Principy harmonické analýzy

OBSAH

1. Prolog a historie.
2. Opakování zákl. pojmů z topologie a Tychonovova věta
3. Opakování zákl. pojmů z teorie míry a konstrukce Haarovy míry
4. Základy teorie reprezentací topol. grup
5. Základy Banachových algeber a Gelfandovo zobrazení
6. Pontrjaginova dualita a zobecnění Poissonovy sumační formule

Literatura

Deitmar, A; Echterhoff, S.: Principles of harmonic analysis.

Dixmier, J.; C*-algebras and their representations.

Segal, I.; The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. 61, 1947.

Principy harmonické analýzy

HISTORIE

a) Fourier a Laplace : Laplaceq.: $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
(1768–1830) (1749–1827)

Fourier : rce $\Delta f = \partial_t f$, $f(t, x_1, \dots, x_n)$,
vedení tepla (~1820)

Metody Four. řad (a Four. koeficientů) a
Fourierovy transformace

b) Lebesgue, Pontrjagin, Hermann Weyl
(1875–1941) (1908–1988) (1885–1955)

Prostory $L^1(G)$, $L^2(G)$

Charaktery (z teorie čísel) a reprezentace
Lieových grup

c) Kaplansky, Neumann, Gelfand and Birkhoff
(1917–2006) (1903–1957) (1913–2009)

algebry operátorů, Banachovy algebry,
C^*-algebry, C^*-moduly
→ kvantová teorie (Rieffel, Irving Segal)
(jistý typ mat.
kvantové teorie)

d) Syntéza c) s geometrií (Alain Connes 1947–)
a množí další

Principy harmonické analýzy

① PROLOG

1. Rovnice vedení tepla

$\Delta u = \partial_t u$, $u : I \times U \to \mathbb{C}$, $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

U otevřená v $\mathbb{R}^n$, $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

u je C^2 vůči x a u je C^1 vůči t ... $u(t,x)$

Příklad: $\partial_x^2 u = \partial_t u$, tj. v $\mathbb{R}^1$, $t \in (0,\infty)$, $U = (0,2\pi)$ pro jednoduchost.

Předpokládejme, že $u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx}$,

tj. „existenci Fourierovy řady" $\forall t \in (0,\infty)$ (vůči x).

Variace Dirichlet-Jordan kritéria

• Existence $\partial_x^2 u$ abs. spojité a $\partial_x^3 u \in L^2(0,2\pi)$
$\Rightarrow$ stejnom. konvergence $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) (e^{inx})^{(k)}$ k $\partial_x^k u(t,x)$
$k = 0,1,2$ & .

[Pro $k=0$ dostáváme i existenci F. řady zmíněné výše. Existence F. řady „v L^2" je snažší, ale neříká nic o konvergenci derivací. (Ex. v L^2 míníme konvergenci řad v L^2-normě.)]

Důležité připomenutí: Je-li $f \in L^2(a, a+\ell)$, $a \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, pak $a_n := \frac{1}{\ell} \int_a^{a+\ell} f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{\ell}} dx$ nazýváme Four. koeficientem f a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2\pi i n x}{\ell}}$ Fourierovou řadou f. (Proto bez ohledu na to zda (řada) konverguje k f. (Proto sousloví „existence F. řady..." jsou v uvozovkách.) F. Řada nemusí konvergovat pro „žádné" x (natož k f :-))

zpřesnění

Předpokládejme tedy, zpět rovnici vedení tepla, že $\forall t$ je $\partial_x^2 u$ abs. spojitá a $\partial_x^3 u \in L^2(0,2\pi)$. Počítejme

$$\partial_x^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_x^2 a_n(t) e^{inx} = \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 a_n(t) e^{inx}}.$$

stejn. konv. pro $k=2$
zmíněná výš.

Předpokládejme stejnoměrnost konvergence $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{(p)}(t)e^{inx}$
myslime stejnomernost vuci t a i pro derivaci, opet vuci t
pro $p=0,1$ (tj. v t a i pro derivaci).

Můžeme počítat $\partial_t\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)e^{inx}\right) =$

$$\boxed{= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_t a_n(t) e^{inx}.}$$

Srovnáním a díky jedn. Four. řad ($\partial_x^2 u$ i $\partial_t u$ jsou z L^2, neb u splňuje rci vedení tepla) je $-n^2 a_n(t) = \partial_t a_n(t)$, tj. $a_n'(t) + n^2 a_n(t) = 0$.
Asociov. rovnice (charakteristická) je $\lambda + n^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = -n^2$ a $a_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$, kde C_n je konstanta vzhledem k t. Máme vzoreček

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}}.$$

Nevíme, ale že $u(t,x)$ "skutečně" řeší rci vedení tepla (záměna vůči ∂_t a Σ).

- "Pro pevné x stačí odhadnout $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \le D_n$ nezávislým na t, příp. závislým na x, tak aby $\sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n$ konvergovala (princip Weierstrassova krit. stejn. konvergence). Počítejme $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| = |C_n e^{-n^2 t}|$.
Nejmenší horní odhad je ~~tzv~~ nejmenší horní závora, tj.

supremum. Ale $\sup_{t\in(0,\infty)} |C_n e^{-n^2 t}| = |C_n| \sup_{t\in(0,\infty)} e^{-n^2 t} = |C_n|$

Nyní (pro použití Weierstrasse) je nutné aby $\sum |C_n|$ konvergovala. To je jistě postačující.

„Trikem" lze ale dosáhnout i více možností (širší třídu) pro C_n. Zvolme $\delta > 0$.

Odhodneme $|C_n e^{-n^2 t}|$ na (δ, ∞).

$e^{-n^2 t}$ klesá na $(0,\infty)$, tj. $|C_n e^{-n^2 t}| \le |C_n| e^{-n^2 \delta}$.

Pokud $C_n = p(n)$, kde p je polynom

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n| e^{-n^2\delta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p(n) e^{-n^2\delta}$ konverguje, neb

$\forall p\ \exists n_0 \exists C \forall n \ge n_0 \quad p(n) \le C e^{n^2\delta_1},\ \delta_1 < \delta$

$|p(n)\, e^{-n^2\delta}| \le C e^{n^2(\delta_1-\delta)} \le C e^{n(\delta_1-\delta)}$

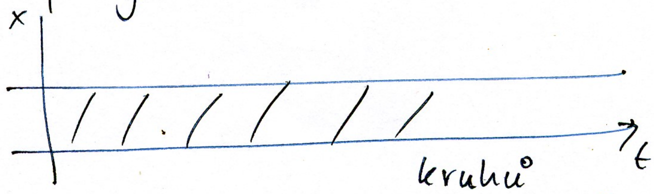
(geom. řada). $\sum C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ konv. stejnom na (δ,∞) $\forall \delta > 0$. Konverguje tedy stejnom na $(0,\infty)$. Konečně $\boxed{u(t,x) = \sum C_n e^{-n^2 t} e^{inx}}$ pro C_n polynom řeší $(\Delta - \partial_t) u = 0$.

(„Realifikace" A_n, B_n polynomy v n $\Rightarrow$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \right)$$

řeší vedení tepla.) Otázka jednoznačnosti ani za dodat. podm. na $\partial_x^2 u, \partial_x^3 u$ nejasná... ~~...~~ (v této úvaze!)

• Uvědomme si, že jsme řešili $\Delta u = \partial_t u$ jen na pásu



. Jak je to na jiných oblastech (kruhu, vnějšku, prstence, koule, sféry, válce). Především jak adaptovat konvergenční kritéria ($\in L^2$, $\partial^3 \in L^2$, Jord-Dir, stejnom. konv. atd)

2. Rovnice vedení tepla podruhé

Fourierovou transformací: $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx$

„Fourierova transformace zaměňuje derivaci s násobením $2\pi i x$."

Nutno říct jak, kde. Proto Schwartzův prostor

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f$ je $\mathcal{C}^\infty \wedge \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \cancel{\forall} \beta \in \mathbb{N}_0^n$ $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_\alpha f(x)| < \infty \}$, kde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$,

$$\partial_\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

• Nechť $\partial_x^k u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ a $\partial_t u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ a $\partial_x^2 u + \partial_t u = 0$
$k = 0, 1, 2$ ← Přirozeně stačí $k = 0$ (z def. Schw. prostoru). Pak

$\mathcal{F}(\partial_x^2 u - \partial_t u) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}\partial_x^2 u - \mathcal{F}\partial_t u = 0 \Longrightarrow$

$\mathcal{F}$ lineární zobrazení

$\mathcal{F}$ & der + der. Leb. int. dle parametru

$$(2\pi i x)^2 \mathcal{F}u - \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{der. Leb.}) \\ \text{zde}}}{\underline{\partial_t \mathcal{F}u}} = 0$$

Označme $v = \mathcal{F}u$ $(v(t,x) = (\mathcal{F}u)(t,x))$.

$$-4\pi^2 x^2 v(t,x) - \partial_t v(t,x) = 0 \implies -4\pi^2 x^2 - \lambda = 0$$

$$\implies \lambda = -4\pi^2 x^2 \quad a \quad v(t,x) = C(x)\, e^{\underbrace{-4\pi^2 x^2}_{\lambda} t}.$$

$$u(t,x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left(C(x)\, e^{-4\pi^2 x^2 t}\right).$$ Silně závisí na $C(x)$.

Většinou víme rozložení tepla na počátku, $t \to 0^+$ (myslíme). Nechť $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x)$. Tj. chceme, aby

$$\lim_{t\to 0^+} \mathcal{F}^{-1}\left(C(x)\, e^{-4\pi^2 x^2 t}\right) = \mathcal{F}^{-1}(C(x)) = u_0(x) \implies$$

1 $C(x) = \mathcal{F} u_0(x)$. Celkem $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}u_0(x)\, e^{-4\pi^2 x^2 t}\right)$, pokud předpokládáme: ~~Ale~~ pro $u_0 \in \mathcal{S}$.

3 To...

Myslime podm., u_0 in S

2 Celkem elegantní: $\exists, \exists!$

Tvrzeni" If u_0 in S, pak $u(t,x)$ existuje a je jednoznacne.
Dk.: vzorecek pro u vyse, bijektivnost F a uzavrenost S.

To je trochu nevýhodné ($\mathcal{S} \subseteq L^1$; fce v $\mathcal{S}$ nesmí růst atd...)

uzavřen. na ∂_α & násob.

ZOBECNĚNÍ: TEORIE DISTRIBUCÍ

3. Jeden z motivů

$\Delta = \partial_t$:

a) $f(x) \,„\!\!\underset{\shortparallel}{\simeq}\!" \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, kde $c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$

b) $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y}\, dx$ vede k podobnému cíli. $\boxed{\text{Proč?}}$

Nebo:

a) $f(x) \,„\!\!\underset{\shortparallel}{\simeq}\!" \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx}_{c_n} = \int_{\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\, d\mu_{discr.}$

e^(inx)

Dodani exponencial, chyba)-:

e^(inx)

b) $(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \int f(y) e^{+2\pi i x y}\, dy$. (Proč je techn. celkem obtížné.) Celkem

$$f(x) \underset{\text{na } \mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x y}\, dx \right) e^{-2\pi i x y}\, dy$$

Podobné vzorce. Proč?

Tento ústí v tzv. Pontrjaginovu dualitu, jež se snaží tento, řekněme, údiv vysvětlit.

Vysvětlení je zajímavé:

to bylo totiž později (L. Schwartz) ...

- Je nutné studovat (nejen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) různé $L^p(\mathbb{R}^n)$, ale i $L^p(G)$, kde G je topologická grupa, stačí "lokálně" kompaktní (nebo jen Lieova :-))

  ... později ? ŠO

- Definovat Fourierovu transformaci na onom $L^p(G)$.
- Zabývat se dualitou ... třeba $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$; ve fyzice také je (mřížky, duální mřížky; prostor souřadnic, prostor hybností).

Proč by to mělo „jít"? Proč je možné vybudovat teorii Fourierových transformací na $L^p(G)$ a spojit ji s teorií Fourierových řad (kde?)? Neřku-li řešit rce vedení tepla na příslušných prostorech – zřejmě G.

Odpověď: V důkazech invertibility $\mathcal{F}$ a ~~$\mathcal{F}$~~ transf. inverzní $f \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i x y}\, dy \leftarrow x\right)$, jež se od $\mathcal{F}$ liší jen znaménkem u e, v identitách s tzv. konvolucí používáme $[x+(y+z)=(x+y)+z]$ & $[x+(-x)=0]$ & $[\exists x$ je jednoznačný $\forall x]$ $\rightsquigarrow$ grupové vlastnosti.

4. Další zobecnění

Teorie Banachových algeber = asociativních algeber A nad tělesem K s normovanou izometrickou involucí, především $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, či $\overline{\mathbb{F}_p}$ (alg. uzávěry kon. těles), která je vybavena normou $\| \, \| : A \to \mathbb{R}$, že $\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \ \forall a, b \in A$ a $(A, \|\cdot\|)$ je Cauchyovsky úplný.

Nebo teorie C^*-algeber (von Neumann, Gelfand).

$\rightsquigarrow$ $\forall$ **komutativní** C^*-algebra je izomorfní $\mathcal{C}_0(X)$, kde X je lok. komp. t. pstor a C_0 pstor spojitých funkcí klesajících v nekonečnu. $X \ \exists!$ až na homeo.

— podobnost s alg. geometrií (souřadnicový okruh variety $\rightsquigarrow$ varieta)

— podnícení vzniku nekom. geometrie (Co pro A je nekom. C^*-algebra?)

$\Longrightarrow$ Teorie reprezentací lok. komp. grup, především Lieových (prekurzor věta Petera–Weyla)

$\rightsquigarrow$ Harmonická analýza na homogenních prostorech