{l} y = a^{-1}x \\ dy = a^{-1}dx \end{array} \right| = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} a^n dy =$$

$$= a^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i a y \cdot \xi} dy = a^n \hat{f}(a \xi) =$$

$$= a^n \hat{\delta}_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\xi) \Rightarrow \boxed{\tilde{F} \circ \delta_a = a^n \hat{\delta}_{\frac{1}{a}} F}$$

□

$$\underline{\text{Vera}}: \quad \Theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} \Theta(t) \quad \forall t > 0. \quad \text{def } \delta_t \quad \text{if } f_1(x) = e^{-\pi x^2}$$

$$\text{Dk.: a) } f_t(x) := e^{-\pi t x^2} \quad \Rightarrow f_t = \delta_{\frac{1}{\sqrt{t}}} f_1 \quad \text{F} f_t = F \delta_{\frac{1}{\sqrt{t}}} f_1 =$$

$$\text{Lemma } \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^n \delta_{\frac{1}{\sqrt{t}}} F(f_1) = \frac{1}{\sqrt{t}} \delta_{\sqrt{t}} f_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{1}{t} x^2}.$$

b) 1. cie.

$$\text{Poisson.frule: } \sum_k F f_t(k) = \sum_k f_t(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_k e^{-\pi k^2 t} = \sum_k e^{-\pi k^2 t} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right) = \Theta(t)}.$$

□

Postu.: Modularita. $\wp: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Bij}(\mathbb{H})$, kde

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0 \} \quad \wp(g)z := \frac{az+b}{cz+d} \quad \forall g$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}). \quad ? \exists \alpha, \beta: z \in \mathbb{H} \Rightarrow \wp(g)z \in \mathbb{H}?$$

z dobiti def?

$$\tilde{\wp}: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}(\mathbb{H})), \quad \mathcal{H}(\mathbb{H}) = \{ f$$

/ Merom.

$$: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je holom.} \}$$

$$\tilde{\wp}(g)f(x) := f(g^{-1}x) \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{R}).$$

$$\tilde{\Theta}(z) = \sum_n e^{-\pi z^2 n^2}, \quad \text{Im } z > 0, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prv.: $\tilde{\Theta}(z) := \sum_k e^{2\pi i k^2 z}, z \in \mathbb{H}$, $z = it$ dřívější Θ . (14)

Konvergence je lokálně stejnoučka! ($r \neq z$).

Vsiimáme si $\tilde{\Theta}(z) = \tilde{\Theta}(z+2) \Rightarrow \tilde{\Theta}$ je 2 -periodická

$$\bullet g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) ; \quad \overline{\Theta}(z) := \sum_k e^{2\pi i k^2 z}$$

$$(g \cdot \overline{\Theta})(z) = \overline{\Theta}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right) = \overline{\Theta}\left(\frac{z-1}{az+1}\right) = \sum e^{2\pi i k^2(z-1)}$$

$$= \sum e^{2\pi i k^2 z} = \overline{\Theta}(z)$$

$$\bullet g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), (g \cdot \overline{\Theta})(z) = \overline{\Theta}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z\right] =$$

$$= \overline{\Theta}\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{z}i \overline{\Theta}(z)$$

V každém případě je vidět, že $\overline{\Theta}$ nemá primitivní invariantu. V teorii el'el (Mordell, Hecke, Petersson) se zavádí fr. mod. repr. rádu k od $20-40$.

let min. 84

$$(g \cdot f)(z) = |cz+d|^{-k} f(g^{-1}z).$$

Takto už máme invariantu $\overline{\Theta}$ -funkci vůči periodické repr. primitivní rádu. (Viz Bump: Automorphic Forms and Repr. už Krieg, Koedinger: Elliptische Funktionen und Modulfomnen už obojí Apostolov nebo Taguer: "ABC"-.. atd.)

Pozn.: Ad p-adická čísla. Pro \mathbb{Q}_p se definuje celá p-adická čísla (13)
 $\hookrightarrow \mathbb{Z}_p := \{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p < 1\}$.
 konfize
 s klas. rozdílem
 $\{0, \dots, p-1\}$

Dále se ukaže, že p-adická čísla mají "p-adickou reprezentaci", tj. $a \in \mathbb{Q}_p \quad a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n p^{-n}, a_n \in \{0, \dots, p-1\}$.

Pak se konstruuje Haarovova mříža: $\frac{dx}{|x|_p}$
 [Pak obdržíme adele (lokalně konvergenty).]