

Minule: identity stromech

Pozn: diskrétní Fourierova transformace

rychlost: pár vidět alg. vlastnosti

směrné integrace ($\int \leftrightarrow \sum$)

$$\text{pocitní } \sum = \int_M \quad \left. \begin{array}{l} \mu(M) = \# M \\ \mu(\{x\}) = 1 \\ \mu(\{x, y\}) = 2, x \neq y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{L. int. } \int d\mu = \sum_{j=1}^m$$

$$\mu(\{x, y\}) = 2, x \neq y$$

m je počet prvků množiny

me m i m' u zavedeme

pi) diskrétní Fourierova transformace $N > 1 (\in \mathbb{N}_0)$

$C_N = \{e^{\frac{2\pi i k}{N}}, k=0, \dots, N-1\}$ s operací násobení $\in C$ ($\neq C \setminus \{0\}$)

$$p_i) C_1 = \{1\}, C_2 = \{1, -1\}, C_3 = \left\{ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\}, C_4 = \left\{ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\} = \{1, i, -1, -i\}$$

Věta: Všechny ireducibilní reprezentace C_N jsou jednozměrné a jsou dány

$$\bigwedge_{N \in C_N} \rho = C^l \rho, \rho \in C (= \text{jedn. prostor}), l=0, \dots, N-1$$

Matice C_N

(mo jedn. prostor)

Pozn: $\hat{C}_N = [\text{všech rep.}] = \{\rho_0, \dots, \rho_{N-1}\}$

$$p_i) (Ff)(\rho) = \sum_{d \in C_N} f(d) \rho(d) = \sum_{k=0}^{N-1} f(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) \rho(e^{\frac{2\pi i k}{N}})$$

$$\text{Kombinace pro } \rho = \rho_l \\ (Ff)(\rho_l) = \sum_{k=0}^{N-1} f(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) \rho_l(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) (e^{\frac{2\pi i k}{N}})^l = \sum_{k=0}^{N-1} f(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) e^{\frac{2\pi i k l}{N}}$$

$$\text{interpretace: } (Ff)(\rho_l) = \sum_x f(e^x) (e^{xl}) \quad \left| \begin{array}{l} \hat{R}^n = \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}^n\} \\ (Ff)(\gamma) = \int f(x) e^{2\pi i x \gamma} dx \end{array} \right.$$

$$(Ff)(\gamma) = \int f(x) e^{2\pi i x \gamma} dx$$

$\rho \in \hat{R}^n$

charakt. irred. reprezentace R^n

lineární grupy ($SO(3) \rightsquigarrow$ charakterizace reprezentace, irred. množina byt 1 m charakterizace, rep.)

$$\rho: SO(3) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^3)$$

$$\rho(g) \rho = g \cdot \rho$$



Věta 1.16 (Plancherel 2)

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ j} \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} (\overline{Ff})(\eta) (Fg)(\eta) d\eta = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

$$\underline{\text{Dk:}} (Ff, Fg) = \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x, \eta)} dx \int_{z \in \mathbb{R}^n} g(z) e^{-2\pi i(z, \eta)} dz \right] d\eta = \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{x \in \mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{2\pi i(x, \eta)} dx \int_{z \in \mathbb{R}^n} g(z) e^{-2\pi i(z, \eta)} dz \right] d\eta$$

$$d\eta = \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} [(\overline{Ff})(\eta)] (Fg)(\eta) d\eta = \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} \overline{F(F^{-1}f)} g d\eta = \int_{\eta \in \mathbb{R}^n} \overline{f} g (= (f, g))$$

$$\text{Plancherel} \quad \int f(Fg) = \int (Ff)g$$

Pozn: Korektnost ($\exists$ integrální)

viz věta o korektnosti def. $\tilde{F}$ (*)

$$g, F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \Rightarrow Ff \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow Ff \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow Fg \in \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} \text{ je algebra (vůči násobení)} \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ je algebra (vůči násobení)} \\ \mathcal{S} \text{ je algebra (vůči násobení)} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\overline{Ff}}_{\in \mathcal{S}} \underbrace{Fg}_{\in \mathcal{S}} \in L^1$$

$$\Rightarrow \int \overline{Ff} Fg \exists$$

$$(*) \text{ p} \ddot{\text{r}} \text{pomocn} \int f(x) e^{2\pi i(x, \eta)} dx?$$

$$|f e^{2\pi i(x, \eta)}| = |f| \in L^1 \quad |f|(x) = |f(x)|$$

$$|f| \in L^1 \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}?$$

$$\int \frac{f(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^m}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^m} \rightarrow \int \frac{1}{(1+|x|^2)^m} \rightarrow \int dx$$

Pozn: $\bullet (\cdot, \cdot): \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(f, g) := \int \overline{f} g \text{ m} \ddot{\text{a}} \text{ sm} \ddot{\text{y}} \text{sl} \text{ m} \ddot{\text{o}} \text{b} \ddot{\text{o}} \text{t} \quad f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow \overline{f}, g \in \mathcal{S} \Rightarrow \overline{f} g \in \mathcal{S} \xRightarrow{\mathcal{S} \in L^1} \int \overline{f} g \exists$$

$\bullet (\mathcal{S}, (\cdot, \cdot))$ je pr}st}r se slab}m/m sou}inem

$$\bullet (cf + g, h) = c(f, h) + (g, h) \quad \forall c \in \mathbb{C}, \forall f, g, h \in \mathcal{S}$$

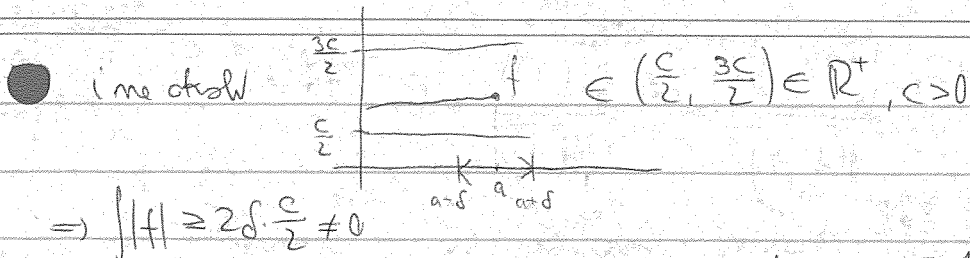
$$\bullet (f, f) = \int \overline{f} f = \int |f|^2 \geq 0$$

$$\bullet (f, f) = 0 \Rightarrow f = 0? \quad \text{Na } L \text{ m} \ddot{\text{o}} \text{p} \ddot{\text{e}} \text{t}!$$

$$\text{p} \ddot{\text{r}} \text{ m} \ddot{\text{o}} \text{p} \ddot{\text{e}} \text{t}: \quad z(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(z, z) = \int \overline{z} z = \int |z|^2 = 0, \text{ ale } z \neq 0!$$

Ab} m} $\mathcal{S}$ p}u j}m f}e sp}j}t}! k- li $f \in \mathcal{S}$ m}b}d}e m}n}ul}n}d} $\Rightarrow$ j} m}n}ul}n}d}



Pozn: Vime $\bar{F}(f+g) = \bar{F}f \cdot \bar{F}g$ Stijmi $\bar{F}^{-1}(f \cdot g) = \bar{F}^{-1}f \cdot \bar{F}^{-1}g$, nek $\bar{F}$ a $\bar{F}^{-1}$ se lišat jen
klodnou a zepornou exponenciidou

Věta 1.14

$$\bar{F}(fg) = \bar{F}f * \bar{F}g, \bar{F}: (\mathcal{Y}, *) \rightarrow (\mathcal{Y}, *)$$

Věta c inverzi $\bar{F}^{-1}$.

Dk: $F := \bar{F}f, G := \bar{F}g, \bar{F}(fg) = \bar{F}(\bar{F}^{-1}F \bar{F}^{-1}G) \stackrel{(\Delta)}{=} \bar{F}(\bar{F}^{-1}(F * G)) = (\bar{F}\bar{F}^{-1})(F * G) \stackrel{\downarrow}{=} F * G =$
 $\hookrightarrow f = \bar{F}^{-1}F, g = \bar{F}^{-1}G = \bar{F}f * \bar{F}g$

1. Fourierova transformace a $*$ me L^2

1.1) $\bar{F}$. t. g_k definice ji jma: $g_k(y) = \int f(x) e^{-2\pi i(x,y)} dx, \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq k\}, k \geq 0, y \in \mathbb{R}^n$
 $(\bar{F}f)(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ ale problém $\exists \lim$

$$\tilde{g}_k(y) = \int f(x) e^{+2\pi i(x,y)} dx, \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq k\}$$

$$(\tilde{\bar{F}}f)(y) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{g}_k(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \text{opět problém } \exists \lim$$

Existence limit v L^2 . $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\bar{F}f - g_k\|_{L^2} \rightarrow 0$ $\|\bar{F}f - g_k\|_{L^2} = \sqrt{(\bar{F}f - g_k)(\bar{F}f - g_k)}$
 $\downarrow$ L^2 norme

Plot! $\tilde{\bar{F}}\bar{F} = \bar{F}\tilde{\bar{F}} = 1$

Idea: $\mathcal{G} \subseteq L^2$ husté

b $\bar{F}$ je omezený (operátor na L^2)

c má spojitě rozšířen

d def. rozšířel na rozšiřovací poleuprosti

Pozn: ad a, husté $\equiv \forall m \in L^2 \quad \forall U_\delta(m) \quad \exists s \in \mathcal{G} \quad s \in U_\delta(m)$

ad b, omezený $\equiv A: V \rightarrow V$ je omezený poleud $\exists C \geq 0, \forall v \neq 0, \frac{|Av|}{|v|} < C$
 Banachův pr.

Pj: $V = L^2(\mathbb{R}) \quad \{h_m, m \in \mathbb{N}_0\}$ úons

$Ah_m = mh_m$ (A lineární rozšíření)

$$\frac{|Ah_m|}{|h_m|} = \frac{|mh_m|}{|h_m|} = m \nearrow +\infty \Rightarrow \nexists C \Rightarrow A \text{ není omezený}$$

Fourier je omezený, neboť $\frac{\|Ff\|}{\|f\|} = \frac{\sqrt{(Ff, Ff)}}{\sqrt{(f, f)}} \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \frac{\sqrt{(f, f)}}{\sqrt{(f, f)}} = 1 \quad \forall f \in \mathcal{S}$

kde $F: L^2 \rightarrow L^2$

• F rozšířen: $f \in L^2, f_n \xrightarrow{L^2} f \quad (Ff) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ff_n) \Rightarrow F$ omezen v L^2 normě
 $\underbrace{\quad}_{\mathcal{S}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{rozšíření na } \mathcal{S}}$
 $(\cdot)_L \text{ rozšíření } (\cdot)_G, \text{ kde } \|f\| = \sqrt{(f, f)}, f \in L^2, \mathcal{S} \subset L^2$

formální vzorečky g_n vyžít

6. pletí Plancherel (smech)

1.2) Konvoluce

$f, g \in L^2 \Rightarrow f * g \exists$ vzoreček stejný

$f * g \notin L^2$ obecně ($f * g$ je jen tzv. podstatně omezen, $es \sup < +\infty$)

2. Fourierova transformace a $*$ na L^1

2.1) F. t. g $F, \tilde{F}$ definice stejné jako na $\mathcal{S}$ ($\exists$ vždy)

$\hookrightarrow \|Ff\| \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \tilde{F}\tilde{F} = \tilde{F}F = 1$

$\hookrightarrow f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \|f\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$(\tilde{F}f)(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int e^{-|y|^2} f(R^{-1}y) e^{2\pi i(x,y)} dx \Rightarrow \tilde{F}\tilde{F} = \tilde{F}F = 1 \Rightarrow \tilde{F} = F^{-1}$

2.2) Na L^1 konvoluce existují. Vzoreček stejný. Dle dtho. $f * g \in L^1$

Věta 1.18

1. $f \in L^1_{(12)} \Rightarrow \lim_{|y| \rightarrow +\infty} (Ff)(y) = 0$

3. $f \in L^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{|y| \rightarrow +\infty} a$ a $\|f\| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow (Ff)$ spojitý.

Dle: wiki proof: Riemann-Lebesgue lemma. NEBEKOUŠEN

2. Distribuce

Měli jsme $\mathcal{S}$ s topologií (konvergence) seminorem ($\Leftrightarrow d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f-g|_n}{1+|f-g|_n}$)

Zabýváme se prostorem duálním, $\mathcal{S}'$

Definice 2.8

$$\mathcal{L}'_{loc}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall m \in D_f, \exists U \ni m, f|_U \text{ má Lebesgueův integrál} \right\} =$$

$D_f \subseteq \mathbb{R}^n, D_f = \mathbb{R}^n$ nvyžadujeme

$$= \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall m \in D_f, \exists U \ni m, \int_U f \, dx < +\infty \right\}$$

Př. $\frac{1}{x} \in \mathcal{L}'_{loc}$ a $\frac{1}{x} \notin \mathcal{L}'$, přesně: $\frac{1}{x} \in \mathcal{L}'_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{1}{x} \notin \mathcal{L}'((0, +\infty))$

$$\forall m \in D(\frac{1}{x}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = +\infty$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightsquigarrow U = (\frac{m}{2}, \frac{3m}{2}), m > 0$$

$$m < 0 \text{ analogicky } (-\frac{3}{2}|m|, -\frac{1}{2}|m|)$$

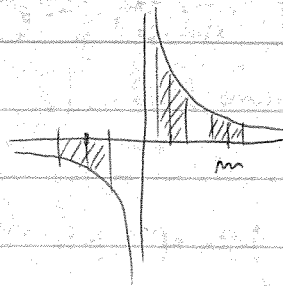
$f|_U$ je spojitá na $\bar{U}$ (kompaktní, neboť $U = [\frac{m}{2}, \frac{3m}{2}]$ resp. $[-\frac{3}{2}|m|, -\frac{1}{2}|m|] \rightsquigarrow$ má L. integrál

Dokonce $\frac{1}{x} \notin \mathcal{L}'((-\infty, +\infty) \setminus \{0\})$

Pozn:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}'_{loc}(\mathbb{R}^n). \text{ Vidíme: } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}'_{loc}$$

zjevně



$$\mathcal{S} \not\subset \mathcal{L}' = \mathcal{L}' / \cong$$

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{L}'$$

zobrazení INJEKTIVNÍ

$$f \mapsto [f] \equiv \{g \in \mathcal{L}' \mid g = f \text{ s.v.}\}$$

Pozn: $\mathcal{D} = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ a } \text{supp } f \text{ je kompaktní}\}$

je prostor všech $f \in \mathcal{C}^\infty$ s kompaktním nosičem

problém: má-li vhodnou topologii (konvergence) je celkem složité

$\mathcal{D}$ a jeho duál $\mathcal{D}'$ viz teorie PDR

Definice 2.9 Prostor temperovaných distribucí

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ je lineární zobrazení a je spojitá}\}$. Navěme jej prostor

temperovaných distribucí.

Pozn: 1) temperované $\rightarrow$ souvisí s rovnici vlnění / tepla

$$2) T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

3) Spojitost zobrazení. Bylo: $T: U \rightarrow V$ a na U a V máme topologii (mapi. konvergence),
umíme definovat spojitost, $f_n \rightarrow f$ v U

Počítáme: $Tf_n \in V$, V je konv. $\Rightarrow$ máme $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tf_n$

Pak bychom $Tf = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tf_n \Rightarrow T$ je spojitá

$$T(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Tf_n) \text{ reformulace přes zobrazení}$$

Minimálně: zobrazení, jež není spojitá (F je spojitá)

Konkrétně $U = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$V = \mathbb{C} (= (\mathbb{R}^2, \sqrt{Re^2 + Im^2}))$$

$$4) \mathcal{S}^* \supseteq \mathcal{S}$$

$$\{T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ je lin.}\}$$

Definice 1.10 Regulární distribuce

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definujme $T_f: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ předpisem $T_f(\varphi) = \int f \varphi \, d\mathbb{R}^n$. T_f se nazývá regulární distribuce generovaná funkcí f .

Pozn: Regulární distribuce jsou spec. případem temperovaných distribucí.

Přijďme $\delta: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta(f) = f(0)$ Diracova distribuce (vezměme to f.e. a rozhodl číslo)

Je to distribuce? • linearita: $\delta(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(0) = (\alpha f)(0) + g(0) = \alpha f(0) + g(0) =$
 $= \alpha \delta(f) + \delta(g) \quad \checkmark$

• spojitost: $f_n \rightarrow f$ v $\mathcal{S} \Rightarrow \delta(f_n) \rightarrow \delta(f)$?

toto máme definováno, to je konvergence ve $V = \mathbb{C}$

Zkusíme $f_n \rightarrow 0$ v $\mathcal{S}$ a testujeme: $\delta(f_n) \rightarrow ?$

$$\delta(f_n) = f_n(0). \text{ Víme, že } f_n \rightarrow f \text{ v } \mathcal{S} \xrightarrow{\text{def.}} \|f\|_{\alpha, \beta} \rightarrow \|f\|_{\alpha, \beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{\tilde{n}}$$

$$\text{Spec. } \alpha = 0 = \beta: \|f\|_{0,0} = \sup \{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\} \rightarrow \sup \{|f(x)|, x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\}$$

$$\text{pro } f = 0 \text{ je to zřejmé: } \sup \{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\} \rightarrow \sup \{0, x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\} = 0$$

$$\Rightarrow |f_n(0)| \rightarrow 0 \quad (\text{dokonce } |f_n(y_0)| \rightarrow 0 \quad \forall y_0) \quad y_0 \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$$

Toto máme zjišťovat.

● $\delta(f_m) = f_m(0)$. Kde jde $\delta(f_m)$? To jsou dle def. kde jde $f_m(0)$? $f_m(0) \rightarrow 0$ viz nřže
 Nyní bychom měli obecně uvést + posloupnosti $f_m \rightarrow f$ a $\delta f_m \rightarrow ?$ Co říká δ u f .
 Použij Δ (lib.)

$f_m \xrightarrow{\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)} f \Rightarrow f_m - f \xrightarrow{\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)} 0$ v $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ snadno. Počítáním $\delta(f_m - f) \stackrel{\text{vím}}{=} \delta(f_m) - \delta(f)$
 + jelikož $f_m - f \rightarrow 0$
 $\delta(f_m - f) \rightarrow 0$ v $\mathbb{C}$ viz nřže (pro $f_m = f_m - f$) ???
 "viz nřže"

$$\delta(f_m) - \delta(f) \rightarrow 0 \text{ v } \mathbb{C}$$

$$\delta(f) \rightarrow \delta(f) \text{ triv.} \quad \delta(f_m) - \delta(f) + \delta(f) \rightarrow 0 + \delta(f) = \delta(f)$$

● Toto je důležitá věta, že $\delta: f \mapsto \delta(f)$ je spojitý zobrazení do $\mathbb{C}$, tj. je to temperovaná distribuce.

Pozn: Budou valence principál a valence partitívni, nejen δ .

Definice 1.11

Nechť T je temperovaná distribuce. Pak definujeme $(D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

$$\bullet (FT)(\varphi) := T(F\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$$

$$\bullet (x^\alpha T)(\varphi) := T(x^\alpha \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$$

$$\forall A \in GL(n, \mathbb{R}) \bullet (AT)(\varphi) := |\det A| T(A\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{Kde } (A\varphi)(x) \stackrel{\text{bylo}}{=} \varphi(A^{-1}x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ a } GL(n, \mathbb{R}) = \{A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid A \text{ lin. a } \det A \neq 0\}$$

general linear

Pozn: korelnost D1.11: PŘÍSTĚ

i) $D^\alpha \delta = ? \quad \delta: \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

pc. $n=1: \quad \delta: \mathcal{G}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{N}_0$ zvolme $\alpha=1$

$$D^\alpha \delta = D^1 \delta = ?$$

$$(D^1 \delta)(\varphi) = (-1)^1 \delta(D^1 \varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$$

ii) $x\delta' = ? \quad [\delta' := D\delta]$

$$n=1 \quad (x\delta')(\varphi) = \delta'(x\varphi) = -[x\varphi]'(0) = \varphi, x \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$$

$$= -(1 \cdot \varphi + x\varphi')(0) = -\varphi(0) + (x\varphi)'(0) = -(\varphi(0) + x(0)\varphi'(0)) = -\varphi(0) = -\delta\varphi \quad \forall \varphi$$

$$\boxed{x\delta' = -\delta}$$

0



Byla definována distribuce. $\mathcal{S}' = \{T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ lin. a spojitá}\}$ temperovanou regulérní f. $T_f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, T_f(\varphi) = \int f \varphi dx$

'Spec. distribuce': $\delta: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

$$\delta \varphi = \varphi(0)$$

$$T \mapsto D^\alpha T, FT, xT \quad (D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \\ (FT)(\varphi) = T(F\varphi)$$

Věta 2.19 Kvalitnost definic distribuce

Objekty definované nýje jsou distribuce.

Dk

$$1) D^\alpha T \quad a) (D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad \varphi \in \mathcal{S}, D^\alpha \varphi \in \mathcal{S} \quad (\text{proto je v } \mathcal{S})$$

$$b) (D^\alpha T)(\varphi + \psi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(\varphi + \psi)) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi + D^\alpha \psi) = (-1)^{|\alpha|} [T(D^\alpha \varphi) + T(D^\alpha \psi)] = \\ = (-1)^{|\alpha|} T D^\alpha \varphi + (-1)^{|\alpha|} T D^\alpha \psi = \underbrace{(D^\alpha T)(\varphi)}_S + \underbrace{(D^\alpha T)(\psi)}_S = S(\varphi + \psi) = S\varphi + S\psi$$

c) $\lambda \varphi, \lambda \in \mathbb{C}$ stejné, d.c.v.

d) spojitost (z dk. spojitosti δ vlnne, je stej. spojitost v 0, viz příklad nýje)

$$\text{ce je to spojitost v 0?} \quad \varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \rightsquigarrow S\varphi_m \rightarrow 0$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (D^\alpha T)\varphi_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} (-1)^{|\alpha|} T D^\alpha \varphi_m \stackrel{T \text{ spojitá}}{=} (-1)^{|\alpha|} T \lim_{m \rightarrow +\infty} D^\alpha \varphi_m \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |D^\alpha \varphi_n| \leq \sup \{|D^\alpha \varphi_n(x)|, x \in \mathbb{R}^n\}. \text{ Ale } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow \|\varphi_n\|_{0,\alpha} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha$$

$$\text{Takže } \sup \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} |D^\alpha \varphi_m| = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} D^\alpha \varphi_m = 0 \quad \uparrow \text{ j. dle (*)}$$

2) FT, $T \in \mathcal{S}'$

$$a) (FT)(\varphi + \psi) = T[F(\varphi + \psi)] \stackrel{\text{lin. F.t.}}{=} T(F\varphi + F\psi) \stackrel{\text{lin. T}}{=} T F\varphi + T F\psi \stackrel{\text{def.}}{=} F T\varphi + F T\psi$$

$$b) FT(1\varphi) = T F(1\varphi) = T 1(F\varphi) = 1 T F\varphi = 1(F T\varphi)$$

$$c) \text{ spojitost: } \varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (FT)\varphi_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} T F\varphi_m \stackrel{T \text{ spoj.}}{=} T \lim_{m \rightarrow +\infty} F\varphi_m \stackrel{F \text{ spoj. na } \mathcal{S}}{=} T F \lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi_m = T F(0) = 0$$

(v dk. φ_m c inv. F.t.)

Pozn: J v bodu 1d lze alternativně použít $D^\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ je spoj (jako analog. $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$)

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ekv. def. sp. $f \cup x_0$

príp. činné: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

3. Vymodel' pre každú definíciu $x^\alpha T$. Je to analógia 1 v dk.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x^\alpha T)(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x^\alpha \varphi_n) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^\alpha \varphi_n) = \|\cdot\| \rightarrow 0$$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} x^\alpha \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot dx$ $\lim \leq \sup$ z pp. $\varphi_n \rightarrow 0$

T dist.

Věta 2.20

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pak:

1. $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$

2. $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$ distributivní Plancherel

3. $x^\alpha T_f = T_{x^\alpha f}$

Dk: 1 indukci: $(D^\alpha T_f)(\varphi) = T_f(D^\alpha \varphi)(-1)^{|\alpha|} = (-1)^{|\alpha|} \int f(D^\alpha \varphi) d\lambda_{\mathbb{R}^n} = (-1)^{|\alpha|} \int \left[f(D^{\alpha-\hat{1}_i} \varphi) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} D^{\alpha-\hat{1}_i} \varphi \right) d\lambda_{\mathbb{R}^n} = (-1)^{|\alpha|} \int \frac{\partial f}{\partial x_i} (D^{\alpha-\hat{1}_i} \varphi) d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

$$\hat{1}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$\uparrow$ i-tá pozice

$$= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \int (D^\alpha f) \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \int (D^\alpha f) \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} = T_{D^\alpha f}(\varphi) \quad \checkmark$$

2. $(\mathcal{F}T_f)(\varphi) = T_f(\mathcal{F}\varphi) = \int f(\mathcal{F}\varphi) d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \int (\mathcal{F}f) \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} = T_{\mathcal{F}f}(\varphi)$

3. $(x^\alpha T_f)(\varphi) = T_f(x^\alpha \varphi) = \int f(x^\alpha \varphi) d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \int (x^\alpha f) \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} = T_{x^\alpha f}(\varphi)$

Plancherel
 $\uparrow$ moment v bodě ale tuhle

Pozn: 1. Ide tedy o alg. závislosti (je třeba znát definici). Složitosti v teorii $\mathcal{S}$. Trochu

obtížnější: spojitost distribuce

2. Zkusíme $\forall f \in \mathcal{S}$ je T_f distribuce. (spojitost)

Věta 2.21

Existují mešedující inkluze: $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{L}' \hookrightarrow \mathcal{S}'$, kde i, j imjektívni.

Dk:

$\bullet f \in \mathcal{S} \Rightarrow f \in \mathcal{L}'$ bylo (věta dříve v kap. 1)

- $f \in L^1 \mapsto T_f$

$$i = \text{id} \quad i(f) = \text{id}(f) = f$$

$$j(f) = T_f$$

- $\exists T_f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C} \quad T_f(g) = \int fg \quad \forall g \in \mathcal{G} \Rightarrow \|g\|_{\infty} = C < +\infty$

$$|\int fg| \leq \int |fg| \leq \int |f| |g| \leq C \int |f|$$

$\underbrace{\quad}_{\in \mathbb{R} \text{ neb } f \in L^1}$

- T_f je lineárny, dôležitú - li je ešte nutné, že je lineárny a spojitý!

a lineárne: $T_f(\varphi + \psi) = \int f(\varphi + \psi) = \int (f\varphi + f\psi) = \int f\varphi + \int f\psi = T_f\varphi + T_f\psi$

b spojitý: $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_f \varphi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f \varphi_n = \int f \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \int f \cdot 0 = 0$

voľ: $\varphi_n \rightarrow 0 \xRightarrow{w} \|\varphi_n\|_{\infty} \rightarrow 0, \sup \{|\varphi_n(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \varphi_n \Rightarrow 0, \text{ tj. } \forall \varepsilon \exists x \exists m, \forall n \geq m, \varphi_n(x) < \varepsilon$$

integrálne meranie $|f| = |T_f|$. T_f je distribúcia.

- Je skutočne nulový? $j(f) = 0? \quad T_f = 0, T_f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \int fg = 0 \quad \forall \varphi$

3. semestr:

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je hustá v L^1

$$(\bar{f}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow \bar{f} = 0 \text{ s.v.} \Rightarrow f = 0 \text{ s.v.} \quad [f] = 0 \text{ z hľadiska } L^1$$

$$j(f) = 0 \Rightarrow [f] = 0$$



Pozn:

$$1 \quad \mathcal{G} \hookrightarrow L^1, \mathcal{G} \hookrightarrow L^1, i(f) := [f]$$

$$2 \quad \tilde{f} \in L^1 \Rightarrow \tilde{f} = [g] \quad \exists g \in \mathcal{G} \quad T_{\tilde{f}} = T_g \quad T_g(\varphi) = \int g \varphi$$

$$T_g(\varphi) := \int g \varphi$$

$$\int g_1 = \int g_2 = \int g \quad g_1 \text{ a } g_2 \text{ sa líšia najviac na množině nuly 0}$$

3 $(\mathcal{G}, L^1, \mathcal{G}')$ je príkladom tzv. Gelfandovej trojice

$$4 \quad \mathcal{G} \hookrightarrow L^2, \mathcal{G} \hookrightarrow L^3, \dots$$

$$5 \quad L^2 \not\subset L^1 \text{ a } L^1 \not\subset L^2 \quad L^1 \cap L^2 \neq \emptyset$$

$$j(x^m \delta^{(m)})(\varphi) = \delta^{(m)}(x^m \varphi) = (-1)^m \delta((x^m \varphi)^{(m)}) = (-1)^m \delta\left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x^m)^{(k)} \varphi^{(m-k)}\right) =$$

$$\delta \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^1)$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \delta[(x^m)^{(k)} \varphi^{(m-k)}] = (-1)^m \frac{m!}{m! \cdot 0!} m! \varphi(0) = (-1)^m m! \varphi(0) = (-1)^m m! (\delta \varphi)$$

$$x^m \delta^{(m)} = (-1)^m m! \delta$$



- 1) Průběhy gaussovské vypočty
- 2) Zhlazovací funkce (průběhy konvoluce s gaussovskou f.)
- 3) Fourierova transformace funkcí $f * \varphi_\epsilon$
 - Inverze
 - Plancherelova formula
- 4) Testovací funkce φ, ψ, ϵ

↓
distribuce a kompartitní mocn
- 5) Distribuce a operace s nimi
- 6) Příklad distribucí
- 7) Diagonalizace
(množství distribucí a bází)
→ mod 3)

$\mathbb{T} * \mathbb{S}$
konvoluce distribucí
- vztahy mezi
(dále čer)

1) GAUSSOVSKÉ VÝPOČTY

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

korpel

$$\int d\mu(x) = 1$$

míra

$$\int x d\mu(x) = 0$$

$$\int x^2 d\mu(x) = \text{korpel}$$

- oběhové
v praxi
statistice

$$d\mu_g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$$

gaussova míra
"pravděpodobnost"

$$\int d\mu(x) = 1$$

$$\int x^2 d\mu(x) = \frac{1}{2}$$

nejjednodušší obecný případ
je kvadratická prv-der.
forma

A pozitivně def. matice: $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx$

$$A = O^T D O \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \quad d_{ii} > 0$$

$$B = O^T \overline{D} O \quad B^2 = A \quad (R^2(x)) = (Bx, Bx)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{(\xi, x)} e^{-(A x, x)} dx = e^{\frac{1}{4}(C \xi, \xi)}$$

- pojav se najpogostejše v razpisnem postopku, razpisni
se i v kompleksnem $\rightarrow$ reša o jedrnatost.

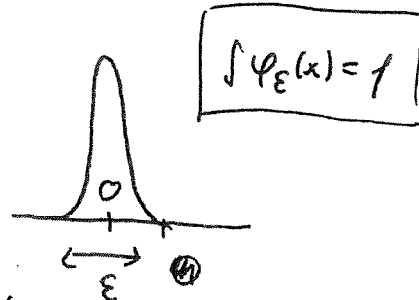
komunita lidí z této provincie považoval Four. transformace gauronů 'naš' ^{tato}

$$(\hat{f}^{\vee}) = \underline{2\pi}f \quad (\hat{f}) = \underline{2\pi}f \Rightarrow \text{skladník se otočí, když se před integrací } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

2) Zharovani

$$f * \varphi_\varepsilon$$

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$



(land. gaus. m'ia

$$\sqrt{\pi} \int e^{-x^2} dx$$

odhad zlyh
vni a my vni
zauvoly

$$\rightarrow \int_a^\infty e^{-x^2} dx \leq \frac{e^{-a^2}}{2a}$$

$\rightarrow \int_a^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-(xy)^2} dy = e^{-a^2} \int_0^\infty e^{-2ay - y^2} dy =$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

f regular at x , otherwise not

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

3) Fourier transform for

a) inversion formula

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} f(y) dy \right) d\xi =$$

$$\left(= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} f(y) d\xi dy \right)$$

↖ x, y - non-integrable, integrals necessary

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y) - \varepsilon^2 \xi^2} f(y) d\xi dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}} f(y) dy =$$

$$\left| \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} \xrightarrow{FT} e^{-\varepsilon^2 \xi^2} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\varepsilon) = 2\pi f(x)$$

b) Plancherel formula

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \right\|$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^2 \xi^2} e^{i\xi x} f(x) e^{-i\xi y} \overline{g(y)} d\xi dx dy \stackrel{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_\varepsilon(x-y) \overline{g(y)} dx dy =$$

↖ regularizer

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} (f * \varphi_\varepsilon)(y) \overline{g(y)} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{g(y)} dy$$

↖ 2π

Hint:

- distributions - general distribution problem
- dual objects are regular functions

$$\{f \rightarrow \int f(x) d\mu(x)\} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

linear functional on problem spaces for

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

• convolution mea $(f * g) * h = \mu * (g * h)$

$$(\mu * f)(x) = \int f(x-y) d\mu(y)$$

• normaliz. m. m. m. m. m.

μ

$$\int \mu(x) = 1$$

$$d\mu_g(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-x^2} dx$$

$$\int x d\mu(x) = 0$$

$$\int x^2 d\mu(x) = \frac{1}{2}$$

central limit theorem

$$\mu * \mu * \dots * \mu \rightarrow \delta_0$$

$$\int |x|^3 d\mu(x) < \infty$$

$$\underbrace{\mu * \mu * \dots * \mu}_{n\text{-times}}$$

• k. g. i. n. s. p. e. a. l. n. e. i. n. m. i. t. t. l. e. n
(substitution $\xi \rightarrow \frac{x}{\sqrt{n}}$)

→ Gaussian's fce. Δ

DISTRIBUCIE

= spojiv. lineár. funkcionál na
množine testovacích fce.

• Práve testovacie funkcie - musia byť s. m. n. n. n. n. n.

• "neighborhood" $\mathcal{D}$... funkcie s. d. i. f. e. r. e. n. c. i. a. k. o. m. p. a. k. t. u. m. n. o. r. m. i. e. n.

$\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$$

$\mathcal{E}$... nekonečne diferencovateľné

• vhodné fce.

- distribúcie kompaktných m. n. o. r. m. i. e. n. → práve $\mathcal{E}$

$$1 \times 1 \quad NE! \quad \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot 1$$

$\delta_0 \cdot \delta_0$ TAK NE! (v podstate slojz. problém)

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) \right| \quad \dots \text{ na } \mathcal{D}$$

$$\|\varphi\|_{k,L} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) (x+1)^L \right|$$

FT používa
užívajú na
skladnosť a z. v. t.
často keď $k = \ell$
↑
aby nebyl
problém

• spojiv. lineár. funkcionál

$$\forall \varepsilon \exists \delta \exists k : \|\varphi\|_k^L < \delta \Rightarrow T(\varphi) < \varepsilon$$

$$\text{lineár. funkcionál} : \exists k \exists C : \|\varphi\|_k^L < 1 \Rightarrow T(\varphi) < C$$

pr: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^k}{dx^k} \delta_0$ neni distribuce

7 par - neni jedna ne! $\rightarrow \sum_{k=0}^N \dots$

FOURIER-T.: $\left(\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dx^k} \delta_0 \right) \varphi = \sum_k a_k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x)$

$\hat{f}(\xi) = \int e^{i\xi x} f(x) dx$

$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i\xi x} d\mu(x)$ mla

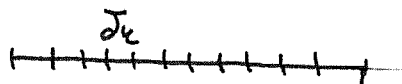
$\hat{T}(\xi) = \int e^{i\xi x} T(x) dx = T(e^{i\xi x})$ distribuce

$T(\varphi) \quad \varphi(x) = e^{i\xi x}$

neni testovací fce, neni uva
r ∞

$\rightarrow$ treba je pazeovat r $\in$

$T = \sum_{k=-N}^N \delta_k$



$\hat{T}(\xi) = \int e^{i\xi x} dT(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\xi} = \frac{e^{i\xi(N+1)} - e^{-i\xi N}}{e^{i\xi} - 1} \cdot e^{-i\xi \frac{N}{2}} =$

$q = e^{i\xi}$

$q^{-N} + q^{N+1} + \dots + q^N = q^{-N} \frac{q^{2N+1} - 1}{q - 1}$

$= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\xi}{\sin \frac{\xi}{2}} = D_N(\xi)$

Dirichletovo jadro

odborně k teorii FOUR. rãd

• konvoluce 2 periodizujících fce!

$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$

$f * D_N =$

N-ty celkový součet FOURIEROVÝCH rãd

$f(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\xi}$

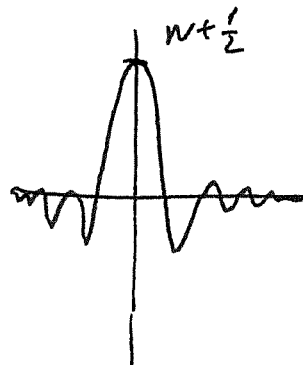
$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\xi} = f + D_N$

~ jako filtr

$\{f \rightarrow f * D\} :$

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

pro $N \rightarrow \infty$ jde k δ_0
delta-fun



$f * D_N(x) = N$ -y 'cathky' součet přes. řad pro f

$$T = \sum_{k=N}^N \delta_k \quad \text{a} \quad \hat{T} = D_N(x) \quad \text{pro v limitě 'stejně'}$$

prida'vaní
 nové
 prvky

$$\rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad (\text{pro } N \text{ jde k } \infty)$$

• Fourier. transform. derivace: par parts

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon x} \frac{d}{dx} f(x) dx = -i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon x} f(x) dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} f \right) (\epsilon) = -i\epsilon \hat{f}(\epsilon)$$

prvky derivace na
 na'vahu a obrátit

$$\int e^{i\epsilon x} ix f(x) dx = \frac{d}{d\epsilon} \int e^{i\epsilon x} f(x) dx$$

derivace podle parametru

$$\boxed{T * S(\epsilon) = \hat{T}(\epsilon) \cdot \hat{S}(\epsilon)}$$

→ přechází 'konvoluci'
 na násobení
 → "odkonvoluce"

$$\frac{d}{dx} f(x) = f * \frac{d}{dx} \delta_0$$

def. konvoluce
 pomocí 'testovacích
 funkcí

$$\int e^{i\epsilon x} \frac{d}{dx} \delta_0(x) dx \stackrel{\text{P.P.}}{=} i\epsilon$$

• konvoluce 2 distribucí

$$\| (T * S) * \varphi = T * (S * \varphi) \| \quad ?$$

test-fu → opit Testovací fu

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-z) g(z) dz$$

Připomenutí: $(T * S)(\varphi) = T(\tilde{S} * \varphi)$, kde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alespoň jedno s kompaktním nosičem

Vlastnosti:

Věta 2.22 1) $T * S = S * T$

2) $T * (S * V) = (T * S) * V$

3) $T_i * S = S$, kde polní alespoň jedno je s kompaktním nosičem

Pozn: 1) $T_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a $T_i(\varphi) = \int \varphi dx$

2) $1 \in L_{loc}^1$ $1: x \mapsto x$ je $\forall m \in \mathbb{R}^n, \exists (m-\varepsilon, m+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0 \int 1_{(m-\varepsilon, m+\varepsilon)} dx = 2\varepsilon$

3) Dle $T_i * S = S \Rightarrow T_i$ je jednotka v algebře distribucí s kompaktním nosičem temperovaných

$T_i \notin$ temperovaných distribucí s kompaktním nosičem. $\text{supp } T_i = \mathbb{R}$

Lemme 2.23

Necht $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pak $\frac{d}{dy}(f * g) = \frac{df}{dy} * g = -f * \frac{dg}{dy}$

Dk:

$$\frac{d}{dy}[(f * g)(y)] = \frac{d}{dy} \left[\int_{x \in \mathbb{R}^n} (f(y-x) g(x)) dx \right] = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{d}{dy} (f(y-x) g(x)) dx = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f'(y-x) g(x) dx = \left[f(y-x) g(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$- \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(y-x) g'(x) dx = -(f * g')$$

$$\therefore \left[\frac{d}{dy} (f * g) \right](y) = \frac{d}{dy} \left[\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(y-x) g(x) dx \right] = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f'(y-x) g(x) dx = (f' * g)(y)$$

Pozn:

neplatí tedy Leibnitz: $(f * g)' \neq f' * g + f * g'$ obecně. Pro $g=0$ ale mapi. ano.

Věta 2.24

Necht $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a alespoň jedno s kompaktním nosičem. Pak platí $(T * S)' = T' * S = -T * S'$

Dk: Stejně jako dříve. Z def. derivace.

Pozn: $T'(\varphi) = -T(\varphi')$. Obecněji $(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
 $\alpha \in \mathbb{N}_0$

Věta 2.24.5

$\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}T \mathcal{F}S, \mathcal{F}(TS) = \mathcal{F}T * \mathcal{F}S$, je-li s kompaktním nosičem.

Dk: symetricky.

Pozn: $*$ distribuel se nad σ -stejnými, jako $\star$ funkcí (slabě podmín. existence)
 Dvoustupňovost def. $T^* \varphi, T^* S$

Kapitola: Intermezzo

Rozšíření integrálních vět (Gauss, Green, Ostrogradsky, spec. Stokes v $\mathbb{R}^2$,
 obecná Stokes. věta, Newtonova formule)

Důl: $\int_M dw = \int_{\partial M} w$. M kompaktní parametrizovaná regulární plocha $\Rightarrow \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

$\Rightarrow$ div, grad, $\int$ z potenciálního polí (z práce)

$$\text{grad } \varphi := (d\varphi)^\# \quad \#: (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)$$

$$\text{div } X := *d * X^b \quad b: (\mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

$$\text{rot } X := [*d(X^b)]^\#$$

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} F \cdot ds = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial x^i}, W \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^{n-1}(M) \rightarrow \Omega^n(M) \rightarrow 0$$

$$(d[f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n}_{=0} (-1)^{i-1} = 0$$

$n+1$ varieta $\rightarrow$ m m -varieta mex'stují

$$\#: \mathcal{C}^\infty(M, (\mathbb{R}^n)^*) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$$

$$b: \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, (\mathbb{R}^n)^*)$$

$$g(\# \alpha, w) = \alpha(w)$$

$N^b(w) = g(N, w)$, kde g je skalární součin $\in \mathcal{C}^\infty(M, S^2((\mathbb{R}^n)^*))$, pokud $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

je parametrizovaná regulární m -plocha $M \subseteq \mathbb{R}^m$, pak $g = \Phi^* \text{euc}_m$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^n(M, \mathbb{R}) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow *d * X^b & \uparrow \varphi & \xrightarrow{d\varphi} \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{X^b} & \uparrow *X^b \xrightarrow{d} d * X^b \\ & & \downarrow \text{div } X & & \downarrow dX^b & & \downarrow *dX^b \\ & & & & & & \downarrow \# \\ & & & & & & \downarrow \# \end{array}$$

$$*: \Omega^k \rightarrow \Omega^{n-k}$$

$$(*dX^b)^\# \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{n-2}(\mathbb{R}^n))$$

Pro $m=3$ je $\text{rot } X = (*dX^b)^\# \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^3)$

Definice 12

Nechť $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^m$ je regulární parametrizace $M = \Phi(M)$ a g je na M indukovaná metrika. Pak $N \in \mathcal{C}^\infty(\partial M, \mathbb{R}^m)$ nazýváme normálovou, pokud $g(X, N)|_{\partial M} =$

$\mathbb{R}$ -fu

$n-1$ forma

$$= *(X^b) \quad \forall X \in \mathcal{E}^\infty(M, \mathbb{R}^m)$$

$$\downarrow p \in \mathcal{E}^\infty(M, \mathbb{R}^m)$$

X^b ... 1-forma, $*(X^b)$ $m-1$ forma

Pozn: vol_M je forma objemu na M . $\partial M = \Phi(\partial U)$, kde def $\Phi_{\partial U}: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\Phi_{\partial U}^* g \in \mathcal{E}^\infty(\partial U, S^2 \mathbb{R}^m) \text{ minimální pro } g = \text{euc}_m$$

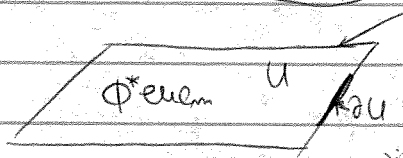
$\Phi_{\partial U}^* \text{euc}_m$ je matice indukovaná z euklidovské euc_m z $\mathbb{R}^m$ na ∂U .



$\Rightarrow \text{vol}_M$ je $(e_1)_{\tilde{m}} \wedge \dots \wedge (e_{m-1})_{\tilde{m}} \quad \forall \tilde{m} \in \partial M$, kde

$\Phi_{\partial U}^* \text{euc}_m \quad \{(e_1)_{\tilde{m}}, \dots, (e_{m-1})_{\tilde{m}}\}$ je ON-báze v bodě $\tilde{m}$ vůči matici

$\Phi_{\partial U}^* \text{euc}_m$ jde o bázis tangentního prostoru k ∂M v $\tilde{m}$.

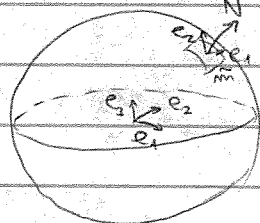


N - vektor normála

$$(\text{vol}_M)_{\tilde{m}} = (e_1 \wedge e_2)_{\tilde{m}} \quad B^3 \subseteq \mathbb{R}^3$$

b: vektor $\rightarrow$ forma

#: forma $\rightarrow$ vektor



Věta I.25 Gaussova věta o divergenci

Nechť M je kompaktní regulární parametrizovaný plocha a X je hladké vektorové pole na M , tj. element $\mathcal{E}^\infty(M, \mathbb{R}^m)$. Pak $\int_M \text{div} X \text{vol}_M = \int_{\partial M} g(X, N) \text{vol}_{\partial M}$.

$$\text{Dk: } \int_M \text{div} X \text{vol}_M = \int_M *d*X^b \quad *X^b = g(X, N) \text{vol}_{\partial M}$$

$$\int_{\partial M} g(X, N) \text{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} *X^b$$

$dw = \text{div} X \text{vol}_M$, kde $w = *X^b$ což plyne z def. vol_M .

$$\text{Stokes: } \int_{\partial M} w = \int_M dw = \int_M \text{div} X \text{vol}_M$$

$$\int_M *X^b = \int_M g(X, N) \text{vol}_{\partial M}$$

□

Pozn: $*$: $\mathcal{E}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^m(M, \mathbb{R})$

$$\Omega^0(M)$$

$f \mapsto f \text{vol}_M$ zduročíme faktu $dw = \text{div} X \text{vol}_M$

$$\text{P3: } \int_M \varphi \Delta \varphi + g(\text{grad} \varphi, \text{grad} \varphi) = \int_M g(\varphi \text{grad} \varphi, N)$$

Gaussova věta o divergenci $\int_M \text{div}(\varphi \text{grad} \varphi) = \int_M g(\varphi \text{grad} \varphi, N)$

$$\text{L.S. } \int_M \text{div}(\varphi \text{grad} \varphi) = \int_M g(\text{grad} \varphi, \text{grad} \varphi) + \int_M \varphi \text{div}(\text{grad} \varphi) = \int_M g(\text{grad} \varphi, \text{grad} \varphi) + \int_M \varphi \Delta \varphi, \text{ kde}$$

musím dodat $f \in C^\infty(M, S^2(\mathbb{R}^m)^*)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) &= " \varphi' \operatorname{grad} \psi + \varphi (\operatorname{grad} \psi)' " = g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \varphi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) = \\ &= g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \varphi \Delta \psi \end{aligned}$$

Pozn: 1 $\int \varphi \Delta \psi - \int \psi \Delta \varphi = \int (\nabla \varphi, \nabla \psi) = \int \nabla f \cdot \nabla g$

2 $\operatorname{div}(fX) = \operatorname{grad} f \cdot X + f \operatorname{div} X$ (dome spr. $X = \operatorname{grad} \psi$)

3 první část zeli: $\int_{\partial M} g(\varphi \operatorname{grad} \psi, N) = \int_M g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \int_M \varphi \Delta \psi$

Věta I. 28 1. Greenova formule

Nechť M je regulární kompaktní parametizovaná plocha. Pak $\int_M \varphi \Delta \psi = \int_{\partial M} g(\varphi \operatorname{grad} \psi, N) - \int_M g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \int_M \varphi \Delta \psi$ $\forall \varphi, \psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Dk: $\int_{\partial M} g(\varphi \operatorname{grad} \psi, N) \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_M \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \int_M [g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \varphi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi)] =$
 $= \int_M g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \int_M \varphi \Delta \psi$ □

Př: $\int f \Delta \tilde{g} + g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \tilde{g}) = \int g(\tilde{g} \operatorname{grad} f, N)$
 $\int \tilde{g} \Delta f + g(\operatorname{grad} \tilde{g}, \operatorname{grad} f) = \int g(f \operatorname{grad} \tilde{g}, N)$ ⊖
 $\int f \Delta \tilde{g} - \int \tilde{g} \Delta f = \int [g(\tilde{g} \operatorname{grad} f, N) - g(f \operatorname{grad} \tilde{g}, N)]$

Věta I. 28 2. Greenova formule

Nechť M je regulární kompaktní parametizovaná plocha, $\varphi, \psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Pak $\int_M (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial M} g(\varphi \operatorname{grad} \psi, N) - g(\psi \operatorname{grad} \varphi, N)$

Dk: viz nř 20 (odkvetení Greenových formulí) □

Pozn: ve fyzice namísto $\int_{\partial M} g(\operatorname{grad} f, N)$ se píše $\int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial n} d\vec{S}$

f. Greenova formule 2: $\int f \Delta g - \int g \Delta f = \int_{\partial M} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) \cdot d\vec{S}$

Kapitola 3: Parciální diferenciální rovnice

Definice 3.13

$Q = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1, \dots, i_m} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ se nazývá diferenciální operátor řádu r , existuje-li $a_{i_1, \dots, i_m} \neq 0$ a $\sum_{j=1}^m \alpha_{i_j} = r$ a $\forall \alpha, |\alpha| > r$ je $a_\alpha = 0$, kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$

Pozn: $\Delta = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nebo $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nazýváme Laplaceův operátor. Živí je řádu 2.

$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ d'Alembertův (vlnový) operátor ($c=1$), 2. řádu

$H = -\Delta + \frac{\partial}{\partial t}$ tepelný operátor ($-\Delta + \frac{\partial}{\partial t}$)

$\mathcal{H} = -\Delta + x^2$

$\mathcal{H}f = -\Delta f + x^2 f$ Hamiltonián harmonického oscilátoru

mnoho diferenciálních rovnice mají definice neboť $a_\alpha \in \mathbb{C}$, což zde tak není (mnoho $\sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1, \dots, i_m}(x_1, \dots, x_m) \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}$ kde $a_{i_1, \dots, i_m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$)

Definice 3.14

Q nazývá se diferenciální operátor řádu r . Pak $Q^h = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1, \dots, i_m} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}$, ži $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m} = h$ nazýváme hlavní část operátoru Q .

$P_2 \cdot H^h = -\Delta$

$\Delta^h = \Delta^h$

Pozn: $Q^h = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \partial^\alpha$ podle definice 3.14

Definice 3.15

Diferenciální operátor Q řádu r nazýváme eliptický, pokud $\sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \xi^\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \xi^\alpha)x$, $x \in \mathbb{R}^m$ (tzv. hlavní symbol) je lineárním izomorfismem (bijekcí) $\forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0, \dots, 0\}$

$P_2 \Delta = \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ • řádu 2

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha$$

$$a_\alpha?, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$$

$$a_{(2,0,\dots,0)} = 1$$

$$a_{(0,2,0,\dots,0)} = 1$$

$$\vdots$$

$$a_{(0,0,\dots,2,0)} = 1$$

$$a_{(0,0,\dots,0,2)} = 1 \quad \text{pro } (i_1, \dots, i_m) \notin [(2,0,\dots,0), (0,2,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,0,2)]$$

$$a_{(1,1,0,\dots,0)} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} (=0) \quad a_{(1,2,0,\dots,0)} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha = \sum a_{(2,0,\dots,0)} \xi_1^2 + a_{(0,2,\dots,0)} \xi_2^2 + \dots + a_{(0,\dots,0,2)} \xi_m^2 = 1 \cdot \xi_1^2 + 1 \cdot \xi_2^2 + \dots + 1 \cdot \xi_m^2$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial (x^m)^2} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^m \xi_i^2$$

$$x \mapsto \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) x, x \in \mathbb{R}^n \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) x^1 \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) x^m \end{pmatrix} \quad \text{izomorfismus} \equiv \text{pp.}$$

homom. dimenze $\mathbb{R}^n$

$$\text{Ker}(x \mapsto \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) x) = \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x} \mapsto \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) \tilde{x} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) x^1 = 0 \Leftrightarrow x^1 = 0 \vee \sum_{i=1}^m \xi_i^2 = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) x^m = 0 \Leftrightarrow x^m = 0 \vee \sum_{i=1}^m \xi_i^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) = (0, \dots, 0)$$

požad. by m'jalo $x^i \neq 0 \rightarrow \xi_i = (0, \dots, 0) (\Leftrightarrow \sum_i \xi_i^2 = 0)$ po $\forall i = (1, \dots, m)$

↓

Odkup snadno: $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right)}_{=0} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n$ má tu vlastnost, tj. je to izomorfismus

(Laplaceův operátor je eliptický

Pozn: $T: U \rightarrow V, U, V$ konečn. dimenze

$$\dim U = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$

• $U \cong V$ a $\text{Ker} T = \{0\} \Rightarrow \dim U = \underbrace{\dim \text{Ker} T}_0 + \dim (\text{Im} T)$
 $\Rightarrow \dim \text{Im} T = \dim U = \dim T$

$\Rightarrow \text{Im} T = V \Rightarrow T$ je surjektivni

Pri linearnom operatoru $\square = \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$

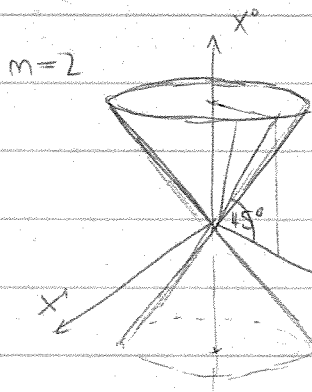
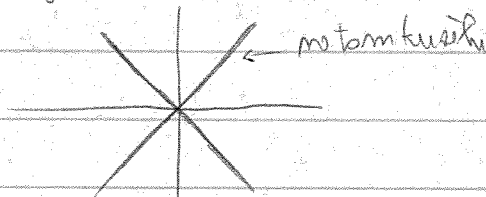
$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2)x^0 \\ (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2)x^1 \\ \vdots \\ (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2)x^m \end{pmatrix}$ je simbolom $\square$

Nenul (injektivni) ($\xi \neq 0$), a sice $|\xi_0| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}$

$(\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}, \xi_1, \dots, \xi_m)$. Neboť $\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2)x^0 \\ \vdots \\ (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2)x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x^0 \\ 0 \cdot x^1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

je nulovú zobrazenie, je. nenul (injektivni)

Pozn: $m=1$ $|\xi_0| = \sqrt{\xi_1^2} = |\xi_1|$



$|\xi_0| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$

$\xi_1 = r_0 \cos \varphi$

$\xi_2 = r_0 \sin \varphi$

$\xi_0 = r$

$\xi_1 = k \xi_2 \Rightarrow \xi_0 = \sqrt{1+k^2} |\xi_2|$



● Připomenutí: $Q = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_m=0, \dots \\ \dots, p_{i_1}, \dots, p_m}} a_{i_1, \dots, i_m} \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_m}^{i_m}$

Minimální: nejednosměrnost, alfoch $[Q = \frac{1}{2} \partial_x^2 + \frac{1}{2} \partial_x^2 + \partial_y^2 \dots]$

Symbol $\sigma(Q)(\xi) = \sum_{i=1}^m \xi_i^2 : \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

množením vektoru

Pozn: • Je-li (zobrazení) symbol $\sigma(Q)(\xi)$ izomorfismem $\forall \xi \neq 0$ ($\vec{0}$), tak Q nazývá eliptický.

• Je-li Q druhého řádu, pak $\sigma(Q)(\xi)$ je kvadratická forma.

a) $\sigma(Q)(\xi)$ pozitivní def. $\Rightarrow Q$ eliptický (viz přík.)

b) $\sigma(Q)(\xi)$ nedegenerovaná a signatura (p, q) , $p > 0, q > 0 \Rightarrow Q$ hyperbolický (má $\square$)
($p+q=m$)

c) popř. parabolický (alespoň 1 vl. č. 0 a $\forall$ ostatní kladné, a nebo alespoň 1 vl. č. 0 a ostatní záporné) $\partial_{x_0} - \Delta = Q$ kde $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial (x_i)^2}$ Tepelný operátor

Symbol? 1. řád 2

2. levý symbol $\leftarrow$ • 1. stupně derivací řádu < 2
• $\sum_{i=1}^m \xi_i^2 + \dots + 0 \xi_0 \Rightarrow 1, \dots, 1, 0$

Definice 3.16

Volí Q je diferenciální operátor řádu m . Pak temperovanou distribuci $E \in \mathcal{S}'$ nazýváme

fundamentální řešením rovnice $Q(y) = 0$ pokud $QE = \delta$ (Diracova distribuce $\delta \varphi = \varphi(0) \forall \varphi \in \mathcal{S}$)

Lemma 3.29

Je-li $E \in \mathcal{S}'$ fundamentálním řešením rovnice $Q(y) = 0$, je $E * f$ řešením rovnice $Q(y) = f$.

Důk: E je f. r. $\rightarrow QE = \delta$

$$E * f \dots Q(E * f) = (QE) * f = \delta * f = f, \text{ neboť } \delta \text{ je jednotkou v } (\mathcal{S}', *) \text{ čb.}$$

$$\text{všechny m. f. dle } (f * g)' = f' * g \dots$$

Pozn: 1. Vyjádření fundamentálního řešení: dobře se počítají příslušné rovnice s nemožnou pravou stranou

3. v principu:

Q volí je eliptický řádu 2 ($Q = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$). Můžeme říci $QE = \delta / F$

$$F(QE) = F\delta = 1 = T_1$$

není integrovatelná

$$F(\sum a_{ij} \partial x_i \partial x_j) = 1$$

$$(-2\pi i)^2 \sum_{i,j} \xi_i \xi_j a_{ij} F(Eq) = 1(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

$$(FE)(\varphi) = \frac{1}{(-4\pi^2 \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \xi_i \xi_j)} \varphi$$

$$T_j(FE) = \frac{1}{-4\pi^2 \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \xi_i \xi_j}$$

Problém je najít inverzi („offponerovat“). Ale z hlediska integrace:

Q je eliptická, $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j$ je kvadratická forma $\Leftrightarrow$ je pozitivní nebo negativní definitní

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int \frac{1}{C(\sum_{i=1}^m \xi_i^2)}, \quad C \text{ je nejmenší kl. číslo } \sum a_{ij} \xi_i \xi_j$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{2\pi i(x, \xi)}}{C(\sum_{i=1}^m \xi_i^2)} d\lambda_{\mathbb{R}^m}$$

Pro $m=1$: $\int \frac{e^{2\pi i x \xi}}{C \xi^2} d\xi \approx \int \frac{1}{\xi^2} d\xi \quad (-\infty, \infty) \quad \left[-\frac{1}{\xi} \right]_0^{+\infty} = -(+\infty - 0) = -\infty$

$$\xi = (\xi_1)$$

Pro $m > 1$ např. dimenzí $\int \frac{e^{2\pi i(x, \xi)}}{C(\sum_{i=1}^m \xi_i^2)} |\xi|^{m-1} L(\varphi) d|\xi| d\varphi_1 \dots d\varphi_{m-1}$

úhelová (azimutální) část

Analogicky: $\frac{1}{\xi^2} \xi^{m-1} = \xi^{m-3} \quad m=3 \quad \int \text{konst}$

$m=2 \quad \int \frac{1}{\xi} \Rightarrow$ reální hodnoty $\ln$ (value principal)

$m > 3 \quad \dots$ ještě směřuji

Problém s $\int$ u měnících se: Počítám na $\mathcal{S}$: $(FE)(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi$ to u $+\infty$ utlumí

$$\int \frac{e^{2\pi i(x, \xi)} \varphi}{C \sum \xi_i^2} |\xi|^{m-1} L(\varphi) \dots \quad \varphi \text{ je rychle rychle klesající a utlumí i iřt polynomu } |\xi|^{m-3}$$

Kapitola 3.1: Laplaceova rovnice a jeho fundamentální řešení

Plán: 1 obsah sfery. Definice F fee, definice B-fee

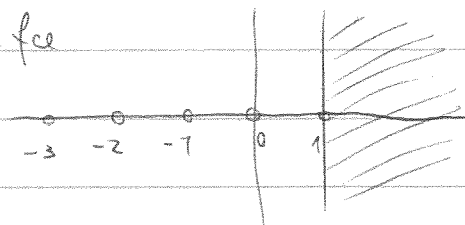
2 Vzorček

3 Ověření že jřtá "fee"/distribuce generovaná fermi jřau f. řešením $\Delta y = 0$

1. $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 1\}$ Gamma fee

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \vartheta \cos^{2q-1} \vartheta d\vartheta$$

Eulerova beta funkce



• Vzorci: a) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

b) $\Gamma(m) = (m-1)!$ $m \in \mathbb{N}$

c) $\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_m$, $m \in \mathbb{N}_0$, kde $(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+m-1)$
 m -člená

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_0 = \sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

• Obsah koule a sféry

$B_r^m = \{x \in (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < r^2\} \subseteq \mathbb{R}^m$

$\partial B_r^m = S_r^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$ je sféra v $\mathbb{R}^m$ ($m-1$ dimenzionální sféra; $(m-1)$ -plocha)

$\text{vol}(B_R^m) = \int \chi_{B_R^m} d\mu_{\mathbb{R}^m}$, kde $\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$
objem

Lebesgueův integrál z charakteristické fce

- vhodně přejít do sférických souřadnic

$x_1 = r \cos \vartheta_1$

$x_2 = r \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2$

$\vdots$

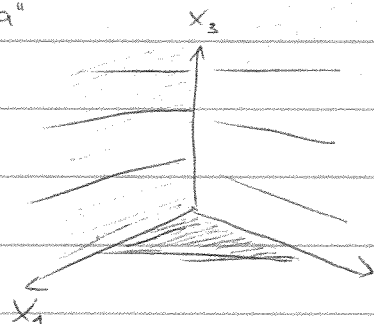
$x_{m-1} = r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-2} \cos \vartheta_{m-1}$

$x_m = r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-2} \sin \vartheta_{m-1}$

$r \in \mathbb{R}^+, \vartheta_i \in (0, \frac{\pi}{2})$

je lokálně a regulárně zobrazení

$\mathbb{R}^+ \times (0, \frac{\pi}{2})^{m-1} \xrightarrow{\text{"ma"}} (\mathbb{R}^+)^m$, tj. me (otevřený) $I \cdot 2^{m-1}$ (tj. 1. kvadrant, 1. oktant...)



- included lze zjistit

$\det(\text{Jac } \varphi) = r^{m-1} \sin^{m-2} \vartheta_1 \sin^{m-3} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-1}$
 $(\sim \mathbb{R}^3: r^2 \sin \vartheta)$

integrály pouze pro 1 „oktant“ $\rightarrow$ třeba ze symetrie

zjednoduší počtem „oktantů“

$\text{vol}(B_R^m) = \int \chi_{B_R^m} d\mu_{\mathbb{R}^m} = 2^m \int_{r=0}^R \int_{\vartheta_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_{\vartheta_{m-1}=0}^{\frac{\pi}{2}} r^{m-1} \sin^{m-2} \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_{m-2} d\vartheta_{m-1} d\vartheta_{m-2} \dots d\vartheta_1 =$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{+\infty} r^{m-1} dr \cdot 2 \int_{\vartheta_1=0}^{\pi/2} \sin^{m-2} \vartheta_1 d\vartheta_1 \cdot 2 \int_{\vartheta_2=0}^{\pi/2} \sin^{m-3} \vartheta_2 d\vartheta_2 \cdots 2 \int_{\vartheta_{m-2}=0}^{\pi/2} \sin \vartheta_{m-2} d\vartheta_{m-2} \cdot 2 \int_{\vartheta_{m-1}=0}^{\pi/2} d\vartheta_{m-1} = \\
 &= 2 \frac{R^m}{m} B\left(\frac{m-1}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{m-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots B\left(1, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \cancel{\frac{2^m R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}} \quad (1) \\
 &\quad \cdot \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \cdots \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{2^m R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^m}{\Gamma(\frac{m}{2})} = 2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^m}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{R^m}{m}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \textcircled{2} & \textcircled{m-2} & \textcircled{2p+1} & \textcircled{2q-1} \\ \textcircled{m} & & & \textcircled{m-1} \end{matrix}$

Věta 3.30

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{vol}(B_R^m) = 2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^m}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{R^m}{m}.$$

Dů: Niz m f 2

$$\begin{aligned}
 \text{3) } m=1 \quad & \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \frac{R}{1} = 2R \\
 & \begin{array}{c} | \text{---} | \text{---} | \\ -R \quad 0 \quad R \end{array}
 \end{aligned}$$

$$m=2 \quad \frac{2(\sqrt{\pi})^2}{\Gamma(1)} \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$m=3 \quad \frac{2 \pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot 3} = \frac{2 \pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\Gamma(1+\frac{1}{2}) \cdot 3} = \frac{2}{3} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\sqrt{\pi} \cdot (\frac{1}{2})_1} = \frac{2}{3} \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$m=4 \quad \frac{2(\sqrt{\pi})^4 R^4}{\Gamma(2) \cdot 4} = \frac{2 \pi^2 R^4}{(2-1)! \cdot 4} = \frac{\pi^2}{2} R^4$$

● Minimale: $\text{vol}(B_R^m) = 2 \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{R^m}{m}$

Pozn: $L(\Theta) = \sin^{m-2} \theta_1 \dots \sin \theta_{m-2} d\theta_1 \dots d\theta_{m-2} d\theta_{m-1}$ rozložením plošný azimutální element.

P2) Plocha objemu koule spočteme pomocí sféry

$$B^m \quad S^{m-1} = \partial B^m \subseteq \{x = (x^1, \dots, x^m) \mid \sum_{i=1}^m (x^i)^2 = 1\}$$

$$\pi^{m/2} = \int_{x \in \mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx = \int_0^{+\infty} \int_{\Theta} r^{m-1} e^{-r^2} L(\Theta) dr = \int_0^{+\infty} r^{m-1} e^{-r^2} \int_{\Theta} L(\Theta) dr = \int_0^{+\infty} r^{m-1} e^{-r^2} dr \cdot \text{obsah}(S_{R=1}^{m-1})$$

Co je $\int_0^{+\infty} r^{m-1} e^{-r^2} dr \rightarrow \Gamma_{\frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$

● 2 zvl. substituce pro Γ fc: $x = t^2 \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2t-2} 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{t}^2} \tilde{t}^{\frac{m-1}{2}-1} d\tilde{t}$

odtud $\text{obsah}(S_{R=1}^{m-1}) = \frac{\pi^{m/2}}{\int_0^{+\infty} r^{m-1} e^{-r^2} dr} = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$

Lemma 3.31

Obsah sféry $S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$ je roven $\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$

Důk: nřpočet nřže

P1) 1) $\text{Obsah}(S^0) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi}}{1 \cdot \sqrt{\pi}} = 2$ $S^0 = \{x = x^1, (x^1)^2 = 1\} = \{+1, -1\}$ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)_m \sqrt{\pi}$

$m-1=0$

● 2) $\text{Obsah}(S^1) = \frac{2\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2})} = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi$

$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

3) $\text{Obsah}(S^2) =$

$$= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(1+\frac{1}{2})} = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\frac{1}{2}} = 4\pi$$

4) $\text{Obsah}(S^3) = \frac{2\pi^{\frac{4}{2}}}{\Gamma(\frac{4}{2})} = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi^2}{(2-1)!} = 2\pi^2$

izomorfizmus grup ~~SU~~ SU2

Označím:

$$K_m = \text{Obsah}(S^{m-1})$$

3 Věty

Definice 3.14

$f: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{do}} \mathbb{C}$ možná reálná, pokud $\exists g: \mathbb{R}_0^+ \xrightarrow{\text{def. obs}} \mathbb{C}$, že $\forall x \in \text{Dom}(f) (= D_f)$ je $f(x) = g(|x|)$, kde $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2}$ je eukleidovská norma. (sifologie $\rightarrow$ mo $\rightarrow$ z $\hookrightarrow$ prostí)

Věta 332. Necht $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ je reálná, $f(x) = R(|x|)$

$R \in C^2(0, \infty)$, $\exists \Delta f$ skoro všude a $\Delta f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ ať ne množinu míry 0.

Necht $\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{n-1} R'(\varepsilon) =: A \in \mathbb{C}$ (tj. reálné limity). Pak $\Delta T_f = T_{\Delta f} + A \delta$ (ne $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)

(Laplaceova regulární distribuce vyčíslená na f je rovnom. distribuce vyčíslená na lepl. f a obsahuje $n-1$ dim. sféru $\delta \cdot A$)

Dk: 1. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): (\Delta T_f)(\varphi) = T_f((-1)^{2+2+\dots+2} \Delta \varphi) = T_f(\Delta \varphi)$

↑
derivace distribuce T_f

$$3. (\Delta T_f)(\varphi) = T_f(\Delta \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \Delta \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} =$$

↑
vpl. (1)

$x \in \mathbb{R}^n$

↑
dle Laplace
dostát Δf

teorie míry

(konvergence podle integrálního
obrazu)

(2 sféry o poloměrech $\varepsilon \in \mathbb{R}$)

- "mřížka"

$$B_{\varepsilon, R} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < |x| < R\}, \varepsilon < R$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{B_{\varepsilon, R}} f \Delta \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \left[\int_{B_{\varepsilon, R}} (\Delta f) \varphi d\lambda_{\mathbb{R}^n} + \right.$$

2. Greenova
formule

$$+ \int_{\partial B_{\varepsilon, R}} (f \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} f, N) \text{vol}_{\partial B_{\varepsilon, R}} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \Delta f d\lambda_{\mathbb{R}^n} + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ S_{\varepsilon}^{n-1}}} \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g(f \text{grad} \varphi -$$

$$- \varphi \text{grad} f, N) \text{vol}_{S_{\varepsilon}^{n-1}} + \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ S_R^{n-1}}} \int_{S_R^{n-1}} g(f \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} f, N) \text{vol}_{S_R^{n-1}}$$

Odhady integrálu: $\nabla \varphi = \text{grad} \varphi$

$$1. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g(\varphi \text{grad} f, N) \text{vol}_{S_{\varepsilon}^{n-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g((\varphi - \varphi(0)) \nabla f, N) + \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g(\varphi(0) \nabla f, N) \right] \text{vol}_{S_{\varepsilon}^{n-1}}$$

$$\cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g(\varphi - \varphi(0)) \nabla f, N) \varepsilon^{n-1} L(\Theta) + \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g(\varphi(0) \nabla f, N) \varepsilon^{n-1} L(\Theta) \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g((\varphi - \varphi(0)) R' N, N) \cdot \right.$$

$$\cdot \varepsilon^{n-1} L(\Theta) + \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} g(\varphi(0) R' N, N) \varepsilon^{n-1} L(\Theta) \Big\} =$$

↑
gradient na sféře
(normální vektor N a
derivace v bodě)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{(\varphi - \varphi(0))}_{\in \mathcal{S}} \underbrace{R' g(N, N)}_1 \varepsilon^{n-1} L(\Theta) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_{\varepsilon}^{n-1}} \varphi(0) R' g(N, N) \varepsilon^{n-1} L(\Theta) = \right.$$

↑
integrátorem } v této omezené limitě a leb. integrálu

$$= \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varphi - \varphi(0)) R' \varepsilon^{n-1} L(\Theta) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \varphi(0) R' g(N, N) \varepsilon^{n-1} L(\Theta) =$$

$\varphi(x \in S_\varepsilon^{m-1}) \quad \varphi \in \mathcal{G}(R^m) \Rightarrow \text{spojit' } \vee 0$
 $= \int 0 R' L(\Theta) \varepsilon^{m-1} + \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(0) R' \varepsilon^{m-1} \int L(\Theta) = 0 + \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(0) R' \varepsilon^{m-1} d\mathcal{H}_m = A \delta_\varphi \mathcal{H}_m = A \mathcal{H}_m(\delta\varphi)$
 $S_\varepsilon^{m-1} \uparrow \text{jednotlivé efektiv}$ $\delta\varphi = \varphi(0) \vee$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\varepsilon^{m-1}} g(f \nabla \varphi, N) \text{vol } S_\varepsilon^{m-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\varepsilon^{m-1}} g(f \Delta \varphi, N) \varepsilon^{m-1} L(\Theta) = \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g(R(\frac{\varepsilon}{2}) \nabla \varphi, N) \varepsilon^{m-1} L(\Theta) =$
 $\uparrow$ podobný jako $n/2$

$= \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R(\varepsilon) g(\nabla \varphi, N) \varepsilon^{m-1} L(\Theta)$
 S_ε^{m-1}

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-m}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{R'(\varepsilon)}{(1-m)\varepsilon^{-m}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(R'(\varepsilon) \varepsilon^{m-1}) \varepsilon}{(1-m)} = \frac{A}{1-m} \lim \varepsilon =$

$= \frac{A}{1-m} 0 = 0 \quad m \neq 1$

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R^{m-1}} g(f \nabla \varphi - \varphi \nabla f, N) \text{vol } S_R^{m-1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R^{m-1}} g(\underbrace{f \nabla \varphi}_{\in \mathcal{G}} - \underbrace{\varphi \nabla f}_{\in \mathcal{G}}) R^{m-1} L(\Theta) =$

$= \int \lim_{R \rightarrow +\infty} g(f \nabla \varphi - \varphi \nabla f, N) R^{m-1} L(\Theta) \dots \text{ydílím } R^m \rightarrow \frac{\dots}{R} \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\|\varphi\|_{L^{m+1}} - \|\varphi\|_{L^{m,0}}}{R}$
 ≤ 0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

Mimule:

$$\Delta T_f = T_{Af} + KAS, \text{ kde } A = \lim_{R \rightarrow 0^+} (\epsilon^{n-1} R'(\epsilon))$$

DL: 1. definice derivace distribuce

2. Greenova formula

3. Odhady 4. integraly a 3. d. muly

Pij $i=1, \dots, m \quad \forall x \neq 0$ provedime vyraz $\partial_i |x|^{2-m} = \partial_i \left[\sum_{j=1}^m (x_j)^2 \right]^{\frac{2-m}{2}} = \left(1 - \frac{m}{2}\right) 2x_i \left[\sum_{j=1}^m (x_j)^2 \right]^{-\frac{m}{2}} =$

$$= (2-m)x_i \left[\sum_{j=1}^m (x_j)^2 \right]^{-\frac{m}{2}}$$

$$\partial_i^2 |x|^{2-m} = \partial_i \left[(2-m)x_i \left(\sum_{j=1}^m (x_j)^2 \right)^{-\frac{m}{2}} \right] = (2-m) \left[\left(\sum_{j=1}^m (x_j)^2 \right)^{-\frac{m}{2}} + x_i \left(\sum_{j=1}^m (x_j)^2 \right)^{-\frac{m}{2}-1} \left(-\frac{m}{2} \right) 2x_i \right] =$$

$$= (2-m) \left[|x|^{-m} - m x_i^2 |x|^{-m-2} \right]$$

$$\Delta |x|^{2-m} = \left(\sum_{i=1}^m \partial_i^2 \right) |x|^{2-m} = (2-m) \left[m |x|^{-m} - m |x|^{-m-2} \sum_{i=1}^m x_i^2 \right] = 0$$

3) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ spocteme $(\Delta T_{\frac{1}{2}|x|}) \varphi \stackrel{\text{def. der.}}{=} T_{\frac{1}{2}|x|} (\Delta \varphi) \stackrel{\text{def. reg. dist.}}{=} \int \frac{1}{2} |x| \Delta \varphi dx \stackrel{\text{E.L. int.}}{=} (*)$

dist. $D^\alpha T_\varphi = T D^\alpha \varphi (-1)^{|\alpha|} \quad x \in \mathbb{R}$

konvergenca
podle int. oboru

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{M_n} = \int_{\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n} \quad M_n \subseteq M_{n+1} \text{ nebo } M_{n+1} \subseteq M_n$$

$$(*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(-\infty, -\epsilon) \cup (\epsilon, +\infty)} \frac{1}{2} |x| \partial_x^2 \varphi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{2} |x| \partial_x \varphi \right) \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{-\infty} \frac{1}{2} \partial_x |x| \partial_x \varphi(x) dx \right] = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(-\infty, -\epsilon) \cup (\epsilon, +\infty)} \varphi(x) \partial_x^2 |x| dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[- \int_{-\infty}^{-\epsilon} \partial_x \varphi(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \partial_x \varphi(x) dx \right] \stackrel{\text{pro } -\infty \rightarrow 0 \varphi \in \mathcal{S}}{=} -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[-[(\varphi)(-\epsilon) - (\varphi)(-\infty)] + [\varphi(+\infty) - \varphi(\epsilon)] \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(-\epsilon) + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\epsilon) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\varphi(-\epsilon) + \varphi(\epsilon)] \stackrel{\varphi \text{ spoj}}{=} (\varphi(0) + \varphi(0)) \frac{1}{2} = \varphi(0) = \delta \varphi$$

Pozn: Je-li vzorec pro potencial (mapi. grav. pole) $\Delta \varphi = \delta \Rightarrow$ v dimenzi $n=1 \quad \varphi = \frac{1}{2} |x|$

$$T_\varphi \psi = \int \frac{1}{2} |x| \psi = \int \frac{1}{2} \varphi(x) \psi(x) dx$$

$$n=3 \quad \varphi(x) = C |x|^{2-3} =$$

$$= C |x|^{-1} \text{ resp. } \Delta \text{ - res } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$C$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Věta 3.33

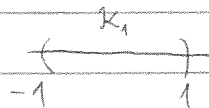
Distribuce T_f je fundamentálním řešením Laplaceovy rovnice pro:

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{2}|x|, m=1 \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x|, m=2, x_0=0 \text{ libovolný císle} \\ \frac{1}{K_m(m-2)|x|^{m-2}}, m>2, x \neq 0, \text{ pro } x_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \text{ } f(x_0) \text{ lib. císle} \end{cases}$$

1k: Idea: aplikace síťového řešení (V...)

1, $m=1$ viz výše (v p1.). Vezmeme ale takto funkci: $R(r) = f(|x|) = \frac{1}{2}r$
 $R'(r) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-1} \frac{1}{2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Delta T \frac{1}{2}|x| = \underbrace{T \Delta \frac{1}{2}|x|}_{0 \text{ s.v.}} + K_1 \frac{1}{2} \delta = 0 + 2 \frac{1}{2} \delta = \delta$$



2, $m>2$

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\varepsilon^{m-1} \left(\frac{1}{K_m(m-2)\varepsilon^{m-2}} \right) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon^{m-1}}{K_m(m-2)} \varepsilon^{1-m} (2^m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1)}{K_m} = -\frac{1}{K_m}$$

$R(\varepsilon) \text{ pro } \varepsilon^{2-m}$
 $R = -f$

Takže (V32): $\Delta T_f = T \Delta f + K_m A \delta$ pro $f = -\frac{1}{K_m(m-2)|x|^{m-2}}$ myslí $\Delta T_f = T_0 + K_m \frac{1}{K_m} \delta = \delta$
 viz p1. výše

3, $m=2$

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\varepsilon^{2-1} \frac{1}{2\pi} (\ln \varepsilon)' \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Delta T_f = T \Delta f + K_2 A \delta = T_0 + 2\pi \frac{1}{2\pi} \delta = 1 \cdot \delta = \delta$$

$$\Delta \ln|x| = 0, x \neq 0$$

$K_2 = 2\pi$ obsah 1D sféry v $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ obsah kruhu



$K_m =$ obsah $m-1$ -rozměrné sféry v $\mathbb{R}^m$

Pozn: Na začátku hodiny mělo být $\Delta T_f = T \Delta f + K_m A \delta$, kde $A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\varepsilon^{m-1} R'(\varepsilon)]$

3, $m=2$ $\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$ rostoucí

$m=3$ $\varphi = \frac{1}{(3-2)K_3} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $K_3 = \text{obsah}(S^2) = 4\pi$

3. Tě výše jsou jedinými fundamentálními řešeními $\Delta T = \delta$ (= no smyslu rovnosti teplotových distribucí $\equiv$ na $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$)

Wnio to, pólud pldpóludwne, $\tilde{T}$ j regularny.

Existence (V33 zelszónu na szlannu wozuóku)

Jednoznaczność: Niech $\Delta T_1 = \delta$ a $\Delta T_2 = \delta \Rightarrow \bar{F} \Delta T_1 = \bar{F} \delta \Rightarrow 4\pi^2 |\xi|^2 (\bar{F} T_1) = 1$
 $\bar{F} \Delta T_2 = \bar{F} \delta \Rightarrow 4\pi^2 |\xi|^2 (\bar{F} T_2) = 1$

$$\bar{F} T_1 = \bar{F} T_2 / \bar{F}^{-1}$$

$T_1 = T_2$, pólud wlm, $\tilde{T}$ j bljélee i me $L_{1,loc}$, co $\tilde{T}$ j pólud $\mu_0 m > 1$

$$m=1 \quad \frac{1}{4\pi|\xi|^2} \quad m>2 \quad \frac{r^{m-1}}{r^2} = r^{m-3} \quad \int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{1}{4\pi|\xi|^2} d\xi = +\infty$$

$m=2$ jímé, dólenné móléti.

3.2 Rozmice redem' tople

Definicja 3.18

$Q = \partial_t - \Delta$ mólenné tópelny operator (heat operator)

Pozn:

$$1) \sigma(Q)(\xi) f = (0\xi_0^2 - 1\xi_1^2 - 1\xi_2^2 - \dots - 1\xi_m^2) f = (-\xi_1^2 - \dots - \xi_m^2) f \quad \tilde{\xi} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2, \xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix} \text{ nemi nedegezerowane bilinearne forme}$$

$$\sigma(Q)(\xi) f = 0 f$$

2, ≥ 1 , pólenné, $\tilde{Q}$ nemi eliptyczny

$$3) \tilde{Q} = -(\partial_t^2 + \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_m}^2) + \partial_t \quad \sigma(\tilde{Q})(\xi) f = -(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2) f$$



Mimuli: $\partial_t - \Delta = Q$ tepelný operátor. Nemá eliptický (toho lze nazvat parabolický) $= Q(Q)$ je semidefinitní a není definitní

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \boxed{1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Věta 3.3.4

$g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je $t > 0$, $u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$ je řešením parabolického Weyla:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = g(x)$$

Dk: 1) F.t. $\hat{u}_t - F \Delta u = 0 \quad (F_x = F)$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{u} = \hat{g} \quad \hat{u}_t - (2\pi i \xi)^2 \hat{u} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{u} = \hat{g}, \text{ kde } (Fg)(t, \xi_1, \dots, \xi_n) = \int g(t, x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i \langle (x_1, \dots, x_n), (\xi_1, \dots, \xi_n) \rangle} dx_1 \dots dx_n$$

$$\hat{u}_t + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0 \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = |\xi|^2$$

To je ODR 1. řádu v proměnné t . Charakteristická rovnice $\lambda + 4\pi^2 |\xi|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -4\pi^2 |\xi|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{u} = C_\xi e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (\exists C_\xi \in \mathbb{C})$$

$$\text{Navíc můžeme psát } \hat{u} = \hat{g} \quad (\text{v limitu}) \quad \hat{g} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{u} = \lim_{t \rightarrow 0^+} C_\xi \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} = C_\xi \cdot 1$$

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$$

$$u = F^{-1}(\hat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}), t > 0 \quad F(TS) = FT * FS$$

$$= (F^{-1} \hat{g})(x) * F^{-1}(e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t})(x) = g * F^{-1}(e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t})(x) =$$

Připomenutí: $F(e^{-i(Ax, x)})(y) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} e^{-\pi^2 (A^{-1}y, y)}$

$$= g * F(e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t})(-x) = (e^{-2\pi i \langle -x, \xi \rangle}) = (e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}) \quad \forall x$$

$$= g * \sqrt{\frac{\pi^n}{(4\pi^2 t)^n}} e^{-[\pi^2 (\frac{-x}{4\pi^2 t}, -x)]}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{mopřímý} & \text{přímý} \end{matrix}$$

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$$(\xi, \xi) = \xi^T I \xi$$

$$\uparrow \\ M(n \times n)(\mathbb{R})$$

$$\frac{x}{4\pi^2 t} = \left(\frac{x_1}{4\pi^2 t}, \frac{x_2}{4\pi^2 t}, \dots \right)$$

$$= g * \sqrt{\frac{1}{(4\pi t)^n}} e^{-\frac{1}{4t} (x, x)} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int g(y) e^{-\frac{1}{4t} |x-y|^2} dy$$

2. myslí: $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Tož: v obzorech: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{u}(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\hat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \right) = \hat{g}(\xi) \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} =$

$$\hat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} = \hat{g}(\xi)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\mathcal{F}^{-1} \hat{u})(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{F}^{-1} \hat{g} = g$$

Poznámka: Okeřoval uložku na cvičení: $\partial_t u - \Delta u = 0$

$$u(t, 0) = g(t)$$

udržuji teplotu $g(t)$

$$\partial_t u(t, 0) = g(t) \quad \text{Neumann}$$

Nepřesněji $n-1$ ($x \in \mathbb{R}$)

3 při počáteční uložce spočteme konvoluci, poč. podm. g (v prom. $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\sqrt{\frac{1}{(4\pi t)^n}} e^{-\frac{1}{4t}(x, x)}$$

Definice 3.19

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{(4\pi t)^n}} e^{-\frac{1}{4t}(x, x)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ nazýváme tepelným jádrem.}$$

Lemma 3.35

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t, x) = \delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ kde } (\delta \varphi)(x_1, \dots, x_n) = \varphi(0, x_1, \dots, x_n)$$

Dk: Vlnna $g(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x) * \Phi(t, x) = g(x) * \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t, x)$

$$g = g * \delta \quad (T_g = T_g * \delta)$$

$$g * \delta = g * \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t, x) \Rightarrow g * (\delta - \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t, x)) = 0 \quad \forall g$$

$$\Rightarrow \delta - \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t, x) = 0 \quad (= T_0), \text{ neboť } (g, *) \text{ nemá dělitele nulý}$$

Pozn: $(\Delta, 0, 1, +, \cdot, \mathbb{K})$ nemá dělitele nulý: $\stackrel{\text{def}}{=} \text{pokud } ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

2) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ nemají dělitele nulý.

$$\bullet rs=0 \Rightarrow r=0 \vee s=0 \quad \forall \mathbb{R}$$

$$\bullet zw=0 \Rightarrow \underset{0''}{|zw|} = |z||w| \Rightarrow \underset{|w|=0}{|z|=0} \Rightarrow z=0 \wedge w=0$$

$$\bullet \mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_i \in \mathbb{R}, i=0, \dots, 3\} \quad \text{kvaterniony}$$

$$\cong \{(a_1, \dots, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

$$i^2 = -1 = j^2 = k^2$$

$$\begin{matrix} k & \rightarrow & i \\ & \searrow & \nearrow \\ & j & \end{matrix}$$

$$ki=j, ij=k, jk=i$$

neopel... minimální znaménka

$$ik=-j, ji=-k, kj=-i$$

distributivní zákon

$$(1+i)(1+k) = 1 + 1k + i1 + ik = 1 + k + i - j$$

• $\mathbb{C}$ má dělitelský množ: $\mathbb{Z}_6$ $2 \cdot 3 \bmod 6 = 0$ zhytel při dělení 6
 $6 \bmod 6 = 0$

• $M(n, \mathbb{R})$ má dělitelský množ

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

• konvulzivní algebry $(\mathcal{F}, *)$ nemá dělitelský množ $T * S = 0 / \mathcal{F}$

$$FTFS = 0 \quad / \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

$$FT[(FS)\varphi] = 0 \quad \Rightarrow \quad FT = 0 \text{ nebo } (FS)(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \quad FS = 0$$

$\uparrow$ evaluuju na φ

$$T * S = T_j \text{ trans } \delta_{-1} \underset{x}{S} = 0 \quad / \quad \varphi(x+y)$$

$$= T_j \text{ trans } \delta_{-1} \varphi = 0 \quad \text{D. cv.}$$

Úvaha 3.36

Je-li A algebrou 1 (jedinotou) bez dělitelského množ, je tato jednota jednod.

Dk:

$$a1' = a, a1 = a \quad / \quad \ominus$$

$$a1' - a1 = a - a$$

$$a1' - a1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee (1' - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1'$$

$$\hookrightarrow \text{vezmu jím } a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1' \quad \text{přít } \forall a \in A. \quad \square$$

Pozn: Měli jsme tedy ~~zřejmě~~ $\lim \Phi * g = \delta * g \Rightarrow \lim \Phi = \delta$ už i v dk. T3.36.

$\partial_t u - \Delta u = g$ je tzv. nehomogenní problém.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \delta$$



● tepelné jádro $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}} = \Phi(t, x)$

Definice 3.20

Počáteční okrajovou úlohou nazýváme $\partial_t u - \Delta u = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$, $u(0, t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}^+$

Pozn: 1. vedení tepla na polopřímce

2. $u \dots T$

$u \dots$ odpor vůči změně tepla (odolnost / ~~odolnost~~)

u není tepla, ale spíše δQ , kde δQ je diferenciální 1-forma, která není exaktní, tj. $\nexists f, \delta Q = df$

● $\left(\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \text{ není exaktní } \int \omega = df - 0 \quad \begin{matrix} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{matrix} \right)$

$dS = \frac{\delta Q}{T}$ je exaktní $\delta Q = \dots dp \pm \dots dV$, $\mathbb{R}^2[p, V]$

3. interpretace počáteční okrajové úlohy v 0 není vlním teplem

Věta 3.34

Funkce $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) g(y) dy$ řeší počáteční okrajovou úlohu.

Dk: $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(x), & x < 0 \end{cases}$ Pak $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) g(y) dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) \tilde{g}(y) dy$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \tilde{g}(y) dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \tilde{g}(-y) dy \right) =$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \tilde{g}(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \tilde{g}(y) dy \right) = \frac{1}{2} (\Phi * \tilde{g} + \Phi * \tilde{g})(t, x) = \Phi * \tilde{g}$

lidský v prom. y lidský
svoboda

Tj. 1. $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \tilde{g}(x)$ vlním vlním a počáteční úloze pro tepla

2. dosadíme nulu $x=0$

$u(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{y^2}{4t}} - e^{-\frac{y^2}{4t}} \right) g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} 0 dy = 0$ okrajová podmínka je splněna

● Pozn: Někdy úlohu můžeme rozšířit s Dirichletovými daty (s Dir. okraj. podm., s okraj. podmínkami pro u)

Definice 3.21

Počátečně-ohrajená úloha pro vtok se rozpadá na úlohu: $\partial_t u - \Delta u = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = g(x)$

$$(\partial_x u)(0, t) = u_x(0, t) = 0.$$

Věta 3.38

Funkce $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) g(y) dy$ řeší poč.-ohrajenou úlohu pro vtok.

$$\begin{aligned} \text{Dk: } \tilde{g}(y) &= \begin{cases} g(y), & y \geq 0 \\ g(-y), & y < 0 \end{cases} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) g(y) dy &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right)}_{\text{sudá v } y} \underbrace{\tilde{g}(y)}_{\text{sudá}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\Phi * \tilde{g})(t, x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\frac{(x-y')^2}{4t}}}_{\substack{\uparrow \\ y' = -y}} \tilde{g}(-y') dy' \right] = \frac{1}{2} \left[\Phi * \tilde{g} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y')^2}{4t}} \tilde{g}(y') dy' \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\Phi * \tilde{g} + \Phi * \tilde{g}) = \Phi * \tilde{g}$$

$$\downarrow (\Phi * \tilde{g})(t, x) \rightarrow \tilde{g}(x), t \rightarrow 0^+$$

$$g(x), x \geq 0$$

$$3. \partial_x u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2(x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - 2(x+y)e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}) g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$$

Pozn: Někdy poč.-ohraj. úlohu pro vtok nahradíme počáteční-ohrajenou pro Neumannova data (poč.-ohraj. Neumannova, s Neumannovým druhým daty)

$$\partial R_0^+ = \{0\}$$

Věta 3.39 Duhamelinův [d'Amelův] princip

Funkce $u(t, x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{s=0}^{+\infty} \Phi(t-s, x-y) f(y, s) ds dy$ řeší nehomogenní rovnici vedení tepla, s prvním

skokem f.

Dk: nebudu

$$\begin{aligned} \text{Pozn: } \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{s=0}^t \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}}_{\text{„kernel“ v } s} f(y, s) ds dy &\text{ řeší } (\partial_t - \Delta)u = f, u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \\ &\quad \text{konv. } y \end{aligned}$$

Existují modifikace: kombinace ohrajených podmínek.

3.3 Vlnová rovnice

● Pozn: Maxwellovy rovnice pro vakuum: $d \star F = 0$
 $dF = 0$

* ... Hodnota hrůdi

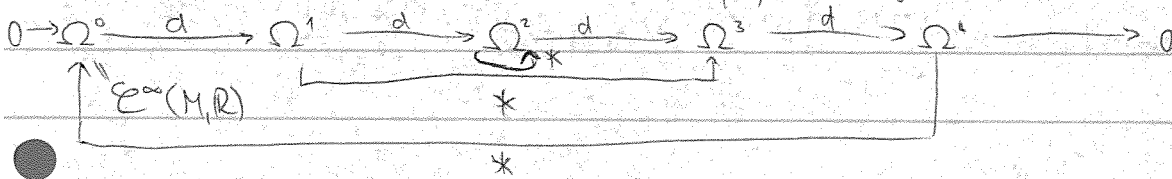
F spočtu z E a B

D a H to jsou f e, je z nich vytvořím 1-formu A , $df \rightarrow$ 2-formu F

a pak řešíme diferenciální rovnice $d \star F = 0$, $dF = 0$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_{[\mu} A_{\nu]} \quad * \text{ pro minke} = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$$

$\Delta \star d + d \star d \star$ neformálně: $(\Delta_{E^\infty(M, \mathbb{R})} f) = \text{div}(\text{grad } f) = \Delta f$



$$d \star F = 0, dF = 0$$

$$*d \star dF + d \star d \star F = 0 \quad \Delta_{\text{minke}} F = 0 \quad \square F = 0$$

$$\Delta_{\text{minke}} \text{ v } \mathbb{R}^{1,3} \text{ značíme } \square. \quad \square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_x^2 - \partial_{x^1}^2 - \partial_{x^2}^2 - \partial_{x^3}^2$$

Spc. ... Maxwellova t. $\rightarrow$ generující F splňující vlnovou rel.

Věta 3.40

Nechť $f, g \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Pak distribuce $u = f \star \partial_t W_t + g \star W_t$ řeší vlnovou rovnici $u_{tt} - \Delta u = 0$ s poč. podm. $u(0, x) = f(x)$, $\partial_t u(0, x) = g(x)$, kde $W_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} e^{2\pi i(x, \xi)t} d\xi$ a konvoluce se počítá v prostoru.

● Důk.

Idea: F je bijekce. $u_{tt} - \Delta u = 0 \quad / \quad \hat{F}_x \quad \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$$\hat{u}_{tt} - \hat{F}_x \Delta u = 0$$

$$\hat{u}_{tt} - (-2\pi i \xi)^{(2, \dots, 2)} \hat{F}_x u = 0, \text{ kde } \hat{u} = \hat{F}_x u$$

$$\hat{u}_{tt} + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0 \quad \rightarrow \text{ Toto je ODR 2. řádu, charakteristická rel. :}$$

$$[\xi^{(2, \dots, 2)} = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2] \quad \lambda^2 + 4\pi^2 |\xi|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2\pi i |\xi| \quad \text{Fs: } \{e^{2\pi i |\xi| t}, e^{-2\pi i |\xi| t}\}$$

$$\hat{u}(\xi, t) = A_\xi e^{2\pi i |\xi| t} + B_\xi e^{-2\pi i |\xi| t} = \alpha_\xi \sin(2\pi |\xi| t) + \beta_\xi \cos(2\pi |\xi| t)$$

$$\alpha_\xi, \beta_\xi, A_\xi, B_\xi \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}^n$$

Four. vlnová rel.

● Four. podm. $\hat{u}(0, -) = \hat{f}$

$$\partial_t \hat{u}(0, -) = \hat{g}$$

Wahs aber $\hat{u}(0, -) = \alpha_{\xi} \sin(0) + \beta_{\xi} \cos(0) = \beta_{\xi} = \hat{f}$

Uobersich: $\partial_t \hat{u}(0, -) = (2\pi|\xi| \alpha_{\xi} \cos(2\pi|\xi|t) - 2\pi|\xi| \sin(2\pi|\xi|t) \cdot \beta_{\xi})|_{t=0} = 2\pi|\xi| \alpha_{\xi}$

$$\hat{g} = 2\pi|\xi| \alpha_{\xi} \Rightarrow \alpha_{\xi} = \frac{\hat{g}}{2\pi|\xi|}$$

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{\hat{g}}{2\pi|\xi|} \sin(2\pi|\xi|t) + \hat{f} \cos(2\pi|\xi|t)$$

$$F^{-1} \hat{u} = F^{-1}(\dots) = F^{-1}(\hat{g}) * F^{-1}\left(\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right) + F^{-1}(\hat{f}) * F^{-1}(\cos 2\pi|\xi|t)$$

$$F^{-1}(fg) = F^{-1}(f) * F^{-1}(g)$$

$$g * W_t + f * \partial_t W_t, \text{ wobei } W_t = \int \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} e^{2\pi i(\xi, x)} d\xi = F^{-1}\left(\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}\right)$$

• Minimální: $W_t(x) = F^{-1}\left(\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}\right), t \in \mathbb{R}$

Definice 3.22

$$W_t(x) = \begin{cases} F^{-1}\left(\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}\right)(x), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \text{ nazýváme vlnovým jádrem}$$

Lemma 3.41 (Duhamelův princip II.)

Funce $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} W_{t-s}(x-y) f(y,s) dy ds$ řeší nehomogenní vlnovou rovnici $\square u = f$ s počátečními

podmínkami $u(t,x) \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+$.

• Dk: metoda

□

Pozn: Chceme explicitní vzorec pro $F^{-1}\left(\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}\right), t \geq 0$ neb $u = f * W_t + \partial_t W * g$

Tyto vzory se však v různých dimenzích liší (co do formy)

Lemma 3.42 vzorečky

$$F\delta_a = e^{-2\pi i(a,\xi)} = (T_\xi \mapsto e^{-2\pi i(a,\xi)})$$

$$F^{-1}\delta_a = e^{2\pi i(a,\xi)} = (T_\xi \mapsto e^{2\pi i(a,\xi)})$$

Dk: 1. $(F\delta_a)(\varphi) = \delta_a F\varphi = \delta_a \left(\int \varphi(\xi) e^{-2\pi i(x,\xi)} d\xi \right) = \int \varphi(\xi) e^{-2\pi i(a,\xi)} d\xi = T_a \mapsto e^{-2\pi i(a,a)} \varphi$

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$

2. $(F^{-1}\delta_a)(\varphi) = \int \varphi(\xi) e^{2\pi i(a,\xi)} d\xi = T_a \mapsto e^{2\pi i(a,a)} \varphi$

□

Pozn: $F\delta = F\delta_0 = e^{-2\pi i(0,\xi)} = e^0 = 1 = (T_1)$

$$F^{-1}\delta = T_1 = e^0 = 1$$

$$F\delta_{-a} = e^{2\pi i(a,\xi)} \text{ — důsledek 142}$$

$$F^{-1}\delta_a = e^{-2\pi i(a,\xi)} \quad /$$

$$F^{-1} e^{2\pi i(a,\xi)} = \delta_a$$

$$F e^{-2\pi i(a,\xi)} = \delta_{-a}$$

$$F \circ F^{-1} = Id = F^{-1} \circ F, \mathcal{S}(\mathcal{S}')$$

$$(F \circ F^{-1})(T) \in \mathcal{S}'$$

$$(F \circ F^{-1})(T)\varphi = [F(F^{-1}(T))]\varphi = (F^{-1}T)F\varphi = TF^{-1}F\varphi = T\varphi$$

$$F \circ F^{-1}(T) = T \quad \forall T$$

$$P_1 \quad \sin(2\pi(\xi, a)) = \frac{1}{2i} (\delta_a - \delta_{-a})$$

Lemme 3.4.2

$$\forall a \in \mathbb{R}^n: \int e^{-2\pi i(a, \rho)} d\rho = \delta_a \quad (\delta_a \varphi = \varphi(a), a \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

Dk:

$$\int e^{-2\pi i(a, \rho)} \varphi(\rho) d\rho = (\delta_a \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a)$$

$$(\hat{F}\varphi)(a)$$

$$\delta_a(\hat{F}\varphi) \Rightarrow \delta_a F = \bar{\delta}_a$$



Úpout:

$\frac{F^{-1}(\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|})}{2\pi|\xi|}$ v dimenzi $n=3$. Vzájemně transformovat radially symetrické funkce, oddělováme v dimenzi 3.

$$\hat{z} \| x, \hat{x}, \hat{y} \text{ lib. a taková máme } \hat{z}, \hat{x} \perp \hat{y}$$

$$\int_{\xi \in \mathbb{R}^3} \left(\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|} \right) e^{2\pi i(x, \xi)} d^3\xi = \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} \frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|} e^{2\pi i|x||\xi|\cos\theta} d^3\xi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin 2\pi\rho t}{2\pi\rho} \right) e^{2\pi i\rho x \cos\theta} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi\rho t}{2\pi\rho} \rho^2 e^{-2\pi i\rho|x|\mu} d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi\rho t}{2\pi\rho} \rho^2 \left[\frac{e^{-2\pi i\rho|x|} - e^{2\pi i\rho|x|}}{-2\pi i|x|} \right] d\rho = -\frac{1}{|x|} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi\rho t}{2\pi\rho} \rho^2 [e^{-2\pi i\rho|x|} - e^{2\pi i\rho|x|}] d\rho$$

$$= -\frac{1}{2i|x|\pi} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i\rho t} - e^{-2\pi i\rho t}}{2i} [e^{-2\pi i\rho|x|} - e^{2\pi i\rho|x|}] d\rho = \frac{1}{4|x|\pi} \int_0^{+\infty} e^{2\pi i\rho(t-|x|)} - e^{-2\pi i\rho(t+|x|)} d\rho$$

$$= \frac{1}{4|x|\pi} (\delta_{-(t-|x|)} - \delta_{-(t+|x|)} + \delta_{t-|x|} - \delta_{t+|x|}) = (*)$$

ty páry δ tím prvním dvěma komponentami

Bud' $\varphi(t, x, y, z) \in \mathcal{S}$. Při řešení vlnové rovnice uvažujeme jen funkce s maticem v odpovídající kuželi ($t \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

Exaktní definice: $(\delta_{t-|x|}\varphi) := \int \varphi(x) dS$

$$S_t(x_0), \text{ kde } S_t(x_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = t^2\}$$

$$(*) = \frac{1}{4|x|\pi} (\delta_{-(t-|x|)} - \delta_{-(t+|x|)} + \delta_{t-|x|} - \delta_{t+|x|}) = \frac{1}{4|x|\pi} \left(\int_{S_t(x)} \varphi(\tilde{x}) dS - \int_{S_{-t}(|x|)} \varphi(\tilde{x}) dS + \int_{S_t(x)} \varphi(\tilde{x}) dS - \int_{S_{-t}(|x|)} \varphi(\tilde{x}) dS \right) =$$

$$\frac{1}{4\pi|x|} \cdot 2 \int_{S_t(x)} \varphi(\tilde{x}) dS = \frac{1}{2\pi|x|} \int_{S_t(x)} \varphi(\tilde{x}) dS$$
 vyjde nám řešení pro zápornou sféru
 ↪ neplatí řešení

Lemma 3.44

$$\forall t > 0 \text{ je } W_t \varphi = \int_{x \in S_t(|\tilde{x}|)} \frac{1}{4|\tilde{x}|\pi} \varphi(x) dS \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \text{ a } \text{supp } \varphi \cap \{t^2 \geq x^2 + y^2 + z^2\}$$

Dk: viz výpočet výše. ▣

Věta 3.45

Funkce $u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} f dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} g dS \right)$ je fundamentálním řešením počáteční

podmínky pro vlnovou rovnici:

Dk: $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta_t - |\tilde{x}|}{4\pi|\tilde{x}|} * g(x - \tilde{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\tilde{x}} \delta_t - |\tilde{x}| * f(x - \tilde{x}) dS \right)$. Z výpočtu výše a $n=3$.

$$u(x, t) = f * W_t + \partial_t W * g$$
▣

