Stejnoměrná spojitost

Def.: G buď topol. grupa a $f \in C(G)$. Řekneme, že f je zleva stejnoměrně spojitá, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ okolí $V \ni e$, že $\| L_y f - f \| < \varepsilon \ \forall y \in V$.

Obdobně stejnom. spoj. zprava.

Lemma 1: Každá $f \in C_c(G)$ je zleva i zprava stejnom. spojitá.

Dk.: $\varepsilon > 0$. $K := \operatorname{supp} f$. Spojitost v $x \in K$: $\exists U_x \ni e\ \forall z \in U_x$

(*) $|f(zx) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall x$ a U_x vezmi $V_x \ni e$, že $V_x V_x \subseteq U_x \wedge$

$\wedge\ V_x$ symetrické (Existence bude úloha na cvičení.)

$\{V_x x\}_{x \in K}$ pokrývá K. K kpt $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$, že $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} x_i$.

$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Zjevně $e \in V$ a V je okolí a V je symetrické.

$x \in K \Rightarrow x \in V_{x_i} x_i\ \exists i$

- $x \in K$, $y \in V$. Pak $x x_i^{-1} \in V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ pro nějaké i. Dále:

$y^{-1} x x_i^{-1} \in V V_{x_i} \subseteq V_{x_i} V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ pro $y^{-1} \in V$. Tedy

spoj. v x_i + (*)

$|f(y^{-1}x) - f(x)| = |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)| \leq$

$\leq |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

- $x \notin K \Rightarrow$ a) $y^{-1} x \notin K$ … nerovnost je triviální!

$\Rightarrow y^{-1}x \in V_{x_i} x_i$

b) $y^{-1} x \in K$ … $y^{-1} x x_i^{-1} \in V_{x_i}$ $\exists i$. Odtud

(stále $y \in V$) $x x_i^{-1} = \underbrace{y}_{V} \underbrace{y^{-1} x x_i^{-1}}_{V_{x_i}} \in U_{x_i}$. Tedy $\subseteq V_{x_i} V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$

$|f(y^{-1}x) - f(x)| \leq |f(y^{-1}x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| =$

$= |f(y^{-1} x x_i^{-1} x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x x_i^{-1} x_i)|$

$< \varepsilon$. Tím spíš pro sup. $\square$

Lemma 2: $\forall f \in C_c(G)$ a $\varepsilon > 0\ \exists V \ni e$, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pokud $y^{-1} x \in V$ nebo $y x^{-1} \in V$.

Lemma 1

Dk.: $V_1 \ni v$ $|L_y f - f| < \varepsilon$ $\quad V_2 \ni v$ $|R_y f - f| < \varepsilon$ $\quad V := V_1 \cap V_2$

1) $y^{-1} x \in V \Rightarrow y^{-1} x = v \Rightarrow x = yv$ $\quad |f(yv) - f(y)| < \varepsilon$ R_v …

2) $y x^{-1} \in V \Rightarrow y x^{-1} = v \Rightarrow y = vx$ $\quad |f(v^{-1}) - f(x)| < \varepsilon$ L_v … $\square$

Lemma 3: $\forall f, \varphi \in C_c^+(G)$: $(f_0 : f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0)$

Dk.: $I_\varphi(f) = \dfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}$. Chceme

BOD 6 „dlouhé věty"

$$(f:\varphi) \leq (f:f_0)(f_0:\varphi)$$

$$\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \geq \frac{1}{(f_0:f)} \iff (f:\varphi)(f_0:f) \geq (f_0:\varphi)$$

$\iff (f_0:f)(f:\varphi) \geq (f_0:\varphi)$, tj. opět bod 6 dlouhé věty. □

Lemma 4: I_φ je sublineární a levoinvariantní.

Dk.: 1. $I_\varphi(f_1+f_2) = \dfrac{(f_1+f_2:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \overset{\text{BOD 2 dlouhé věty}}{\geq} \dfrac{(f_1:\varphi)}{(f_0:\varphi)} + \dfrac{(f_2:\varphi)}{(f_0:\varphi)} = I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2)$.

2. $I_\varphi(cf) = c\,I(f)$ opět dlouhá věta

3. $I_\varphi(L_x f) = \dfrac{(L_x f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \underset{\text{opět}}{=} \dfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} = I_\varphi(f)$. □

Lemma 5: $\forall f, g \in C_c^+(G)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists V\ \exists \varphi\ \operatorname{supp}\varphi \subseteq V$

$$I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g) + \varepsilon.$$

Dk.: „Urysohn": $\exists h_0 \in C_c^+(G), h_0(x) = 1\ \forall x \in \operatorname{supp}(f+g)$

Vne U, otevrena nadmna supp(f+g), volim h_0=0.

$\forall \delta > 0$; $h = f + g + \delta h_0$

$h_1(x) := \begin{cases} f/h(x), & x \in \operatorname{supp}(f) \\ 0 \end{cases}$ | $h_2(x) = \begin{cases} g/h, & x \in \operatorname{supp}(g) \\ 0 \end{cases}$

$h_1, h_2 \in C_c^+(G)$ ze zákl. vět o spojitosti.

Z lemma 2 (důsl. stejnom. spoj.): pro $\overset{\varepsilon=}{\delta}$ $\exists V \ni e$

$|h_1(x) - h_1(y)| < \delta$ a $|h_2(x) - h_2(y)| < \delta$ pokud $y^{-1}x$ nebo $yx^{-1} \in V$

Nechť $\varphi \in C_c^+(G)$ a $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V$. ~~$\forall x \in G$~~

Nechť $\sum_{j=1}^{m} g_j \in C_{h,\varphi} \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m$, že mám přísl. odhady

Mám $f(x) = h(x)h_1(x) \le \sum_{j=1}^{m} g_j(L_{x_j}\varphi)(x) h_1(x)$ (1)

$g(x) = h(x)h_2(x) \le \sum_{j=1}^{m} g_j(L_{x_j}\varphi)(x) h_2(x)$ (2)

$\forall x \in G$: pokud $x_j^{-1}x \in \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V$, mám

$|h_1(x) - h_1(x_j)| < \delta \wedge |h_2(x) - h_2(x_j)| < \delta$

$\Downarrow$

$h_1(x) - h_1(x_j) < \delta$

~~(1)~~ $0 \le h_1(x) < \delta + h_1(x_j)$

Pro ostatni x_j je L_{x_j}phi=0, nahrazuji 0.

$(1) \le \sum_j g_j(L_{x_j}\varphi)(x)(\delta + h_1(x_j))$

$(2) \le \sum g_j(L_{x_j}\varphi)(x)(\delta + h_2(x_j))$

$(f:\varphi) \le \sum g_j (h_1(x_j)+\delta)$ $\quad (g:\varphi) \le \sum g_j (h_2(x_j)+\delta)$

snazsi cast inf: dolni zavora

$$h_1+h_2 \le \frac{f}{h}+\frac{g}{h} = \frac{f+g}{h} = \frac{f+g}{f+g+\underbrace{\delta h_0}_{\ge 0}} \le 1$$

$$(f:\varphi)+(g:\varphi) \le \sum_j g_j (h_1(x_j)+h_2(x_j)+2\delta) \le \sum_j g_j (1+2\delta)$$

$$L = \frac{(f:\varphi)+(g:\varphi)}{(1+2\delta)} \le \sum_j g_j \qquad \frac{\equiv C_{h,\varphi} \ni \sum_j g_j}{L}$$

L je dolní závora: $\underset{(h:\varphi)}{\underset{\|}{\inf(C_{h,\varphi})}} \ge L$

infimum je maximalni dolni zavora (v R i nejvetsi)

$$\inf(C_{h,f}) \ge \frac{(f:\varphi)+(g:\varphi)}{(1+2\delta)}$$ tj. $(f:\varphi)+(g:\varphi) \le (h:\varphi)(1+2\delta)$

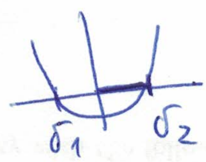
$$l_\varphi(f)+l_\varphi(g) = \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} + \frac{(g:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \le \frac{(h:\varphi)}{(f_0:\varphi)}(1+2\delta) = l_\varphi(h)(1+2\delta)$$

$$\le (1+2\delta)\, I_\varphi(f+g+\delta h_0) \underset{\substack{\uparrow \\ I_\varphi \text{ sublineární}}}{\le} (1+2\delta)\left[I_\varphi(f+g)+\delta\, l_\varphi(h_0)\right]$$

Zvol δ, aby: $2\delta I_\varphi(f+g)+(1+2\delta)\delta I_\varphi(h_0) < \varepsilon$.

Tj. $\quad 2\delta^2 A + 2\delta B - \varepsilon < 0$

$\delta_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2+2A\varepsilon}$



celkem $l_\varphi(f)+l_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g)+\varepsilon$. $\square$

~~Pozn.: Celkem: $I_\varphi(f)+I_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g)$. Celkem I_φ lineární~~

~~$a \le b+\varepsilon\ \forall \varepsilon \Rightarrow a \le b$. Spor: $a > b$. $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$~~

~~$a \le b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a \le b$ ↯.~~

$\longrightarrow$ Ad skrtla poznamka: odstanit epsilon "prave" nemohu kvuli vazani na phi.

Věta (Haarova míra – existence): Nechť G je lokálně kompaktní grupa. Pak G má levou Haarovu míru.

Dk (a la Weil): $\forall f \in C_c^+(G)$ $X_f := \left\langle \frac{1}{(f_0:f)}, (f_0:f) \right\rangle$, $X := \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f$ je kompaktní dle Tychonovovy věty.

Nechť $\varphi \in C_c^+(G)$. Pak $I_\varphi \in X_f$ dle Lemmatu 3.

$\forall V$ okolí $e \in G$: $K_V := \overline{\{I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V\}}$.

(V okolí e, zvol $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$, $\varphi \in C_c^+(G) \Rightarrow I_\varphi \in \{I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V\} \Rightarrow I_\varphi \in \overline{\{\ \}} = K_V$. $C_V := \{I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V$

1. K_V je uzavřená v kompaktu (v X), tj. K_V je kompaktní.
2. $\{K_V \mid V \text{ okolí } e\}$ má FIT (vlastnost konečných průniků):

   Uvaž $K_{V_1}, K_{V_2}, \dots, K_{V_n}$; V_i okolí e, $i = 1, \dots, n$.

   Zřejmě $e \in \bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$. Urysohn: $\exists \varphi \in C_c^+(G)$ $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_i$, tj.

   $I_\varphi \in K_{\bigcap_{i=1}^n V_i}$. Zřejmě $K_{\bigcap_{i=1}^n V_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n K_{V_i}$, tj. $\bigcap_{i=1}^n K_{V_i} \neq \emptyset$.

   FIT $\Rightarrow$ (+ X kompakt) $\bigcap_V \{K_V \mid V \text{ okolí } e\} \neq \emptyset$. Zvol $I \in \bigcap_V K_V$.
3. Chceme I je lineární a invariantní.

   a) „Malá odbočka" (vysvětlení k vole součinu):

   $I \in K_V$ $\forall V$. Buď $f \in C_c^+(G)$. Pak (z def. uzávěru) $(\forall V)$ existuje $I_\alpha \in C_V$, $I_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} I$. Ovšem síť konverg-uje v součinu $\Rightarrow$ všechny složky sítě konvergují, tj. $\forall g \in C_c^+(G)$ $\pi_g \circ I_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} \pi_g \circ I$. Co je to $\pi_g \circ I_\alpha$?

   $\pi_g \circ I_\alpha = I_\alpha(g)$, tj. $I_\alpha(g) \xrightarrow[\alpha]{} I(g)$ v $\mathbb{R}$. „Rozepišme" konvergenci: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha_0\ \forall \alpha \geq \alpha_0 : |I_\alpha(g) - I(g)| < \varepsilon$.

Mějmenyní $g_1, \ldots, g_k \in C_c^+(G)$, $I \in K_V\ \forall V \Rightarrow \exists I_\alpha \in C_V\ \forall V$

$I_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} I$, tj. $\forall i = 1, \ldots, k \quad I_\alpha(g_i) \to I(g_i)$, tj. $\forall i\ \forall \varepsilon$

$\exists \alpha_{0i}\ \forall \alpha \geq \alpha_{0i} \quad |I_\alpha(g_i) - I(g_i)| < \varepsilon$.

„Těch" α_{0i} je konečně (k). Polož $\alpha_{0j} := \max\{\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0k}\}$

" (definuji nějaké z možných j). $I_{\alpha_{0j}} \in C_V \Rightarrow \exists \varphi \in C_c^+(G)$

$\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$ $I_{\alpha_{0j}} = I_\varphi$. Máme tedy

$$|I_\varphi(g_i) - I(g_i)| = |I_{\alpha_{0j}}(g_i) - I(g_i)| < \varepsilon$$

[Mám konečně posl., vyberu $n_{01}, \ldots, n_{0k}$ a pak jejich max; stejnoměrnost v konečné mně je tedy triviální, což nime.

b) Nyní invariance: $I \in K_V\ \forall V$. Dle a) $\overset{\forall \varepsilon}{\exists} \varphi$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$, že $|I_\varphi(L_x g) - I(L_x g)| < \varepsilon$. Spočti

$$|I(L_x g) - I(g)| \overset{\text{dle Lemma 4}}{=} |I(L_x g) - I_\varphi(L_x g) + I_\varphi(L_x g) - I(g)|$$

$$= |I(L_x g) - I_\varphi(L_x g) + I_\varphi(g) \cancel{- I_\varphi(g) + I_\varphi(L_x g)} - I(g)|$$

$\leq \varepsilon + \varepsilon$, $g_1 = L_x g$, $g_2 = g$, $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |I(L_x g) - I(g)| = 0$.

c) Obdobně sublinearita:

$$|I(f+g) - I(f) - I(g)| = |I(f+g) - I_\varphi(f+g) - I(f) + I_\varphi(f) - I(g) + I_\varphi(g) - I_\varphi(f) - I_\varphi(g) + I_\varphi(f+g)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon.$$

d) $I(f) := I(f_+) - I(f_-)$ a eventuálně i pro $f : G \to \mathbb{C}$.

Celkem $I: C_c(G) \to \mathbb{C}$ je invariantní pozitivní lineární funkcionál. Pozitivnost: $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$ (plyne podobně z bodu 4 dlouhé věty). Připomeňme, že funkcionálem zde nemyslíme nutně spojitý! Rieszova věta: $\exists! \mu$ Radonova, že $I(f) = \int_G f \, d\mu \quad \forall f \in C_c(G)$. Platí $\mu(U) \overset{\text{def}}{=} \int \chi_U \, d\mu = I(\chi_U)$

- Nenulovost: U otevřená $\Rightarrow I_\varphi(\chi_U) > 0 \Rightarrow I(\chi_U) > 0 \Rightarrow$ $\mu(U) > 0$.
- Invariance: $\mu(gU) \overset{\text{def}}{=} \int_G \chi_{gU} \, d\mu \overset{\text{Riesz}}{=} I(\chi_{gU})$

$\boxed{\chi_{gU} = L_g \chi_U}$, ukázat: 1) $x \in gU \Rightarrow \exists y \in U \; x = gy$

$\chi_{gU}(x) = 1 \quad L_g \chi_U(x) = \chi_U(\underbrace{g^{-1}x}_{= y \in U}) = 1$

2) $x \notin gU \quad \chi_{gU}(x) = 0$

$(L_g \chi_U)(x) = \chi_U(\underbrace{g^{-1}x}_{\notin U}) = 0$.

Pokračujme $I(\chi_{gU}) \underset{\text{právě zjištěno}}{=} I(L_g \chi_U) \overset{\text{invariance } I}{=} I(\chi_U) \overset{\text{Riesz}}{=} \int \chi_U \, d\mu$
$\overset{\text{def}}{=} \mu(U)$. $\square$

Pozn.: Stejně se ukáže $\exists$ pravé Haarovy míry.

Věta (jedn. Haarovy míry): Je-li G lok. komp. top. grupa a μ_1 a μ_2 levé Haarovy míry. Pak $\exists c \quad \mu_1 = c\mu_2$ (neboli $\exists!$).

Dk.: Vynechán. Důsledek Tonelliho věty. (Viz např. bak. práci Marcuse Dickhoffa.) $\square$

Pozn.: Unicita i pro pravé Haarovy míry.