Matematika pro fyziky III

1.10.2014

Témata: 1, Fourierova transformace a konvoluce

2, Základy teorie distribucí

3, Základy parciální diferenciální rovnice

4, PDR v geometrických situacích

5, Dodatky

Zkouška: písemná a ústní 2. den

Opakování

a, pre-Hilbertův prostor

1, Cauchy-Schwarz $|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$

2, trojúhelníková nerovnost $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3, rovnoběžník $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u-v\|^2 + \|u+v\|^2$

4, konvergence v pre-Hilbert. prostoru $(v_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{H}$

$\lim_{n\to+\infty}(v_n) = v \overset{def}{\iff} \lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\| = 0 \quad (\iff \forall \varepsilon\ \exists n_0\ )$

b, Hilbertův prostor

1, def. = úplný pre-Hilb. ($(v_n)_{n=1}^{+\infty}$ cauchyovská, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \|v_n - v_m\| < \varepsilon$ konvergují ve smyslu 4,)

2, úmluva: dále budeme uvažovat jen separabilní H.p. $\overset{def}{\iff} \exists$ ÚONS, který je spočetný

3, Besselova nerovnost $\sum_{n\in M_2} |(f,u_n)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (u_n)_{n\in M}$ ON systém

4, Parseval $\sum_{n=1}^{+\infty} |(f,u_n)|^2 = \|f\|^2 \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ÚONS

5, $L^2(X,\lambda) = \mathcal{L}^2(X,\lambda)/\simeq$ kde $\simeq$ je rovnost s.v., je Hilbertův prostor (dk. jen pro-Hilb.)

$\mathcal{L}^2(X,\lambda) = \{f: X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid \int |f(x)|^2 d\lambda < +\infty\}$

$\to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Lebesgueova míra — Lebesgueův integrál

$\lambda([0,1]) = 1$

Pre-Hilb. $\Leftarrow$ Young, Hölder, Minkowski ($f+g \in L^2$)

$f \in L^2, g \in L^2$

$\|f+g\|^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|g\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$

- $\left(e^{\frac{2\pi i x}{\ell} n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ a $\left\{1, \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell} n\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell} n\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ je úplný OG systém $L^2((a, a+\ell))$

- Platí ~~...~~ Tedy na $L^2((0,2\pi))$ Parsevalova rovnost

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (= \|x\|^2)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (= \|x^2\|^2)$

$$\left(\int \frac{x^3}{e^{-cx}+1}dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} x^3 e^{-cnx}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int x^3 e^{-cnx}\,dx = \sum_n k_n e^{-cnx}\Big|_0^{+\infty} = \left(\sum \frac{1}{n^4}\right)\tilde{c}\right.$$

3 x Per partes

$$\int dE_W = \sigma T^4 \quad \sigma = \text{const} \qquad \frac{\pi^4}{90}$$

Planckův vyzařovací zákon

c, Banachovy prostory

1, prostory s normou, které jsou úplné

2, každý skalární součin indukuje normu $\forall \|x\| = \sqrt{(x,x)}$ ne každá norma je indukovaná skalárním součinem

3, $\nu : X \longrightarrow [0,+\infty)$: $\cdot\ \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$

$\cdot\ \nu(cx) = |c|\nu(x)\ \forall c \in R$

$\cdot\ \nu(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

4, úplnost prostoru s normou

$(v_n)_{n\in N} \subseteq X$ cauchyovská $\Rightarrow$ konv.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ \nu(v_n - v_m) < \varepsilon \qquad \exists v \in X\ \lim_{n\to+\infty} \nu(v_n - v) = 0$

konv. $R \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0, \nu(v_n$ ... $< \varepsilon$

Příklady 1, $L^2(X,\mu)$ Hilb. $\int f g\, d\lambda_{R^n} = (f,g)$

2, V konečné dimenze $\Rightarrow$ V má skalární součin

Dk: $\exists (e_i)_{i=1}^k$ báze $\underset{V}{(v,w)} := \left(\sum_{i=1}^k c^i e_i, \sum_{j=1}^k d^j e_j\right) = \sum_{i=1}^k c^i d^i$

Snadno vlastnosti skalárního součinu $\cdot$ linearita

$\cdot$ symetrie

$\cdot$ poz. def. $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- úplnost $\varphi : V \cong R^n$

$\varphi(\sum c^i e_i) := (c_1, \dots, c_n)$ φ je spoj. vůči $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\,)}$ a $\|(x^1,\dots,x^n)\|_{R^n} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

inv. φ je spoj. též

R^n víme, že je úplný? $\Leftrightarrow$ konv. po složkách $\Leftrightarrow (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ konv. $\Leftrightarrow (a_n^i)_{n=1}^{+\infty}$ $\forall i = 1,\dots,n$ (2. sem)

$(a_n = (a_n^1, \dots, a_n^n) \in R^n$

konvergence po složkách $\Rightarrow$ konv. v R

Bolzano - Weierstraß: $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0$

$|a_n - a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists a \in R\ \lim_{n\to+\infty} a_n = a$

3, Buď $I \subseteq R$ kompaktní interval ($\equiv$ om. + uz.). Uvažujme prostor $X = \mathcal{C}(I) = \{f : I \to C \mid f$ sp. na $I\}$

$\nu(f) = \sup\{|f(x)|, x \in I\}$ Je to norma na X? • $\nu: X \to [0,+\infty)$

co když $\sup\{|\;|\} = +\infty$

Nemůže být $+\infty$, neb spojitá na kompaktu nabývá maxima

a $\exists$-li maximum $\Rightarrow$ je rovno supremu (zřejmé)

sp. na komp. (1. sem. sp. na uz. a om. int.)

• dle 1. bodu: $\nu(x) = \max\{|f(x)|, x \in I\}$

$\nu(f+g) \leq \nu(f) + \nu(g)$

levá strana $\max\{|f(x)+g(x)| \mid x \in I\} = \alpha$

pravá strana $\max\{|f(x)| \mid x \in I\} = \beta$ $\quad \max\{|g(x)| \mid x \in I\} = \gamma$

$\alpha = |f(x_0) + g(x_0)| \; \exists x_0$

$\beta = |f(x_1)| \; \exists x_1$

$\gamma = |g(x_2)| \; \exists x_2$ $\qquad |f(x_0)+g(x_0)| \underset{\text{troj. v } \mathbb{C}}{\leq} |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq |f(x_1)| + |g(x_2)| = \beta + \gamma$

$\nu(cf) = \max\{|c||f(x)| \mid x \in I\} = |c| \max\{|f(x)| \mid x \in I\}$

$\nu(f) = 0 \Rightarrow \max\{|f(x)| \mid x \in I\} = 0 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 0 \quad \forall x \in I$

$|f(x)| = 0 \quad \forall x \in I$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in I, \; \underline{0 \in X}$

Je $\mathcal{C}(I)$ úplný? Ano

Dk: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cauchyovská $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0$

$\nu(f_n - f_m) < \varepsilon \quad \forall x_0 \in I \quad f_n(x_0) \xrightarrow{?}$

$\nu(f_n - f_m) = \max\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in I\} < \varepsilon$

$\Rightarrow |f_n(x)| = |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x)| \leq \varepsilon + |f_m(x)| \quad \forall x \in I$

Ekv. formulace cauchyovskosti $\quad |f_{n_0+p}(x)| \leq \varepsilon + |f_{n_0}(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}. \qquad n = n_0 + p$

$m = n_0$

$\hookrightarrow |f_{n_0+p}(x)| \leq M \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad$ omezená $\forall x$

$|f_q(x_0)| \leq N$

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat monotónní podposloupnost $(|f_{a_q}(x_0)|)$

a_q vybrané $\; a_1 < \dots a_r <$

+ monotónní a omezená (Weierstraß)

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \; \lim\limits_{q\to+\infty} |f_{a_q}(x_0)| = a(x_0) \qquad x_0 \mapsto a(x_0), x_0 \in I$

Tvrdím že $a: x \mapsto a(x)$ je kandidát na limitu

Dk: $|a - f_m| = |a - f_{a_q} + f_{a_q} - f_m| \leq \underset{\wedge\, \varepsilon}{|a - f_{a_q}|} + \underset{\wedge\, \varepsilon}{|f_{a_q} - f_m|} \leq 2\varepsilon \quad \square$

Matematika pro fyziky III

7.10.2014

- Minule: $\mathcal{C}(I)$ je Banachův

Dk: ... (dokončení)

$h(x)$ je bodová limita, $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ cauchyovská, $|f_n - f_m| \to 0$

$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$

$\Rightarrow \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists n_0 \, \forall m,n \geq n_0$

$|f_n(x) - h(x)| = |f_n(x) - f_{m_x}(x) + f_{m_x}(x) - h(x)| < |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - h(x)| = \overset{n \geq n_0}{\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$m_x = \max\{n_0, N_x\}$ kde N_x $\forall p > N_x$ $|f_p(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\exists$ neb h je bodová limita)

Vidíme: $\exists n_0 \, \forall n \geq n_0 \, \forall x \quad |f_n(x) - h(x)| < \varepsilon$

Ale to je definice stejnoměrné konvergence

- Věta limita spojitých ($f_n \in \mathcal{C}$) stejnoměrně konvergentních fcí je spojitá (3. semestr)

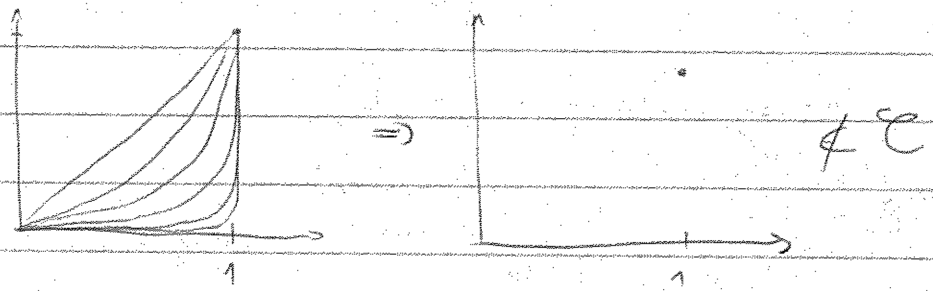
$\to h \in \mathcal{C}(I)$

$(f_n)_{n=1}^{+\infty} \in$ cauchyovských posl. v $\mathcal{C}(I) \Rightarrow$ má lim. $h \in \mathcal{C}(I)$ $\quad \mathcal{C}(I)$ je Banachův ∎

Ři $\mathcal{C}(I)$ s konvergencí definovanou bodově, tj. $\lim_{n\to+\infty} f_n = f \overset{def}{\iff} \forall x \in I$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, není úplný.

Neb. $(x^n)_{n=1}^{+\infty}$ na $[0,1]$



1. Fourierova transformace

Úmluva: Všechny Hilbertovy prostory pp. být separabilní (spočetný ÚONS).

Bylo: $L^2((a, a+l)) \longrightarrow \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{C}\}$

$$f \longmapsto \left(a_n = \frac{1}{l}\int_a^{(N)} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi n i}{l} x\right) dx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

F koeficienty f $\qquad$ je to zobrazení f do posloupností

- Nyní: Fourierova transformace

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

požadujeme unitaritu $(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g)$

- problém je definice $\mathcal{F} \to \mathcal{S}$, L^1, L^2

<u>Definice 1.1</u> SCHWARZŮV PROSTOR

Schwartzův prostor (na $\mathbb{R}^n$) je prostor fcí $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, které splňují:

1. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (jsou hladké a diferencovatelné)
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ je $\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta f(x)| < +\infty$

derivace

Značí se $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Poznámka</u>

1. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ multiindex

$D_\beta = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$, $|\beta| = \sum\limits_{i=1}^n \beta_i$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$

2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ubývá velmi rychle. $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$. Mohu ji přenásobit libovolným polynomem a stejně existuje její sup

$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^{2k} f(x)) = C (< +\infty)$

3. $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ seminormy. Platí: $\nu(x) + \nu(y) \geq \nu(x+y)$

$\nu(cx) = |c|\, \nu(x)$

$\hookrightarrow \nu(0) = \nu(0x) = |0|\, \nu(x) = 0$ ALE nepožaduji obrácení,

$\nu(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Proč? • $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\|f+g\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta (f+g)(x)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta f(x) + x^\alpha D_\beta g(x)| \leq$

$\leq \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (|x^\alpha D_\beta f(x)| + |x^\alpha D_\beta g(x)|) \leq \sup |(\dots)| + \sup |(\dots)| = \|f\|_{\alpha,\beta} + \|g\|_{\alpha,\beta}$

Δ v $\mathbb{R}$ — subaditivita (Δ v $\mathbb{R}^n$)

• $x^\alpha D_\beta 0 = 0 = \|0\|_{\alpha,\beta}$ $\|cf\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta c f| = |c| \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta f| = |c|\, \|f\|_{\alpha,\beta}$

• $\sup |x^\alpha D_\beta f| = 0$

např. $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 1$ $\sup |D_1 f| = 0$ pp.

$\sup |f'| = 0$ $f = 1$ na $\mathbb{R}$

$f' = 0$

$\sup = 0$ ale $f \neq 0$ $\Rightarrow \|\cdot\|_{0,1}$ není normou [na $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$]

4, na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\|\cdot\|_{0,1}$ norma je, neb $0=\|f\|_{0,1}=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \Rightarrow |f'(x)|=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f=\text{konst} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pokud konst $\neq 0$ neboť

$\|f\|_{1,0}=\sup_{x\in\mathbb{R}}|xf| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\cdot\text{konst}| = +\infty \not< +\infty \Rightarrow \text{konst}\neq 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Označení:

$\varphi \in F(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ je funkce

1, $M_\varphi: F(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \longrightarrow F(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, $(M_\varphi f)(x)=\varphi(x)f(x)$

multiplikační operátory

$[Qf=xf,\ Q=M_x]$

2, a, $(\mathbb{R}^n,+,0)$ je komutativní grupa, $\forall a\in\mathbb{R}^n$ $A_a b = a+b \quad \forall b$

$A_a:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ translace o a

b, orientaci zachovávající rotace $SO(n)=\{A \mid A^TA=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \wedge \det A=1\}$

speciální ortogonální matice

$r_A(b):=Ab,\ b\in\mathbb{R}^n,\ A\in SO(n),\ r_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

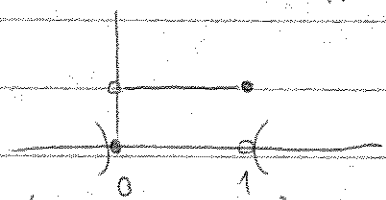
c, dilatace $(\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot,1)$

$dil_c(b)=cb \quad \forall c\in\mathbb{R}^\times, b\in\mathbb{R}^n,\ dil_c:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

Definice 1.2

$f\in F(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, definuji množinu $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\neq 0\}}$
(support)

Př:



$f(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,1] \quad \operatorname{supp} f=[0,1]$

Ozn: $x\notin \operatorname{supp} f \Rightarrow f(x)=0$

Věta 1.1

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je 1, $\neq 0$, $e^{-\|x\|^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, kde $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

2, každá hladká fce s komp. nosičem je z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

3, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je v.p.

4, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je komutativní algebra, tj. $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\Longrightarrow fg=gf\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5, $\forall \gamma\in\mathbb{N}_0^n$ $x^\gamma\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $D_\gamma \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$M_{x^\gamma}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dk: 1, Vezmeme $n=1$, $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

$Df_m = f^{(m)}$ $\quad x^n D_m e^{-x^2} = x^n D_{m-1}(De^{-x^2}) = x^n D_{m-1}(-2xe^{-x^2}) = x^n D_{m-2}(2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}) =$

$= x^n D_{m-2}((-2+4x^2)e^{-x^2}) = \dots = x^n q(x) e^{-x^2}$, kde q je nějaký polynom (formálně indukcí podle m)

$\|e^{-x^2}\|_{n,m} = \sup |x^n D_m e^{-x^2}| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n q(x) e^{-x^2}| \overset{?}{<} +\infty$

a, $\lim_{|x|\to+\infty} |x^n q(x) e^{-x^2}| = 0$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists R>0\ \forall x\ |x|>R\ \ |x^n q(x) e^{-x^2}| < \varepsilon$

b, co se děje $\overline{D(0,R)}$? Fce $x^n q(x) e^{-x^2}|_{\overline{D(0,R)}}$ je spojitá a $D(0,R)$ je kompaktní množina $\Rightarrow x^n q(x) e^{-x^2}$ je omezená $\Rightarrow |\ .\ | < C$

a, + b, $\forall x \in \mathbb{R}$ je $|x^n q(x) e^{-x^2}| < \max[\varepsilon, C] \Rightarrow \sup < \max\{\varepsilon, C\}$ ✓

2, Hl. fce s kompakt. nosičem

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f|_{\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(f)} = 0$ $\quad f|_{\mathbb{R}^n\setminus \operatorname{supp} f}$ je nulová na ot. množině $\Rightarrow D^m f = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f : |x^n \underline{D^m f}| = 0$

$x \in \operatorname{supp} f : |x^n D^m f| \overset{\circ}{\leq} C$, neboť $\operatorname{supp} f$ je komp. dle př.

$\sup |x^n D^m f(x)| \leq C$

$(x \in \operatorname{supp} f)\ (= x \in \mathbb{R}^n)$ odtud $\|f\|_{n,m} < +\infty$

3, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ v.p., $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0$

$\|f+g\|_{\alpha,\beta} = \sup|x^\alpha D_\beta(f+g)| = \sup|x^\alpha(D_\beta f + D_\beta g)| = \sup|x^\alpha D_\beta f + x^\alpha D_\beta g| \overset{\Delta \text{ v } \mathbb{R}}{\leq}$

$\leq \sup(|\quad| + |\quad|) \leq \sup(|\quad|) + \sup(|\quad|) = \|f\|_{\alpha,\beta} + \|g\|_{\alpha,\beta} < +\infty + (+\infty) = +\infty$

Tj. $f+g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ má konečnou seminormu + libovolné - stejně

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

4, ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je algebra (komutativní)) $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{?}{\Longrightarrow} fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\quad$ /sup

$x^\alpha D_\beta(fg) \underset{\text{multileibnitzovo pravidlo}}{=} x^\alpha\left(\sum_\delta \binom{\beta}{\delta} D_\delta f\, D_{\beta-\delta} g\right) = \sum \binom{\beta}{\delta}(x^\alpha D_\delta f)(D_{\beta-\delta} g) \leq \sum \binom{\beta}{\delta} \underset{<+\infty}{\|f\|_{\alpha\delta}} \underset{<+\infty}{\|g\|_{0,\beta-\delta}} <+\infty$

mnohočlenných

$\delta \leq \beta \Longleftrightarrow \delta_i \leq \beta_i$ a $\binom{\beta}{\delta} = \binom{\beta_1}{\delta_1} \cdots \binom{\beta_n}{\delta_n}$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$ z toho že uvažujeme bodové násobení

5, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\quad M_{x^\gamma} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\|x^\gamma f\|_{\alpha\beta} = \sup|x^\alpha D_\beta(x^\gamma f)| = \sup\left|x^\alpha \sum \binom{\beta}{\delta} (x^\gamma)^{(\delta)} f^{(\beta-\delta)}(x)\right| < +\infty$ $\quad$ ($\alpha+\gamma-\delta$, $\beta-\delta$ - normo $<+\infty$)

$D_\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\quad \|D_\beta f\|_{\gamma\psi} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\gamma D_\psi(D_\beta f)(x)| = \sup|x^\gamma D_{\psi+\beta} f| = \|f\|_{\gamma,\psi+\beta} < +\infty$ ▨

Matematika pro fyziky III. — 8.10.2014

Literatura: Kopáček IV. (F.t.)
Čihák a kol.
Příklady – Kopáček, Čerych
Treves François – Topological vector spaces, Distributions and Kernels
– Basic PDE's

Věta 1.2

Pokud $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pak $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (x,y)}\, dx$ je dobře definovaná fce na $\mathbb{R}^n$. (sk. součin na $\mathbb{R}^n$)

Dk:

1) $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, neboť $f_{|K}$, kde K je kompaktní v $\mathbb{R}^n$: $f_{|K} \leq C$
$f \in \mathcal{S} \Rightarrow C^\infty \Rightarrow C^0 \xrightarrow[\text{komp.}]{\text{sp. na}}$ omezená

vně K $(\mathbb{R}^n \setminus K)$

$(x_1^2 + \dots x_n^2)^{\frac{(n+\varepsilon)2}{2}} f(x) = |x|^{2(n+\varepsilon)} f(x) \quad / \sup$

$\sup |f(x)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n+\varepsilon}| = \sum_j \|f\|_{j,0} < +\infty$

$\Rightarrow |f(x)| \overset{(*)}{\leq} \frac{C}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n+\varepsilon}}$ kromě $(0, \dots, 0)$

$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n+\varepsilon}} \ \exists \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} f \in L^1$ Lebesgueova věta o dominantní konvergenci

$(f_n) \longrightarrow f \quad |f_n| \leq g \in L^1 \qquad f_n = f \ \forall n \quad f \leq g = \frac{C}{(\dots)^{n+\varepsilon}}$
$\quad L^1 \qquad L^1 \qquad$ (taková použít Lebes. větu)

Proč?

$$\int \frac{C r^{n-1}\, dr}{r^{2n+2\varepsilon}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^{n-1} \dots d\vartheta_1 \dots \int_0^{\pi} \cos \dots d\vartheta_{n-1}}_{< +\infty} = \int \frac{C\, dr}{r^{n+1+2\varepsilon}} = C\left[\frac{r^{-n+2\varepsilon}}{n+2+2\varepsilon}\right]_k^{+\infty} = 0 - C\frac{k^{-n+2\varepsilon}}{n+2+2\varepsilon} < +\infty$$

$k = \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in K\} > 0$

$K = D(0,R),\ k = R > 0$

neboť K dost velké

na $\mathbb{R}^n \longrightarrow \left.\begin{array}{l} f \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus K) \\ f \leq C \text{ na } K \end{array}\right\} \Rightarrow f \in L^1$

2) Lebesgueova věta o dominantní konvergenci $\Rightarrow$ Víme již $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $|\underbrace{f e^{-2\pi i (x,y)}}| = |f|$
$\forall y$ je $z^y(x)$ Lebesgueovsky integrovatelná

$\left[z_n^y(x) := z^y(x)\ \forall n \mid z_n^y \longrightarrow z^y(x),\ |z^y(x)| \leq |f| = (g^{\text{Leb.}}) \right]$

Tj. $\int z^y(x)\, dx \ \exists\ \forall y$ a je konečný $\square$

POZNÁMKA: Měřitelnost se netkouší!

Definice 1.3 Fourierova transformace

$\mathcal{F}: f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{F}f$ se nazývá Fourierova transformace.

Pozn:

1) Víme, že $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $f \longmapsto (\mathcal{F}f)$; $y \longmapsto (\mathcal{F}f)(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ kde $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx$ viz V1.2

2) V1.2 je tvrzení o existenci F.t. na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Příklad: Jak se chová F.t. vůči interakci se zobrazeními $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{t_a}$, r_A, $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^x}}{d_{\tilde{a}}}$ a násobením fcí M_φ

1) translace:

$t_a: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad T_a: \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

$(T_a f)(x) = f(-a+x) = f(x-a)$

$$[(\mathcal{F}T_a)(f)](y) = \int (T_a f)(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx = \int f(x-a) e^{-2\pi i (x,y)} dx \left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ z = x - a \\ \overset{\cap}{\mathbb{R}^n} \text{ (tedy vektor)} \end{array} \right| =$$

$T_a f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$= \int f(z) e^{-2\pi i (z,y)} e^{-2\pi i (a,y)} dz = M_{e^{-2\pi i (a,y)}} (\mathcal{F}f)(y) \Longrightarrow \mathcal{F}T_a = M_{e^{-2\pi i (a,y)}} \mathcal{F}$$

2) rotace:

$r_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $v \longmapsto Av = r_A(v) \quad R_A: \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

$(R_A f)(x) = f(A^{-1}x)$ kdyby $(R_A f)(x) = f(Ax)$, $(R_A(R_B f))(x) = (R_B f)(Ax) = f(BAx) = (R_{BA} f)(x)$ Chceme: $R_A R_B = R_{AB}$

$$(\mathcal{F}R_A f)(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} (R_A f)(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx = \int f(A^{-1}x) e^{-2\pi i (x,y)} dx \left| \begin{array}{l} z = A^{-1}x \\ x = Az \\ dx = A dz \end{array} \right| = \int f(z) e^{-2\pi i (Az, y)}$$

tutéž fci vidím v jiných souř.

$$\overset{1}{|\det A|} dz = \int f(z) e^{-2\pi i (z, A^T y)} dz = (\mathcal{F}f)(A^T y) = (\mathcal{F}f)(A^{-1} y) = [R_A(\mathcal{F}f)](y)$$

$\mathcal{F}R_A = R_A \mathcal{F}$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$A \in O(n) = \{A \mid A^T A = \mathbb{1}\}$ spec. unitární $SO(n) = \{A \mid A^T A = \mathbb{1}$ a $\det A = 1\}$ $\quad A^T A = \mathbb{1} \,/\, A^{-1}$

orientaci zachovávají OG. grupu $\quad A^T = A^{-1}$

$A^T A = \mathbb{1} \,/\, \det$

3) dilatace: doma

výsledek: $\mathcal{F} dil_a = \frac{1}{a^n} dil_{\frac{1}{a}} \mathcal{F}$ $\quad a \in \mathbb{R}^+$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\quad (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$

Matematika pro fyziky III. 14. 10. 2014

- FT se dělá kvůli řešením PDR
- Fourier to ~~??~~ vymyslel pro rovnici vedení tepla

Tvrzení 1.3

Na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí následující identity:

1. $\mathcal{F}T_a = M_{e^{2\pi i x a}}\mathcal{F}$
2. $\mathcal{F}R_A = R_A\mathcal{F} \quad \forall A \in O(n)$
3. $\mathcal{F}\,dil_a = a^{-n}\, dil_{a^{-1}}\mathcal{F}$

snadné důsledky
$$\left\{\begin{array}{l} 4.\ T_a\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{e^{-2\pi i x a}} \\ 5.\ dil_a\mathcal{F} = \mathcal{F}(a^{n}\, dil_{a^{-1}}) \end{array}\right.$$

Dk.

1. $$(\mathcal{F}T_a f)(y) = \int (T_a f)(x)e^{-2\pi i (x,y)}dx = \int f(t_{-a}x)e^{-2\pi i (x,y)}dx = \int f(a+x)e^{-2\pi i (x,y)}dx =$$
$$= \left|\begin{array}{l} z = x-a \\ dz = dx \end{array}\right| = \int f(z)e^{-2\pi i (z,y) - 2\pi i (a,y)}dz = \left[\int f(z)e^{-2\pi i (z,y)}dz\right]e^{-2\pi i (a,y)} =$$
$$= (\mathcal{F}f)(y)M_{e^{-2\pi i (a,y)}} \quad \text{(bylo)}$$

2. viz výše (výpočty)
3. d.cv.
4. Víme $\mathcal{F}T_a = M_{e^{-2\pi i (x,a)}}\mathcal{F} \;/\cdot T_{a}$
$$\mathcal{F}T_aT_{-a} = M_{e^{-2\pi i (x,a)}}\mathcal{F}T_a$$
$$\mathcal{F}T_{a-a} = \mathcal{F}T_0 = \mathcal{F} = M_{e^{-2\pi i (x,a)}}\mathcal{F}T_a \quad / M_{e^{2\pi i (x,a)}}$$
$$\mathcal{F}M_{e^{2\pi i (x,a)}} = \mathcal{F}T_{-a} \implies \mathcal{F}M_{e^{-2\pi i (x,a)}} = \mathcal{F}T_a \quad / T_a$$
$$T_a\mathcal{F} = T_aM_{e^{-2\pi i (x,a)}}\mathcal{F}T_{-a} \underset{1)}{=} T_aM_{e^{-2\pi i (x,a)}}M_{e^{2\pi i (x,a)}}\mathcal{F} = T_a\mathcal{F}$$ to jsme si nepomohli

$$M_\varphi f = fM_\varphi \quad \left((M_\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x) = f(x)\varphi(x) = (fM_\varphi)(x)\right)$$
$$(T_a\mathcal{F})f(y) = T_a\left[\int f(x)e^{-2\pi i (x,y)}dx\right] = \int f(x)e^{-2\pi i (x,-a+y)}dx = \int f(x)e^{-2\pi i (x,y)}e^{2\pi i (a,x)}dx =$$
$$= \left[\mathcal{F}M_{e^{2\pi i (a,x)}}f(x)\right](y) = \left(\mathcal{F}M_{e^{2\pi i (a,x)}}\right)(y)$$

5. analogicky jako 3 $\blacksquare$

Ozn. $M_{e^{2\pi i (x,a)}} = M_{(e^{2\pi i (x,a)} \leftarrow x)}$
$$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{R}^n$$

Věta 1.4

$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ je lineární zobrazení, tj. $\bullet\ \mathcal{F}(cf) = c\mathcal{F}(f)$

$\bullet\ \mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$

Dk: $\bullet\ \mathcal{F}(f+g)(y) = \int (f+g)(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx = \int (f(x)+g(x)) e^{-2\pi i (x,y)} dx = \int f(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx +$

aditivita Leb. integrálu

$+ \int g(y) e^{-2\pi i (x,y)} dy = (\mathcal{F}f)(y) + (\mathcal{F}g)(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$

$\bullet\ \mathcal{F}(cf)$ stejně ▨

Pozn: Nyní analytické vlastnosti F. transformace, D^α, X^α

Věta 1.5

Pro $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ platí na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ identity:
1. $\mathcal{F}D_x^\alpha = (2\pi i)^\alpha y^\alpha \mathcal{F}$, kde $(2\pi i)^\alpha = (2\pi i)^{|\alpha|}$
2. $D_y^\alpha \mathcal{F} = (-2\pi i)^\alpha \mathcal{F} x^\alpha$
3. $y^\alpha \mathcal{F} = (+2\pi i)^{-\alpha} \mathcal{F} D^\alpha$
4. $\mathcal{F} x^\alpha = (-2\pi i)^{-\alpha} D^\alpha \mathcal{F}$

Dk: 2. $\Rightarrow$ 4.

3. $\Rightarrow$ 1. dělení členem $(\pm 2\pi i)^\alpha$

1. $(\mathcal{F}D^\alpha f)(y) = \int (D^\alpha f)(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx = \int (D_{x^i} D^{\hat{\alpha}_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_i - 1, \dots, \alpha_n)} f)(x) e^{-2\pi i (x,y)} =$

$= \int D_{x^i}((D^{\hat{\alpha}_i} f)(x) e^{-2\pi i (x,y)}) dx - \int (D^{\hat{\alpha}_i} f)(x) D_{x^i}(e^{-2\pi i (x,y)}) dx = \left[(D^{\hat{\alpha}_i} f)(x) e^{-2\pi i (x,y)} \right]_{-\infty}^{+\infty} -$

Newtonova formule $\int_a^b f(\xi) d\xi = F(b) - F(a)$

$- \int (D^{\hat{\alpha}_i} f)(x)(-2\pi i y^i) e^{-2\pi i (x,y)} dx = 0 - 0 -$

viz Dk. Tvrzení 1.2 $| \quad | \leq \frac{c}{p} \to +\infty$

$- (-2\pi i y^i) \int (D^{\hat{\alpha}_i} f)(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx = 2\pi i y^i (\mathcal{F}(D^{\hat{\alpha}_i} f))(y) \underset{\text{indukcí}}{=} (2\pi i y)^\alpha (\mathcal{F}f)(y)$

2. $((D^\alpha \mathcal{F}) f)(y) = D_y^\alpha [(\mathcal{F}f)(y)] = D_y^\alpha \int f(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx \underset{\text{Věta}}{=}$

$= \int D_y^\alpha (f(x) e^{-2\pi i (x,y)}) dx = \int f(x)(-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i (x,y)} dx = \mathcal{F}(f(-2\pi i x)^\alpha) = (-2\pi i)^\alpha \mathcal{F}(f x^\alpha)$ ▨

Pozn: $D_x^{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2} e^{-2\pi i (x,y)} = D_x^{(\alpha_1,\alpha_2)} e^{-2\pi i (x_1 y_1 + x_2 y_2)} = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2}} e^{-2\pi i x_1 y_1} \cdot e^{-2\pi i x_2 y_2} =$

$= (-2\pi i y_1) \frac{\partial^{|\alpha_1| - 1}}{(\partial x^1)^{\alpha_1 - 1}} (-2\pi i y_2) \frac{\partial^{|\alpha_2| - 1}}{(\partial x^2)^{\alpha_2 - 1}} = \dots \underset{\text{indukcí}}{=}$

Matematika pro fyziky III.

15.10.2014

Minule: vlastnosti F.t. vůči transformacím r_λ, dil_a, T_a, M_a a vůči D^α a M_{x^α}

Věta 1.6

Fourierovo zobrazení $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ je z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(hladké, rychle ubývající)

Dk: 1) $(\mathcal{F}f)(y) = \int e^{-2\pi i (x,y)} f(x)\,dx$

$$(D_y^\beta \mathcal{F}f)(y) \underset{VOZ}{=} \int [D_y^\beta e^{-2\pi i (x,y)}] f(x)\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)\, e^{-2\pi i \sum_i x^i y^i} f(x)\,dx \xleftarrow{?} (y_1, \dots, y_n)$$

Ano, to z přímo z věty o spojitosti vůči ~~[illegible]~~ parametru (Z. int. $\int f(x,\alpha)\,dx$ je sp. v α, pokud f je sp. v α s.v. x + $\forall\alpha$ $f(\alpha,-)$ měř. + $|f(x,\alpha)| \leq F(x)$ (majoranta)) $\forall\beta \Rightarrow \mathcal{E}^\infty$

2) $$y^\alpha D_y^\beta (\mathcal{F}f)(y) = y^\alpha \mathcal{F}((-2\pi i x)^\beta f)(y) = \mathcal{F}\left(D_x^\alpha \frac{(-2\pi i x)^\beta}{(2\pi i)^\alpha} f\right)(y) = \left(\int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x y} D_x^\alpha \frac{(-2\pi i x)^\beta}{(2\pi i)^\alpha} f\right)(y) =$$

$$= \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x y} D_x^\alpha \frac{(-2\pi i x)^\beta}{(2\pi i)^\alpha} f(x) \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^m}\,dx$$

$$\Rightarrow |y^\alpha D_y^\beta (\mathcal{F}f)(y)| = \left|\int \dots\right| \leq \int \left| e^{-2\pi i x y} D_x^\alpha \frac{(-2\pi i x)^\beta}{(2\pi i)^\alpha} f(x) \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^m}\right| dx \leq (*)$$

$\leq K$ $\quad \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\leftarrow$ $M_{x^\beta}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, $D\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$

$\Rightarrow$ to celé je $\leq K$

$$(*) \leq \int K \frac{1}{(1+|x|^2)^m}\,dx =$$

$$= K \int \frac{1}{(1+|x|^2)^m}\,dx \leq K \int_0^r \frac{r^{n-1}\,dr\,d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1}}{(1+|r|^2)^m} = \underbrace{K(\pi)\dots(2\pi)}_{\text{integrál přes úhly}} \leq (**)$$

$m = 0 \dots \int_D 1 \quad D = (0,L) \qquad < +\infty = L$

$$m = +\infty \quad \int_L^{+\infty} r^{-m-1}\,dr = \left[\frac{r^{-m}}{-m}\right]_L^{+\infty} = +\frac{L^{-m}}{m} < +\infty \ \checkmark$$

$$(**) \leq K\pi \dots 2\pi \left(L + \frac{L^{-m}}{m}\right) < +\infty$$ Schwarzův pr. zaručí konečnost všech norem

■

Pozn: $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} (\mathcal{F}f)(y) = 0$

1. hod byt ve Schwar. $\Rightarrow$ ubývat rychle $(x^2 f \leq K \Rightarrow |f| \leq \frac{K}{x^2} / \lim_{x\to+\infty}$ $\to 0$) stačí tak

Ambice pak řešit řeči PDR: $\mathcal{F}D \leadsto x\mathcal{F}$

$\to$ chceme aby $\mathcal{F}$ bylo injektivní a surjektivní, tedy bijekce

Z def. $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g \Rightarrow f = g \Leftrightarrow \mathcal{F}(f-g)=0 \Rightarrow f-g=0 \Leftrightarrow \mathcal{F}h = 0 \Rightarrow h=0$

$? \; 0 = \int f(x) e^{-2\pi i x y} dx \xrightarrow[?\,inj.]{} f(x) = 0$

$i\int f(x) \sin 2\pi x y + \int f(x) \cos(2\pi x y) = 0 \Rightarrow \int f(x) \sin(2\pi x y) dx = 0$ a $\int f(x) \cos(2\pi x y) = 0$

$\overset{??}{\Rightarrow} f(x) = 0$

Definice 1.4 Zpětná Fourierova transformace

$\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow F(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),\ \tilde{\mathcal{F}} : f \longmapsto (\tilde{\mathcal{F}}f : x \longmapsto (\tilde{\mathcal{F}}f)(x) = \int e^{+2\pi i x y} f(y) dy)$

Pozn: 1, Korektnost ($\exists \tilde{\mathcal{F}}f$) stejné jako u $\mathcal{F}f$. Jediné čím se liší:

$\mathcal{F}f : |f(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx| \quad \tilde{\mathcal{F}}f : |f(y) e^{2\pi i (x,y)} dy|$

$|e^{2\pi i x y}| = |e^{-2\pi i x y}| \Rightarrow$ stejný dk.

2, vlastnosti $\tilde{\mathcal{F}}$ vůči R_a, T_a, dila, D^α, $M_{2\pi i x^\alpha}$ nebo jen x^β jsou velmi podobné, až na znaménko v případě $D^\alpha, M_{2\pi i x^\alpha}$

MŮŽE BÝT U ZK: $D\tilde{\mathcal{F}} = \dots$

Definice 1.5 Konvergence v $\mathcal{S}$

Řekneme, že posloupnost $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ $\|\varphi_m - \varphi\|_{\alpha,\beta} \to 0,\ m \to +\infty$ ($\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m_0\ \forall m \geq m_0\ \|\varphi_m - \varphi\|_{\alpha,\beta} < \varepsilon$)

Pozn: 1, Je těžké konvergovat ve Schwartzovi

2, $\varphi_m \to \varphi$ bodově $(\varphi_m)_m \subseteq \mathcal{S}, \varphi \in \mathcal{S} \Leftarrow \varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$

konv. bodově $|\varphi_m(x) - \varphi(x)| \to 0$. Konvergovat v $\mathcal{S} \Rightarrow$ konv. vůči všem α, β, sp.

vůči $((0,\dots,0),(0,\dots,0))$ $\|\varphi_m - \varphi\|_{\vec{0},\vec{0}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_m(x) - \varphi(x)| \to 0,\ m \to +\infty$

triviální

konv. v $\mathcal{S} \Rightarrow$ konv. stejnoměrná

Definice 1.6

$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nazveme spojité v $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall (f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ jdoucí k f je $Af_m \to Af$.

Obecně ve smyslu konvergence v $\mathcal{S}$.

Pozn: • jdou-li $\equiv f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f, \; n \to +\infty$

$$Af_n \longrightarrow Af \equiv Af_n \xrightarrow{\mathcal{S}} Af$$

$$\bullet\; Af_n \xrightarrow{\mathcal{S}} Af \equiv \lim_{n\to+\infty} Af_n = Af$$

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \equiv \lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} Af_n = A \lim_{n\to+\infty} f_n$$ operátor komutuje s lim

problém funkcionální analýzy → existují lineární zobrazení jež nejsou spojitá

Věta 1.7

$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jsou navzájem inverzní, tj.:

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}} = \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \text{ a } \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \qquad (\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \text{ i } \mathcal{F} \text{ jsou bijektivní})$$

Dk:

$$n = 1, \; I_\varepsilon(x) := \tilde{\mathcal{F}}\Big(\underbrace{e^{-\varepsilon y^2}}_{\substack{\text{zhlazovací prvek (mollifier)} \\ \in \\ \mathcal{S} \text{ (dle V1.6)}}}(\mathcal{F}f)(y)\Big)(x) = \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\mathcal{S}$ je algebra

Fub.: $\int_y \int_z \ldots = \iint_{z,y} \ldots = ?$

$$= \int_y \Big(e^{2\pi i x y} e^{-\varepsilon y^2} \int_z e^{-2\pi i y z} f(z)\, dz\Big) dy = \int_y \Big(e^{2\pi i x y - \varepsilon y^2} \int_z e^{-2\pi i y z} f(z)\, dz\Big) dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_z \Big(f(z) \int_y e^{-\varepsilon y^2 + 2\pi i x y - 2\pi i y z}\, dy\Big) dz = \int_z \Big(f(z) \int_y e^{-\varepsilon y^2 + 2\pi i y (x - z)}\, dy\Big) dz =$$

nepatrná korekce tohoto mollifieru, $|\cdot| = 1$

$$= \int_z f(z)\, \tilde{\mathcal{F}}(e^{-\varepsilon y^2})(x - z)\, dz = \int_z f(z) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon}(x-z)^2}$$

něbo $\mathcal{F}$ a záměnu ze $(z - x)$

Dále
$$I_\varepsilon(x) - f(x) = \int_z f(z) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{(x-z)^2\pi^2}{\varepsilon}} dz - f(x) = \Big| z - x = y \Big| = \int_y f(x+y) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy - f(x) \cdot 1 =$$

$$= \int_y f(x+y) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy - f(x) \underbrace{\int \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy}_{1} = \int \big[f(x+y) - f(x)\big] \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy \overset{f \in C^\infty}{=} \to \text{Lagr. VOS}$$

$$\Rightarrow \int f'(\xi_{xy})(\overset{b}{\widehat{x+y}} - \overset{a}{x}) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy$$

$$\exists \xi_{xy} \in (x, x+y) \quad (x+y, x)$$

Nakonec
$$|I_\varepsilon(x) - f(x)| \le \int |f'(\xi_{xy})\, y| \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy \le \sup_y |f'(\xi_{xy})\, y| \int \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy =$$

$$= |\sup(f'(\xi_{xy}))| \int \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, y\, e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}} dy = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f'(\xi_{xy})| \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int \Big(e^{-\frac{y^2\pi^2}{\varepsilon}}\Big)' \Big(-\frac{1}{2}\Big) \frac{\varepsilon}{\pi^2}\, dy = \|f\|_{0,1} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, \frac{-\varepsilon}{2\pi^2} \Big[\bar{c}\Big]\Big(-\frac{1}{2}\Big)$$

$= \|f\|_{0,1} \sqrt{\varepsilon}\, \tilde{c}$ $\quad$ / $\varepsilon \to 0$

$\searrow 0$

$\nearrow (\tilde{\mathcal{F}} \mathcal{F} f(x)) = f(x)$

VCS: $|I_\varepsilon(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ $\qquad$ $I_\varepsilon(x) = (\tilde{\mathcal{F}}^{*} e^{-\varepsilon \eta^2} \mathcal{F} f)(x) \longrightarrow f(x)$

$\boxtimes$

Matematika pro fyziky III.

21. 10. 2014

• Odhad ... $\to 0$ (pokračujeme z minula)

Připomenutí: $I_\varepsilon(x) - f(x) = \int\limits_{y\in\mathbb{R}^n} f'(\xi_{xy})\, y\, e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, dy$

$\xi_{xy} \in \langle x, x+y\rangle$

$$|I_\varepsilon(x) - f(x)| \le \int |f'(\xi_{xy})||y| e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, dy \le \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |f'(\xi_{xy})| \int |y| e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, dy$$

$|\int| \le \int |\;|$

$$= \|f\|_{a,\underbrace{(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)}_{\beta}} 2\int_0^{+\infty} y e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, dy = 2\|f\|_{a,(0,\dots,1,\dots,0)} \int \left(e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\varepsilon}}\right)' \frac{1}{(-2)} \frac{1}{\pi^2} \varepsilon\, dy =$$

$$= -\|f\|_{(0,\hat{1})} \frac{\pi^{1/2}}{\pi^2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \underbrace{\left[e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\varepsilon}}\right]_0^{+\infty}}_{0-1} = \|f\|_{a,\hat{1}}\, \pi^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0 \quad / \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+}$$

$\int fg \le \sup f \int g$

$f, g \ge 0$

$\int_a^b f(-10) \le \sup f \int_a^b (-10) =$

$= \sup f\,(-10b + 10a)$

• $|I_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0,\ \varepsilon \to 0^+$ obšírně: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} |I_\varepsilon(x) - f(x)| \le \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \|f\|_{a,\hat{1}}\, \pi^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} = 0$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} |I_\varepsilon(x) - f(x)| = 0 \implies \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} [I_\varepsilon(x) - f(x)] = 0$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} |f_\varepsilon(x)| = 0 \to \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x) = 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (I_\varepsilon(x) - f(x) + f(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (I_\varepsilon(x) - f(x)) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

Co jsme zjistili?

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left[\tilde{F}\left(e^{-\varepsilon y^2} (Ff)(y)\right)\right](x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

|| ?? $\tilde{F}$ je sp.

$\tilde{F}\left[\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left(e^{-\varepsilon y^2} (Ff)(y)\right)\right](x) = f(x) \qquad (\tilde{F} F f)(x) = f(x)$ ze pp. sp. $\tilde{F}$

• Analogicky $F\tilde{F}f = f \quad I_\varepsilon(x) = F e^{-\varepsilon y^2} F^{-1} f$ a provedu totéž ■

Pozn.: • $\tilde{F}Ff = f$ a $F\tilde{F}f = f \implies$ z def. inverzního zobrazení je $F^{-1} = \tilde{F}$

• $AB = id$ a $BA = id \implies A, B$ jsou bijektivní

injektivita A: $Ax_1 = Ax_2$ + $BA = id$ / (x_1)

$BAx_1 = x_1 \implies BAx_1 = BAx_2$

$BAx_2 = x_1 \qquad id\, x_1 = id\, x_2 \implies x_1 = x_2$

injektivita B: $Bx_1 = Bx_2$ a $AB = id$ stejně

surjektivita B: y nabývá jej B?, y nabývá y. $BA = id$

$B(Ay) = y$

B nabyde y v $x = Ay$ sur. A st.

• V dk. věty o inverzi $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$ jsou pp. $\tilde{\mathcal{F}}$ (a $\mathcal{F}$... $\mathcal{J}_2$) jsou spojité!

Věta 1.8

$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jsou spojité!

Dk:

1) zobr. $\left(\varphi_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{S}} \varphi_0 \overset{\text{def sp.}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}\varphi_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{S}} \mathcal{F}\varphi_0\right) \Longleftarrow \left(\varphi_m \to 0 \Rightarrow \mathcal{F}\varphi_m \to 0\right) \quad \forall \varphi_m \in \mathcal{S}$

$\varphi_m \to \varphi_0 \Longrightarrow \varphi_m - \varphi_0 \to 0,\ m \to +\infty$ (aritmetiko limit)

$0 \overset{(*)}{\Longleftarrow} \mathcal{F}(\varphi_m - \varphi_0) = \underbrace{\mathcal{F}\varphi_m - \mathcal{F}\varphi_0} \overset{\text{ar. lim}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}\varphi_m \to \mathcal{F}\varphi_0$

(obsírní: $\mathcal{F}\varphi_m = (\mathcal{F}\varphi_m - \mathcal{F}\varphi_0) \overset{(**)}{+} \mathcal{F}\varphi_0 \to 0 + \mathcal{F}\varphi_0 = \mathcal{F}\varphi_0$

2) $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathcal{F}\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ $(**)$

Def($\xrightarrow{\mathcal{S}}$): $\|\mathcal{F}\varphi_m\|_{\alpha,\beta} \to 0,\ m\to+\infty \quad \forall \alpha,\beta$

$\|\mathcal{F}\varphi_m\|_{\alpha\beta} = \sup_y |y^\alpha D_y^\beta (\mathcal{F}[\varphi_m])(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |y^\alpha (-2\pi i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta \varphi_m)| = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left[(2\pi)^{|\beta|} \left|\mathcal{F}\left(x^\beta \frac{D_x^\alpha \varphi_m}{(-2\pi i)^{|\alpha|}}\right)\right|\right]$

věta o zelmnání $\mathcal{F}$ a D

$= \frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(x^\beta D_x^\alpha \varphi_m)| = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\int x^\beta D_x^\alpha \varphi_m(x) e^{-2\pi i x y}\, dx\right| \leq$

starý trik

$\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D_x^\alpha \varphi_m(x) e^{-2\pi i x y}|\, dx \leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_y \int_x |x^\beta D_x^\alpha \varphi_m(x)|\, dx =$

$\sum \binom{m}{k} (|x|^2)^{m-k}$

$= (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \underbrace{|x^\beta D_x^\alpha \varphi_m(x)| (1+|x|^2)^m}_{\leq K} \frac{1}{(1+|x|^2)^m}\, dx = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int \sum_{k=0}^m x^\beta (|x|^2)^{m-k} \binom{m}{k} \cdot$

$\cdot (D_x^\alpha \varphi_m)(x) \frac{dx}{(1+|x|^2)^m} = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \int \sum_{k=0}^m \|\varphi_m\|_{\beta+(2(m-k),\dots,2(m-k)),\alpha} \binom{m}{k} \frac{1}{(1+|x|^2)^m} \leq$

$\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup \sum_k \|\varphi_m\|_{\beta+\widehat{2(m-k)},\alpha} \binom{m}{k} \cdot \underbrace{\int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^m}\, dx}_{\tilde{C}<+\infty} \leq$

provizorní

$+\infty: \frac{r^{m-1}}{(1+r^2)^m} \to \frac{r^{m-1}}{r^{2m}} = r^{-m-1}$

$\int_{\tilde{k}}^{+\infty} r^{-m-1}\, dr = \left[\frac{r^{-m}}{-m}\right]_{\tilde{k}}^{+\infty}$

konečnost $\tilde{C}$

$\leq \underbrace{(2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \tilde{C} \sum_{k=0}^m \|\varphi_m\|_{\beta+\widehat{2(m-k)},\alpha} \binom{m}{k}}$

Ale pp. $\varphi_m \to 0$ v $\mathcal{S} \Rightarrow$ jde do 0. ∎

Pozn:

Větou 8 je dk. věta 7 (o inverzi). Je to dk. takto složité protože Fubini zde nedovoluje prohazovat D a $\int$ bez zdlouhavého faktoru

Věta 1.9

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. $[\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)]$

nepřesné

Dk: $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \int f$? už de facto bylo v jednom z předchozích dk

$$\int |f|\,dx = \int |f(x)|(1+|x|^2)^n \frac{1}{(1+|x|^2)^n}\,dx \le \sup_x |f(x)(1+|x|^2)^n| \int \frac{1}{(1+|x|^2)^n}\,dx =$$

$$(1+|x|^2)^n = \sum_k \binom{n}{k} |x|^{2(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \|f\|_{(2(n-k)),0} \binom{n}{k} \underbrace{\int \frac{1}{(1+|x|^2)^n}\,dx}_{Č} < +\infty$$

Lebesgueův integrál je abs. konvergentní $|f| \in \mathcal{L} \Rightarrow f \in \mathcal{L}$ $\quad f \in \mathcal{M}$ a $\mathcal{L} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \int f < +\infty\}$

$f \in \mathcal{L}$. ∎

Pozn:

1) Schwartz. fce jsou integrovatelné
2) $\int f \; \exists \iff \exists \int f_+$ a $\exists \int f_-$

$$f_+ = \max\{f, 0\} \ge 0$$
$$f_- = \max\{-f, 0\} \ge 0$$
$$f = f_+ - f_-$$

Další charakteristiky $\mathcal{S}$:

1) $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})$ je metrizovatelný $\stackrel{tj.}{\iff} \exists\, d(f,g)$ $[d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}]$, že konv. v d se kryje s konv. $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$

Tj. $f_n \xrightarrow{d} f \iff f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ $\quad (f_n \xrightarrow{d} f \quad \forall g \quad \underbrace{d(f_n - f, g)}_{\in \mathbb{R}} \to 0)$

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f-g|_k}{1+|f-g|_k}, \text{ kde}$$

$$|h|_k = \sum_{|\alpha|+|\beta| \le k} \|h\|_{\alpha,\beta}$$

2) $(\mathcal{S}, d)$ je úplný, tj. cauchyovské p. jsou konvergentní, tj. $\exists n_0, \forall \varepsilon > 0, \forall m, n \ge n_0$
$d(f_n, f_m) < \varepsilon \Rightarrow \exists f_0$, že $f_n \xrightarrow{d} f_0$ $\quad |h_1| \le |h_2| \le \dots \quad 1+2 \iff$ Fréchetův

Matematika pro fyziky III. 22.10.2014

- Bylo $\mathcal{S} \subset L^1$

Pozn: 1, metrizovatelnost

2, úplnost

3, $\frac{1}{|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ není def.

$$\left(\frac{1}{|x|}\right)^{new} = \begin{cases} p, & x = 0 \\ \frac{1}{|x|}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases}$$ není hladká v nule

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \|x^\alpha\|_{(0,0)} = +\infty \qquad a \neq 0$

$1 \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

- **Věta 1.10 Plancherelova formule**

$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\, g \, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \mathcal{F}g \, dt.$

Dk: $$\iint\limits_{y,x\in\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx\, g(y)\, dy \underset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_x \int\limits_y f(x) \underbrace{e^{-2\pi i (x,y)} g(y)}_{\in \mathcal{S}}\, dy\, dx = \int\limits_x f(x) dx \int\limits_y e^{-2\pi i (x,y)} g(y)\, dy =$$

$e^{-2\pi i (x,y)} g(y)$ musí být z L^1 ale to víme protože $\mathcal{S} \in L^1$

$$= \int f(x) (\mathcal{F}g)(x)\, dx = \int f \mathcal{F}g$$ ∎

Důsledky Plancherelovy formule a věty o inverzi:

- 1, $\int \mathcal{F}f \mathcal{F}g = \int f \mathcal{F}^2 g = \int \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f \mathcal{F}^2 g = \int \mathcal{F} f \mathcal{F} g$ jo, to nikam nevede

$\int (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}g) \underline{\underline{\text{chceme}}} \int (\overline{\mathcal{F}f})(\mathcal{F}g) = \int \overline{f} g$

výpočty: $f \in \mathcal{S} \quad \tilde{f}(x) := f(-x)$

1, $$(\mathcal{F}\tilde{f})(y) = \int e^{-2\pi i x y} \tilde{f}(x)\, dx = \int e^{-2\pi i x y} f(-x)\, dx = \left| \begin{matrix} x' = -x \\ J = -\mathbb{1} \\ |\det J| = (-1)^n \end{matrix} \right| = \int e^{+2\pi i x' y} f(x')\, dx' =$$
$$= (\mathcal{F}^{-1} f)(y)$$

2, $$(\mathcal{F}f)(y) = \int e^{-2\pi i (x,y)} f(x)\, dx = \int e^{2\pi i (x,y)} \underbrace{f(-x)}_{\tilde{f}(x)}\, dx = (\mathcal{F}^{-1}\tilde{f})(y)$$

3, z 1, a 2, $\mathcal{F}^2 f = \tilde{f} \quad \mathcal{F}^2 \tilde{f} = f$

- 4, $\mathcal{F}^4 f = \mathcal{F}^2(\mathcal{F}^2 f) = \mathcal{F}^2 \tilde{f} = f$ tedy Id.

Věta 1.11 vlastní čísla F.t.

$\forall$ vlastní číslo Fourierovy transformace $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je nutně z množiny $\{1, i, -1, -i\}$.

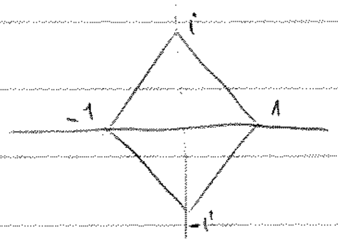
Dk: λ je vlastní číslo $\Rightarrow \exists f_0 \neq 0 \quad \mathcal{F} f_0 = \lambda f_0$ (f_0 je vektor) $/ \mathcal{F}^3$

$$\mathbb{1} f_0 = \mathcal{F}^3 \mathcal{F} f_0 = \mathcal{F}^3(\lambda f_0) = \lambda \mathcal{F}^3 f_0 = \lambda \mathcal{F}^2(\mathcal{F} f_0) = \lambda \mathcal{F}^2(\lambda f_0) = \lambda^2 \mathcal{F}^2 f_0 = \lambda^2 \mathcal{F}\mathcal{F} f_0 =$$

Pozn. bod 4, $\quad \mathcal{F}$ je lin. zob.

$$= \lambda^2 \mathcal{F}(\lambda f_0) = \lambda^3 \mathcal{F} f_0 = \lambda^4 f_0 \Rightarrow f_0 = \lambda^4 f_0 \quad // \, f_0(x_0) \neq 0$$

$$1 = \lambda^4$$



$\Rightarrow \lambda \in \{\pm 1, \pm i\}$ (pp. že λ existuje) ■

Pozn: vlastní číslo $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($/\mathbb{C}^n \to /\mathbb{C}^n$) $\Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$$(-1)^n \lambda^n \pm \operatorname{tr} A \, \lambda^{n-1} \pm \dots \pm \det A = 0$$

má řešení pro $\lambda \in \mathbb{C}$ (základní věta algebry)

v $\mathbb{R}^2$: $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{r_\varphi} v = \lambda v$

$(v, v) = (r_\varphi v, r_\varphi v) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 (v, v) \quad /:(v, v) \neq 0$

$\lambda = \pm 1$

a) $\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = 0, 2\pi$ b) $\varphi = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall r_\varphi$ pro $\varphi \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nemají vlastní čísla!

v $\mathbb{R}^n$ $\quad \underset{\mathbb{R}^n}{A} \underset{\mathbb{R}^n}{v} = \lambda \underset{\mathbb{R}^n}{v} \to \in \mathbb{C}$! nemůže nastat, musí být $v \in \mathbb{C}^n$

Pozn: • H je nekonečně rozměrný komplexní vektorový prostor

$A: H \to H$ lineární operátor

A nemusí mít vlastní čísla. Uvedeme později.

• platí $\mathcal{F} h_n = (-1)^n h_n$, kde h_n jsou Hermitovy fce

$h_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$; $n \in \mathbb{N}$

• $\mathcal{F} h_\alpha = (-1)^{|\alpha|} h_\alpha \qquad h_\alpha(x_1, \dots, x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \dots h_{\alpha_n}(x_n)$

Navíc: zúplnění $\sum_{|\alpha|=i} c_\alpha h_\alpha$

$$L^2(\mathbb{R}^n,\lambda_{Leb}) = \widehat{\bigoplus_{i=0}^{+\infty}} \left[\bigoplus_{|\alpha|\le i} \mathcal{L}(\{h_\alpha \mid \alpha\in\mathbb{N}_0^n, |\alpha|=i\})\right]$$

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{C}h_{(0,0,0)} \oplus (\mathbb{C}h_{(1,0,0)} \oplus \mathbb{C}h_{(0,1,0)} \oplus \mathbb{C}h_{(0,0,1)}) \oplus \dots$$

$n=1$:
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & i & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -i & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & i & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} = [\mathcal{F}]^{h_n}_{h_n} \Rightarrow \text{izometrické} \quad [\mathcal{F}]^{h_n\,+}_{h_n}[\mathcal{F}]^{h_n}_{h_n} = \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

Plancherel zapsaný v matici

Definice 1.7 Konvoluce

Nechť $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(f*g)(y)=\int f(y-x)g(x)\,dx$ označím jako konvoluci, $\forall y\in\mathbb{R}^n$.

„Je nějaká zdzvorka, která definuje tu fci." ☺

Věta 1.12 korektnost konvoluce

$f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f*g$ je definována korektně

Dk:

$f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall y\in\mathbb{R}^n \quad T_{-y}\tilde{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{S}$ je algebra (bylo) $\qquad \llcorner T_{-y}f(-x) = f(t_y(-x)) = f(y-x)$

$\hookrightarrow f(y-x)g(x) \qquad$ translace vektoru o jiný vektor

$\quad \overset{\shortparallel}{(T_{-y}\tilde{f})}(x)$

$\mathcal{S}\subseteq L^1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)\,dx \quad \exists$ $\blacksquare$

Věta 1.13

$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),*)$ je komutativní algebra.

Dk:

Definice: algebra = vektorový prostor nad tělesem K $(V,+,\cdot)$ (grupa) a operace

$\cdot : V\times V \longrightarrow V$
násobení

$\cdot\,(v_1,v_2) =: v_1\cdot v_2$ že platí
1. $v_1\cdot(v_2\cdot v_3)=(v_1\cdot v_2)\cdot v_3 \quad \forall v_1,v_2,v_3\in V$
2. $(cv_1)\cdot v_2 = v_1\cdot(cv_2) \quad \forall c\in K, \forall v_1,v_2\in V$
3. $(v_1+v_2)\cdot v_3 = v_1 v_3 + v_2\cdot v_3$ distr. $\forall v_1,v_2,v_3\in V$
4. $v_1\cdot(v_2+v_3) = v_1\cdot v_2 + v_1\cdot v_3$

5) $(ab)\cdot v_1 = a\cdot(b\cdot v_1) \quad \forall a,b\in K$

6) $(a+b)\cdot v_1 = a\cdot v_1 + b\cdot v_1 \quad \forall v_1\in V$

I) komutativita (komutativní alg. := navíc $v\cdot w = w\cdot v \quad \forall v,w\in V$)

$$(f*g)(y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x' = y-x \\ dx' = -\mathbb{1}dx \\ \det(-\mathbb{1}) = (-1)^n \end{array} \right| = \int f(x')\,g(y-x')\,dx' = \int g(y-x')\,f(x')\,dx' =$$

$\mathbb{C}$ je komutativní

$$= (g*f)(y) \quad \forall y\in\mathbb{R}^n$$

2) $$(cf*g)(y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} (cf)(y-x)\,g(x)\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n} cf(y-x)\,g(x)\,dx = c\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\,dx = c(f*g)(y)$$

3) + 4) Z komutativity stačí 3)

$$[(f+g)*h](y) = \int (f+g)(y-x)\,h(x)\,dx = \int [f(y-x)+g(y-x)]\,h(x)\,dx =$$

$$= \int [f(y-x)h(x) + g(y-x)h(x)]\,dx = \int\ldots + \int\ldots = (f*h)(y) + (g*h)(y)$$

6) z 2) a 3)

5) taky

1) $$((f*g)*h)(a) = \int_{b\in\mathbb{R}^n} [(f*g)(-b+a)]\,h(b)\,db = \left| \begin{array}{l} f(y-x) = \\ = f(-x+y) \end{array} \right| = \iint_{\substack{b\in\mathbb{R}^n \\ c\in\mathbb{R}^n}} f(\underbrace{-c-b+a}_{\text{subs.}})\,g(c)\,h(b)\,dc\,db =$$

$$= \left| \begin{array}{l} -c-b = -t \\ -dc = -dt \end{array} \right| = \iint_{b\,c} f(-t+a)\,g(-b+t)\,h(b)\,dc\,db = \left| c = t \right| =$$

$$= \iint f(-c+a)\,g(-b+c)\,h(b)\,dc\,db$$

$$(f*(g*h))(a) = \int_c f(-c+a)\,(g*h)(c)\,dc = \iint_{c\,b} f(-c+a)\,g(-b+c)\,h(b)\,db\,dc \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \iint_{b\,c} f(-c+a)\,g(-b+c)\,h(b)\,dc\,db$$

$\blacksquare$

Matematika pro fyziky III. 29. 10. 2014

$\mathcal{S}$ — vlastnosti ($\|\cdot\|_{\alpha\beta}$, $\rightsquigarrow d(f,g)$), $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ je v.p. $\mathcal{S}$ je algebra vůči $(fg)(x) = f(x)g(x)$

$\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ $\quad \mathcal{F}' = \tilde{\mathcal{F}}$

$\mathcal{F}$ vl.: k R_A, dil$_a$, T_a, D^α, $M_{x^\alpha} (=x^\alpha)$ $\quad [R_A, \mathcal{F}] = 0$ $\quad$ „$\mathcal{F}D = \pm X\mathcal{F}$"

$[A,B] := A\circ B - B\circ A$, $A: U \to U$, $B: U \to U$

$\{A,B\} := A\circ B + B\circ A$

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$ Poissonovy závorky $\quad f,g: \mathbb{R}^{2m}[q^1,\dots,q^m,p_1,\dots,p_m] \to \mathbb{R}$

(dif. formy)

Komutátor souvisí n'ca s $\{\,,\,\}^{Poiss}$

1) $\{f,g\}^{Poiss} = -\{g,f\}^{Poiss}$

$[A,B] = -[B,A] = -(B\circ A - A\circ B) = A\circ B - B\circ A$

$\overset{\parallel}{A\circ B - B\circ A}$

2) $\{f,\{g,h\}\}^{Poiss} + \{h,\{f,g\}\}^{Poiss} + \{g,\{h,f\}\}^{Poiss} = 0$ $\quad$ Jacobiho identita

$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$, neboť $[A,(BC-CB)] + [C,(AB-BA)] + [B,(CA-AC)] =$

$= ABC - ACB - BCA + CBA + CAB - CBA - ABC + BAC + BCA - BAC - CAB + ACB = 0$

Byla konvoluce: $\quad * : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$*(f,g) =: f*g \qquad (+(f,g) =: f+g)$

$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), *)$ je (asociativní) algebra

Věta 1.14

$\mathcal{F}: (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), *) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \cdot)$ je homomorfismus algeber. $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$ $\quad \forall f,g \in \mathcal{S}$.

Pozn:

homomorfismus v U: $L(u+v) = L(u) + L(v)$

$L(cv) = cL(v)$

algebra je vektorový prostor $\quad L: V \to V$

Dk: $[\mathcal{F}(f*g)](y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-2\pi i (x,y)} dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{z\in\mathbb{R}^n} f(-z+x) g(z) e^{-2\pi i (x,y)} dz\, dx =$

Fubini → možno, $\mathcal{S} \subseteq L^1$ bylo

$$= \int g(z) \left[\int f(-z+x) e^{-2\pi i (x,y)} dx \right] dz = \left| \begin{matrix} u = -z+x \\ du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{z\in\mathbb{R}^n} g(z) \int_{u\in\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i (u+z,y)} du\, dz = \int_z g(z) e^{-2\pi i (z,y)} \underbrace{\left[\int_u f(u) e^{-2\pi i (u,y)} du\right]}_{} dz =$$

$$= \int_u f(u) e^{-2\pi i (u,y)} du \int_z g(z) e^{-2\pi i (z,y)} dz = (\mathcal{F}f)(y)(\mathcal{F}g)(y) = (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)(y) \quad \blacksquare$$

$\int dz \to$ číslo, vytknu

Pozn: • $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

násobení fcí ; násobení v $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

$\cdot : \mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^0$

bodové násobení

$\cdot : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$

• $\mathcal{F}$ je dokonce izomorfismus algeber, tj. je to homomorfismus (V 1.14) + izomorfismus v.p. (věta o inverzi)

Tvrzení 1.15

$\tilde{\mathcal{F}} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), *) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \cdot)$ je homomorfismus algeber.

Dk: Stejné $[\tilde{\mathcal{F}}(f*g)](y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{+2\pi i (x,y)} dx = \iint_{x\, z} f(-z+x) g(z)\, dz\, e^{2\pi i (x,y)} dx \overset{\text{Fubini}}{=}$

$$= \int_{z\in\mathbb{R}^n} g(z) \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(-z+x) e^{2\pi i (x,y)} dx\, dz = \left| \begin{matrix} u = -z+x \\ du = dx \end{matrix} \right| = \int_u f(u) e^{2\pi i (u,y)} du \int_z g(z) e^{2\pi i (z,y)} dz =$$

$$= (\tilde{\mathcal{F}}f)(y)(\tilde{\mathcal{F}}g)(y) \quad \blacksquare$$

Pozn:

$\mathcal{F}(f\cdot g) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$? $/\tilde{\mathcal{F}}$

$f \cdot g = \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f * \mathcal{F}g) = f \cdot g$ nic ...

1, G je konečná grupa; $G = \{g_1, \dots, g_k\}$, $\mathbb{C}[G] = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\{\delta g_1, \dots, \delta g_k\})$, kde

$\delta_h : G \to \mathbb{C}$ $\quad \delta_h(g) = \begin{cases} 1 & g = h \\ 0 & g \neq h \end{cases}$ $\qquad i \neq j \Rightarrow g_i \neq g_j$

Tedy $\mathbb{C}[G] = \{\sum_{g\in G} c_g \delta_g, c_g \in \mathbb{C}\}$ $\qquad f \in \mathbb{C}[G]$ např. $f = \delta_e$ $\quad e$ je neutrální prvek

formálně $(\delta g_1 + \delta g_2)(h) = \delta g_1(h) + \delta g_2(h)$

$\mathbb{C}[G]$ je grupová algebra grupy G, je to v. p. nad $\mathbb{C}$ (+ posl. níž nějak)

$(c \cdot f)(g) = \underset{\underset{\mathbb{C}}{\wedge}}{c} f(g) \quad (f+g)(h) = f(h) + g(h) \quad (g : G \to \mathbb{C}) \in \mathbb{C}[G]$

→ $\dim \mathbb{C}[G] = k = \# G$ neboť $\{\delta_{g_1}, \dots, \delta_{g_k}\}$ je báze, neboť g generuje

$b \sum_{i=1}^{k} c_{g_i} \delta_{g_i} = 0 \; / g_j$

$\forall j = 1, \dots, k$

$$\sum_i c_{g_i} \delta_{g_i}(g_j) = 0$$

$$\sum_i c_{g_i} \underbrace{\delta_{g_i g_j}}_{\text{Kroneker}} = 0$$

$c_{g_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \Rightarrow c_{g_1} = \dots = c_{g_k} = 0$

Jediná triviální lineární kombinace je nulová

→ násobení na $\mathbb{C}[G]$:

a, $\delta_g * \delta_h := \delta_{gh}$

b, další násobení, tzv. bodové $\quad \sum_g c_g \delta_g \sum_h d_h \delta_h = \sum_{\tilde{g}} c_{\tilde{g}} d_{\tilde{g}} \delta_{\tilde{g}}$

$$\underline{f * g} = \sum_{\tilde{g} \in G} c_{\tilde{g}} \delta_{\tilde{g}} * \sum_{h \in G} d_h \delta_h = \sum_{\tilde{g}, h \in G} c_{\tilde{g}} d_h \delta_{\tilde{g}} * \delta_h = \sum c_{\tilde{g}} d_h \delta_{\tilde{g}h}, \quad c_{\tilde{g}}, d_h \in \mathbb{C}$$

$$(f * g)(\underset{\underset{G}{\wedge}}{k}) = \sum_{\tilde{g}, h \in G} c_{\tilde{g}} d_h \delta_{\tilde{g}h}(k) = \sum_h c_{kh^{-1}} d_h$$

1, $\tilde{g} h \neq k \dots 0$

2, $\tilde{g} h = k \dots 1 \to \tilde{g} = kh^{-1}$

$\int c(k-h) \tilde{d}(h) \, dh$ konvoluce

→ Fourier na $\mathbb{C}[G]$ (nebude pro konečnou grupu)

a, $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ nazveme reprezentací grupy G, pokud V je v.p. a ρ je homomorfismus grup, tj. $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$

skládání matic $A : V \to V$, $B : V \to V$ násobením

b, ρ je ireducibilní, pokud $\forall W \subseteq V$, $\rho(g) W \subseteq W \Rightarrow W = 0 \vee W = V$, $\forall g \in G$

př. $\rho : SO(3) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$

$$\rho(g) v := gv, \quad g = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in SO(3) \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

je ireducibilní z názoru

(pokud je něco invariantní vůči působení grupy, tak je to triviální, nebo celý ten prostor)

př. $\rho : SO(2) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3) = \{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ bijekce}\}$

$$\rho(g)(v) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ v_3 \end{pmatrix}$$

rotace kolem osy z

invariantní podprostor je osa z $\Longrightarrow$ není ireducibilní, neb $W = \hat{z} = \mathcal{L}(\{(0,0,1)^t\})$

$$\rho\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \in \hat{z} = \mathcal{L}(\{(0,0,1)^t\})$$

další invariantní podprostor je rovina $\widehat{xy} = \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$, neboť $\rho(g)\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\cdot} & \nabla & 0 \\ \cdot & \overset{g}{\odot} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\cdot}\, c + \nabla d \\ \cdot\, c + \odot d \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$$

Definice (nezkoušena)

Nechť G je konečná grupa a ρ je její reprezentace, $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ a nechť $f \in \mathbb{C}[G]$. Pak $(\mathcal{F}f)(\rho) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$, $\mathcal{F}f : R^G \to R^G$, $(\mathcal{F}f)(\rho) = \sum_g f(g)\rho(g)$, kde R^G je prostor všech reprezentací grupy G.