Matematika pro fyziky II.

20.2 2016

Osnova: 1 Stoltesova věta (abstraktní Stoltesova míra) a metrické struktury
2 Fourierovy řady a úvod do Hilbertových prostorů
3 Základy analýzy v komplexním oboru
(4 Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R}^n)$)

Literatura: Kopáček, J., Matematika pro fyziky IV. (+ Příklady)
Krump, L., Souček, V., Těšínský: Úvod do analýzy na varietách
Kowalski, O. Integrace dif. forem na varietách

1. Abstraktní Stoltesova míra & metrické struktury

Jde o zobecnění ZVA (Newton-Leibnizův vzorec), tj.

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),\ f \text{ spojitá } \langle a,b\rangle = [a,b]$$

Pozn. $F(a)$ se nedefinuje jako $\int_c^a f(\xi)\,d\xi$, ale jako hodnota nějaké G, že $G' = f$ (modulo konst.)

Definujme $\partial[a,b] = b - a$ formální rozdíl, tj. $\partial[3,4] = 7 - 3 \neq 4$

$$\int_{\partial[a,b]} f = \int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f'\,dx = \int_{[a,b]} df$$

dle Riesze

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f \qquad \int_{b-a} f = \int_{\{b\}} f - \int_{\{a\}} f$$

neintegrujeme zde přes nulovou míru (Lebesgue) ale integrujeme nula-formy a proto tedy integrovat přes nulovou dimenzi nula

S definicemi nyní lze Newton-Leibnizovu formuli přepsat: $\int_{\partial[a,b]} f = \int_{[a,b]} df$

$\int_{\{b\}} f - \int_{\{a\}} f$

Definice 1.1 *n-krychle*

$\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme n-krychli jako kartézský součin

$$[0,1] \times \dots \times [0,1] = [0,1]^n = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

Pozn. n-krychle je uzavřená v $\mathbb{R}^n$ s topologií indukované metrikou či indukovanou Euklidovskou normou $\|\cdot\|_2$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, tj. $d(x,y) = \|x - y\|_2$

označíme: $[0,1]^n = I^n$ Analogicky $[0,1]^k \subseteq \mathbb{R}^n$ $k \leq n$ nazveme k-krychlí v $\mathbb{R}^n$. Pro $n=1$

$\mathbb{R}^k \ni (x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{i} (x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}) \in \mathbb{R}^m \quad ; \quad ([0,1]^k) \subseteq \mathbb{R}^m$

Označme $[0,1]^k = I_k^m \subseteq \mathbb{R}^m$

Definice 1.2

Nechť $\Phi: I_k^m \to \mathbb{R}^n$ je taková, že $\Phi_{|(I_k^m)^\circ}$ je regulární k-plocha (v $\mathbb{R}^n$) a Φ nechť je spojité (na I_k^m). Pak Φ nazveme regulární k-plochou s hranicí.

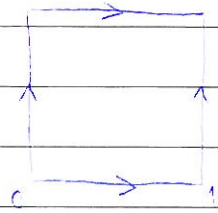
Nechť $\Phi_i: I_k^m \to \mathbb{R}^n$ jsou regulární k-plochy s hranicí, $u_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$.
Řetězcem nazveme formální součet $\sum_{i=1}^{m} u_i \Phi_i$.

Pozn. 1 formálně (viz log. řád)

a) $\varphi \cdot \varphi = \emptyset$, $\varphi - \varphi = 0$

$\varphi + (\psi + \xi) = (\varphi + \psi) + \xi$ asociativita, φ, ψ, ξ jsou regulární k-plochy s hranicí

Př.



$I_2^2 = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$

$\varphi_1: [0,1] = I_1^1 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_1(t) = (t, 0)$

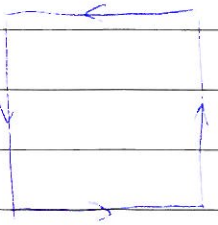
$\varphi_2: [0,1] = I_1^1 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_2(t) = (1, t)$

$\varphi_3: [0,1] = I_1^1 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_3(t) = (t, 1)$

$\varphi_4: [0,1] = I_1^1 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_4(t) = (0, t)$ (s opačnou než dané orientací složky)

$C = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$ je řetězec

Když "kreslíme" C, kreslíme takto:



ve směru hod. ručiček

Definice 1.3

$\forall \alpha = 0, 1, \forall j = 1, \dots, k-1, \forall k \in \mathbb{N}$ definuji ① $I_{(j,\alpha)}^k: I_{k-1}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ předpisem $I_{(j,\alpha)}^k(u_1, \dots, u_{k-1}) = (u_1, \dots, u_{j-1}, \alpha, u_j, \dots, u_{k-1})$

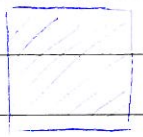
$\partial I_k = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (I_{(j,0)}^k - I_{(j,1)}^k)$ ve smyslu řetězců $= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^j (-1)^\alpha I_{(j,\alpha)}^k =$

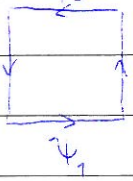
$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} I_{(j,\alpha)}^k$. Nazveme ∂I_k hranicí krychle.

② φ nechť je regulární k-plocha s hranicí. Definuji $\partial\varphi = \varphi \circ \partial I_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (\varphi \circ I_{(j,0)}^k - \varphi \circ I_{(j,1)}^k)$

③ c nechť je řetězec, $\partial c = \partial \sum u_i \varphi_i = \sum u_i \partial \varphi_i$, $c = \sum u_i \varphi_i$, $u_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$.

Př (ilustrace)

I_2^2 

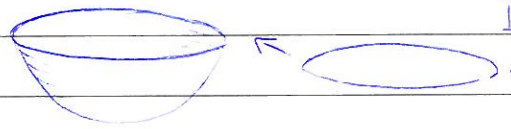
$\partial I_2^2 =$ 

$\psi_4(t) = (0, 1-t)$, $t \in [0,1]$

$\partial I_2^2 = -\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4$

i k Nerozhodnutý t

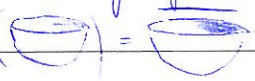
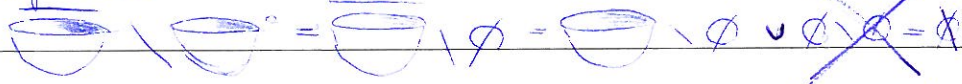
$\varphi: I_2^2 \to \mathbb{R}^3$ regulární 2 plocha s hranicí $\{\varphi(x), x \in I_2^2\}$

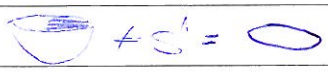
$\varphi(I_2^2) =$ 

$\partial\varphi = \varphi \circ \partial I_2^2 =$

$\varphi\circ\psi_1 + \varphi\circ\psi_2 - \varphi\circ\psi_3 - \varphi\circ\psi_4 = \varphi\circ\varphi_1 + \varphi\circ\varphi_2 - \varphi\circ\varphi_3 - \varphi\circ\varphi_4$

Z teorie metrických prostorů:

$\partial($  $) =$ 

 $\neq S^1 =$

Věta 11: abstraktní Stokesova věta

Nechť φ je regulární k-plocha s hranicí v $\mathbb{R}^n$, nechť $\omega \in \mathcal{E}^\infty(\Omega, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)$ je diferenciální k-forma na Ω, kde $\Omega \supseteq \varphi(I_k^k)$. Pak $\int_{\partial\varphi} \omega = \int_\varphi d\omega$.

Dk: ① Nechť $k = n-1$ a $\varphi = I_k$, kde I_k je parametrizace k-krychle. $\forall$ diferenciální k-formu

$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \quad \left(= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} f_i \, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n\right)$

znaménko je signum $(-1)^{i+1}$

$\omega = f_1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n - f_2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + (-1)^{n+1} f_n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$

$d\omega = \sum_{i,k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n =$

$= \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$= \sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$\int_{I_n} d\omega = \int_{I_n} \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^1 \dots dx^n = \sum_i \int_{I_n} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^n = \left(\int \frac{\partial f_1}{\partial x^1} dx^1\right) dx^2 \dots dx^n + \dots + \left(\int \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n\right) dx^1 \dots$

$= \sum_i \int \left[f(u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^{i+1}, \dots, u^n) - f(u^1, \dots, u^{i-1}, 0, u^{i+1}, \dots, u^n) \right]$

regulární stokesova formule

$$\int_{\partial I_n} \omega = \sum_i \sum_{\alpha=0}^{1} \int_{I^{n-1}_{(i,\alpha)}} \omega = \sum_i \sum_{\alpha=0}^{1} \int_{I^n_{(i,\alpha)}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_j \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge \hat{dx^j} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \sum_{i,\alpha,j} \int (-1)^{j-1} \left(f_j \circ I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right) d\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right)^1 \wedge \dots \wedge d\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right)^{j-1} \wedge d\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right)^{j+1} \wedge \dots \wedge d\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right)^n = (*)$$

Spočítáme $d\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right)^j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I^{n-1}_{(i,\alpha)}}{\partial u^k} du^k$ ($u^1, \dots, u^n$ parametry, $x^1, \dots, x^n$ do nich zobrazuj)

$$= \begin{cases} du^k, & j = 1, \dots, i-1 \\ du^{k-1}, & j = i+1, \dots, n \end{cases} \qquad \left[(du^k)\delta_{j,k}, \; j = 1, \dots, i-1 \right. \\ \left. (du^{k-1})\delta_{j,k-1}, \; j = i+1, \dots, n \right]$$

$$(*) = \sum_{i,\alpha,j} \int (-1)^{j-1} \left(f_j \circ I^{n-1}_{(i,\alpha)}\right) du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1} \, (-1)^{j+1} = \sum_{\alpha,j} \int \left(f_j(1, u^1, \dots, u^{n-1}) - \right.$$

$$\left. - f_j(0, u^1, \dots, u^{n-1}) - f_j(u^1, 1, u^2, \dots, u^{n-1}) - f_j(u^1, 0, u^2, \dots, u^{n-1})\right) du^1 \dots du^{n-1} =$$

$$= \sum_j \int \left[f_j(u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^{i+1}, \dots, u^n) - f_j(u^1, \dots, u^{i-1}, 0, u^{i+1}, \dots, u^{n-1}) \right] du^1 \dots du^n,$$

Což jsme mohli psát stručně Stokesova věta.

2. Necht φ je regulární k-plocha

$$\int_{\partial\Phi} \omega = \int_{\partial I} \varphi^* \omega = \int_I d(\varphi^* \omega) = \int_I \varphi^* d\omega = \int_\varphi d\omega$$

dokonce tomuto jsme spíše věřili

Matematika pro fyziky

27. 2. 2014 (přepis)

Minule:

bod 3, Věta: φ je regulární k-plocha

$$\int_{\partial\varphi} w \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial I} \varphi^* w \overset{\text{bod 1}}{=} \int_I d(\varphi^* w) = \int_I \varphi^* dw = \int_{\varphi[I]} dw$$

$\varphi \circ \partial I$

diferenciál komutuje s pullbackem

Demonstrujeme ©

$$\underbrace{d\left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^j}_{(*)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial I^{m-1}_{(i,a)}}{\partial u^k} du^k$$

$$\frac{\partial \left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^j}{\partial u^k} = \frac{\partial (u^1, \dots, u^{i-1}, a, u^{i+1}, \dots, u^{m-1})^j}{\partial u^k} = \begin{cases} \delta_{j,k-1}\, du^{k-1}, & j = 1+i, \dots, m \\ \delta_{jk}, & j \le 1, \dots, i-1 \\ \delta_{j,k-1}, & j = i+1 \\ 0, & j = i \end{cases}$$

$$\frac{\partial \left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^j}{\partial u^k} = du^i \delta_{j,k} \quad k = 1, \dots, i-1$$

(derivuji konstantní a)

(*) $\Rightarrow$ dosadit

$$\sum_{i,j,a} \int (-1)^{j+1} \left(f_j \circ I^{m-1}_{(i,a)}\right) d\left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^1 \wedge \dots \wedge d\left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^{j-1} \wedge d\left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^{j+1} \wedge \dots \wedge d\left(I^{m-1}_{(i,a)}\right)^m =$$

ifixmi — když $i=j$, nedosadí tam, uplatní se tedy jen tento případ $i=j$, jinak se sum muluje

$$= \sum_{j,a} \int (-1)^{j+1} \left(f_j \circ I^{m-1}_{(i,a)}\right) du^1 \wedge \dots \wedge du^m$$

Příklad: v $\mathbb{R}^2$

plocha	dimenze	integruj
bod b	0	f
křivka γ	1	$T_1 dx^1 + T_2 dx^2$
2-plocha	2	$f dx^1 \wedge dx^2$



Stokesova věta: 1) $0 = \int_{\partial b} f = \int_b f' = 0$ Lebesgue

hranice bodu je nula; množina míry 0

2) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (homeomorfismus jen mimo 0)

$$\int_{\partial\gamma} T \overset{\text{def}}{=} \int_\gamma dT$$

$T = T_1 dx^1 + T_2 dx^2$ když $T = dW$, W je funkce (tj. je-li T diferenciál nějaké), dostáváme:

$$\int_\gamma T = \int_\gamma dW = \int_{\partial\gamma} W = \left[\int_{\gamma(1)-\gamma(0)} W \right] = W(\gamma(1)) - W(\gamma(0))$$

Připomínka:

Pokud $T = dW$ ($\exists W$), pak integrál "síly" T přes γ (neboli práce), je rovem rozdílu práce ("potenciálních energií") v koncovém a počátečním bodě

→ T se nazývá konzervativní síla (potenciálová síla)

- technicky: $T = dW = \frac{\partial W}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial W}{\partial x^2} dx^2$

$T_1 dx^1 + T_2 dx^2 \Longrightarrow T_1 = \frac{\partial W}{\partial x^1}$ a $T_2 = \frac{\partial W}{\partial x^2}$ ($\sim F = \text{grad}\, \varphi$)

lineární nezávislé množiny $\{(dx^1)_m, (dx^2)_m\}$ $\forall m \in \mathbb{R}^2$

3) $S: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad T = f dx^1 \wedge dx^2$

když $T = d\alpha$, $\exists \alpha \in \mathcal{E}^\infty(S([0,1]\times[0,1]), \Lambda^1(\mathbb{R}^2)^*)$, pak (Stokes)

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S = \tilde{\gamma}} \alpha \Longrightarrow \int_S f dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial S} \alpha$$

$T = d\alpha$ $\quad d dx^1 \wedge dx^2 = d(\alpha_1 dx^1 - \alpha_2 dx^2) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 = \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2$

Nyní: $\int_S \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\tilde{\gamma}} (\alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2) \left(= \int_{\tilde{\gamma}} \vec{\alpha} \cdot d\vec{l}\right)$

GREENOVA VĚTA

$\text{rot}\, \alpha = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right)$

---

v $\mathbb{R}^3$ plocha, dimenze

bod	b	C
křivka γ	1	$T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$
plocha S	2	$T_{12} dx^1 \wedge dx^2 + T_{13} dx^1 \wedge dx^3 + T_{23} dx^2 \wedge dx^3$
objem V	3	$\rightsquigarrow T_1 dx^2 \wedge dx^3 + T_2 dx^3 \wedge dx^1 + T_3 dx^1 \wedge dx^2$
		$T_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ (pokud se mě dům $\wedge$ to, co zbývá, musím zdolat stejně orientovanou bazí)

4) když $T = dW$ pak Stokes platí

$$\int_\gamma dW = \int_{\partial\gamma} W = W(\gamma(1)) - W(\gamma(0))$$

opět potenciálovost v $\mathbb{R}^3$: Práce v konzervativním poli závisí jen na koncovém a počátečním bodě

$T = dW \Longleftrightarrow T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3 = \frac{\partial W}{\partial x^1} dx^1 + \ldots$ $\quad T_i = \frac{\partial W}{\partial x^i}$, $i = 1,2,3$

Spec. je uzavřená: $\gamma(1) = \gamma(0)$

$$\int_\gamma dW = W(\gamma(1)) - W(\gamma(0)) = 0$$

Z Lebesgua plyne např. že objem válce je 0.

2) když $T_1 dx^2 \wedge dx^3 + T_2 dx^3 \wedge dx^1 + T_3 dx^1 \wedge dx^2 = d\alpha$ $\exists \alpha \in \mathcal{E}^\infty(U, \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*)$, $U = S([0,1]^{*2})$, $S: [0,1]^{*2} \to \mathbb{R}^3$

pak dle Stokesovy věty

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha$$

$$\int_S d\alpha = \int_S d(\alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3) = \int_S \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \right) =$$

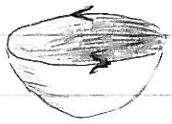
$$= \int_S \left(\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \right) =$$

$$= \int_{\partial S} \alpha = \int_{\partial S} \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$$

$\int \mathrm{rot}\, \alpha = 0$



$\int_S \underbrace{\mathrm{rot}\, \alpha}_{A} = \int_{\tau = \partial S} \alpha$



3) $f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = d\beta$ $\exists \beta$ pak Stokesova věta $\int_V f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_V d\beta$

$\int_{\partial V} \beta = \int_S \beta$ $\quad f = \mathrm{div}\, \beta$ $\quad \int_V \mathrm{div}\, \vec{E} = \int_S \vec{E}$

? $\exists \beta \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^3, \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*)$

$$f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = d\beta = d(\beta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3 dx^1 \wedge dx^2) = \frac{\partial \beta_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial \beta_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \beta_i}{\partial x^i} \right)}_{\mathrm{div}\, \beta} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \iff \int_V \mathrm{div}\, \beta = \int_{\partial V} \beta = \int_{S = \partial V} \beta$$

věta o divergenci

Je-li pole definované na 3-plose rozvětvené, je jeho tok přes hranici 3-plochy (spr. uzavřené) nulový

Pozn: různé plochy jsou zmíněné v $\mathbb{R}^n$ jakožto objekty teorie metrických prostorů

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ je omezená $\iff \sup \{|x-y|, x \in M\} = C < +\infty$

- rozbojníka se explicitní jako podpoklad v 1 (např. Stokesova), ale implicitní ano - viz zobrazení

- kvůli Φ, $\Phi: [0,1]^k \to \mathbb{R}^n$ & $\Phi([0,1]^k)$ je omezení (spojitost Φ)

- kvůli je uzavření (obraz kompaktu spojitých zobrazení v $\mathbb{R}^n$ je kompaktní)

Shrnutí: označení: $\mathcal{E}^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R})^*) = \Omega^k(U) = \mathcal{E}^k(U)$

fyz. mat.

Definovali jsme: $\int : \Omega^k(U) \times \{\text{regulární } k\text{-plochy}\} \to \mathbb{R}$

$(\alpha, \phi: U \to \mathbb{R}^m) \longmapsto \int_{\phi(V)} \alpha$

a dále zde je přesný Stokesova věta.

Definice 1.4

Nechť V je vektorový prostor, $h: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}$ je multilineární zobrazení. Pokud $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ (permutace) platí: $h(v_1, \dots, v_k) = h(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$, pak jej nazveme symetrickou (resp. alternující) k-formou.

Př. (V, B) buď prostor se skalárním součinem, tj. B je symetrická pozitivně definitní bilineární forma (⇒ spec. nedegenerovaná)

1) $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2) $B(u, u) > 0 \leftarrow \forall u, v, w \in V, \leftarrow \forall u \in V \setminus \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3) $B(u, v) = B(v, u)$

nedegenerovanost $\equiv B(u, v) = 0 \ \forall v \Rightarrow u = 0$

B je symetrická 2-forma

Označení: $\{$prostor všech symetrických/resp. alternujících k-forem$\} =: S^k V^*$

$[\Lambda^k V^*, \Lambda^k (\mathbb{R}^n)^*]$ ... antisymetrických/resp. k-formy

Pozn. $S^k V \cong P^k V$ homogenní polynomy stupně k

(izomorfismus)

Př. $V = \mathbb{R}^2$ $S^2 V^* \cong \{ax^2 + 2bxy + cy^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Proč?

$S^2 V^*$ = reálné symetrické 2-formy

$\{A: V \times V \to \mathbb{R}, A$ bilineární + symetrické$\} \cong \{A \in Mat(2, \mathbb{R}) \mid A^T = A\} \cong \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \cong \left\{(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \cong \{ax^2 + 2bxy + cy^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Zkuste binární kubiky.

$S^3 (\mathbb{R}^2)^*$ napsat bázi

kubiky ~ binární

Označení: Nechť $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^m$ (pp. konečná dimenze) je báze V^*. Vezmi $1 \le i_1, \dots, i_k \le m$

$V^* = \{f: V \to \mathbb{R} \mid f$ lin$\}$ $f(a_1 + \lambda u) = f(a) + \lambda f(u) \ \forall v_1, \dots, v_k \in V$

$(\varepsilon^{i_1} \dots \varepsilon^{i_k}) \in S^k V^*$

$(\varepsilon^{i_1} \dots \varepsilon^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots \varepsilon^{i_k}(v_{\sigma(k)})$ se značí $\vee$ (resp. symetrický součin (symetrizace) „$\cdot$")

($\times$ resp. součin (antisymetrizace) „$\wedge$", tentokrát součin „$\times$")

Lemma 1.2

Pro $i,j = 1,\dots,n\ (=\dim V)$ je $\varepsilon^i\varepsilon^j$ symetrická 2-forma, tj. element S^2V^*

Dk. $\varepsilon^i\varepsilon^j(v_1,v_2) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2} \varepsilon^i(v_{\sigma(1)})\varepsilon^j(v_{\sigma(2)}) = \varepsilon^i(v_1)\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)\varepsilon^j(v_1)$

$\mathfrak{S}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$

a) bilinearita

$\varepsilon^i\varepsilon^j(v_1+w, v_2) = \varepsilon^i(v_1+w)\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)\varepsilon^j(v_1+w) = [\varepsilon^i(v_1)+\varepsilon^i(w)]\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)\cdot$
$[\varepsilon^j(v_1)+\varepsilon^j(w)] = LS$

$PS = \varepsilon^i\varepsilon^j(v_1,v_2) + \varepsilon^i\varepsilon^j(w,v_2) = \varepsilon^i(v_1)\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)\varepsilon^j(v_1) + \varepsilon^i(w)\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)\varepsilon^j(w) =$
$[\varepsilon^i(v_1)+\varepsilon^i(w)]\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)[\varepsilon^j(v_1)+\varepsilon^j(w)]$ ✓

b) symetrie

$(\varepsilon^i\varepsilon^j)(v_1,v_2) = \varepsilon^i(v_1)\varepsilon^j(v_2) + \varepsilon^i(v_2)\varepsilon^j(v_1)$
$(\varepsilon^i\varepsilon^j)(v_2,v_1) = \varepsilon^i(v_2)\varepsilon^j(v_1) + \varepsilon^i(v_1)\varepsilon^j(v_2)$ ‖

□

Lemma 1.3

$\{\varepsilon^i\varepsilon^j\}_{1\le i\le j\le m}$ je báze S^2V^*.

Dk. podobně jako u vnějšího součinu (víme $\{\varepsilon^I\}_{|I|=k}$ je báze Λ^kV^*:
(popřemýšlet) $\varepsilon^{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon^{i_k} \in \Lambda^kV^*$, bylo použito, že zobrazení $\sigma_{ij}=ji$)
$\varepsilon^{i_1}\dots\varepsilon^{i_k} \subset S^kV^*$

□

Pozn: $S^2V^* = \mathcal{L}(\{\varepsilon^1\varepsilon^1, \varepsilon^1\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^1\varepsilon^m, \varepsilon^2\varepsilon^2, \varepsilon^2\varepsilon^3, \dots, \varepsilon^n\varepsilon^m\})$

Označení: konvence $\varepsilon^i\varepsilon^i = (\varepsilon^i)^2$

Matematika pro fyziky II

6.3.2014

Připomenutí: $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow S^k V^* := \{\alpha : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}/\mathbb{C} \mid \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k\}$

(k-multilineární, α = symetrická forma)

$\{\varepsilon^i \varepsilon^j\}_{i,j=1}^{\dim V}$ je báze $S^2 V^*$

Pozn.: • Obdobně jako $\{\varepsilon^I\}_{|I|=k}$ je báze $\Lambda^k V^*$

* $\varepsilon^{i_1} \dots \varepsilon^{i_k}$

• $S^k V^* \cong P_k V$ (homog. stupně k) $\quad x^k + y^{k-1}$ není homogenní stupně k

$x^k + 1$ také není

$x^k + \frac{1}{2} x^{k-1} y + y^k$ je stupně k

"Diferenciální" verze přidává alg. strukturu (symetrické / antisymetrické formy) pro symetrické diferenciální formy.

Připomenutí: $dx^i = d(\text{pro}j^i)$, kde $\text{pro}j^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\text{pro}j^i(x^1, \dots, x^n) = x^i \quad \forall (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

$$(dx^i)(y) = (dx^i)\Big(\sum_{j=1}^n y^j e_j\Big) = \sum_{j=1}^n y^j (dx^i)(e_j) = \sum_{k,j=1}^n y^j \frac{\partial(\text{pro}j^i)}{\partial x^k} \underbrace{\varepsilon^k(e_j)}_{\delta_j^k} = \sum_{k,j=1}^n y^j \delta_k^i \delta_j^k = y^i$$

$y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (dx^i)(y) = y^i \Rightarrow (dx^i) = \varepsilon^i$ plyne z def. duální báze

Definice 15

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $g \in \mathcal{E}^\infty(U, S^2(\mathbb{R}^n)^*)$ nazýváme symetrickou diferenciální 2-formou (eventuálně k-formou pro $S^k(\mathbb{R}^n)^*$). Názvu je Riemannovou metrikou, pokud pro $\forall m \in U$, $g(m)\ (= g_m)$ je symetrická pozitivně definitní forma.

Nechť $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ buď hladké zobrazení, pak $\Phi^* g = \Phi^*\big(\sum g_{ij}\, dx^i dx^j\big) = \sum_{i,j,r,s} (g_{ij} \circ \Phi) \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^r} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^s} (du^r du^s)$, zvýrazněno

$(\Phi^* g)(m) = \Phi^*\big(\sum g_{ij}(m)(dx^i)_m (dx^j)_m\big) =$

$= \sum_{i,j,r,s} (g_{ij} \circ \Phi)_m \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^r}(m) \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^s}(m)\, (du^r)_m (du^s)_m$, nazýváme pullbackem (totožným zobrazením) $\overset{\text{(totožné číslo)}}{g} = \sum g_{ij} (dx^i)(dx$

Pozn.: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k[u^1, \dots, u^k]$, u^i je de facto projekce. $u^i(x^1, \dots, x^k) = x^i \ \forall i \in (1, \dots, n)$

$g \in \mathcal{E}^\infty(U, S^2(\mathbb{R}^n)^*) \xrightarrow{\forall m} g(m) \in S^2(\mathbb{R}^n)^*$

Báze $S^2(\mathbb{R}^n)^*$ je např. $\{\varepsilon^i \varepsilon^j\}_{i,j=1}^n \to g(m) = \sum g_{ij}^{(m)} \varepsilon^i \varepsilon^j$, $\exists g_{ij}(m) \in \mathbb{R}$

tj. ε^i nezávisí na m, to je báze ($\forall i = (1, \dots, n)$). Otázka je: $m \mapsto g_{ij}(m) \in \mathbb{R}$ diferencovatelné? Ano, neb $g : U \to X = S^2(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ nebylo z definice hladké, což jak víme pro X metrický konečná dimenze je ekvivalentní diferencovatelnosti po složkách.

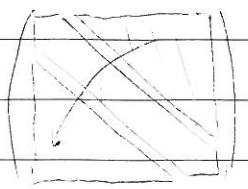
Složky v prostoru $S^2(\mathbb{R}^m)^*$: $B \in S^2(\mathbb{R}^m)^* \longmapsto (B_{11}, B_{12}, B_{13}, \dots, B_{1m}, B_{21}, \dots, B_{2m}, \dots, B_{m1}, \dots B_{mm})$

$\longleftrightarrow B = \sum_{i,j=1}^{m} B_{ij} \varepsilon^i \varepsilon^j$

Dimenze: Víme, že $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^* = \binom{m}{k}$, $\dim S^k V^*$ neumíme

Pozor: $\{\varepsilon^i \varepsilon^j\}$ je báze $1 \le i \le j \le m$ ($\varepsilon^1\varepsilon^2, \varepsilon^2\varepsilon^1$, avšak $\varepsilon^1\varepsilon^2 = \varepsilon^2\varepsilon^1$ nelze z def.

$\varepsilon^{12}(v,u) = \varepsilon^1(v)\varepsilon^2(u) - \varepsilon^1(u)\varepsilon^2(v)$, $\varepsilon^{21}(v,u) = \varepsilon^2(v)\varepsilon^1(u) + \varepsilon^2(u)\varepsilon^1(v)$



sgn

$s = \frac{1}{2}m(m-1)$ $(= 1+2+\dots+(m-1))$

$s + \text{"diag"} = \frac{1}{2}m(m-1) + m = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + m = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m(m+1)$

Tj. $\dim_{\mathbb{R}} S^2(\mathbb{R}^m)^* = \frac{1}{2}m(m+1)$, tj. $S^2(\mathbb{R}^m)^* \simeq \mathbb{R}^{\frac{1}{2}m(m+1)}$

Základní Riemannova metrika je tzv. Eukleidova metrika v $\mathbb{R}^m$, tj.

$$euc_m := \sum_{i=1}^{m} (\varepsilon^i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (dx^i)^2$$

Symetrická 2-forma: "minkowského metrika", $mink_m = (\varepsilon^1)^2 - \sum_{i=2}^{m} (\varepsilon^i)^2 =$

$= (dx^1)^2 - \sum_{i=2}^{m} (dx^i)^2$ (na tvrdo $(dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{m} (dx^i)^2$ $\mathbb{R}^m(x^0, \dots, x^m)$)

$$\eta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=1=j \\ -1 & i=2,\dots,m,\ i=j \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad mink_m = \sum_{i,j=1}^{m} \eta_{ij} (dx^i)(dx^j)$$

$$\times \qquad euc_m = \sum_{i,j=1}^{m} \delta_{ij} (dx^i)(dx^j)$$

! Minkowského "metrika" NENÍ Riemannovou metrikou

Př. $\gamma: [a,b] = I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je regulární 1-plocha (= (reg.) křivka)

$$\gamma^*(euc_m) = \gamma^*\left(\sum_{i=1}^{m} (dx^i)^2\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \gamma^i}{\partial u} du \, \frac{\partial \gamma^i}{\partial u} du = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \gamma^i}{\partial u}\right)^2 (du)^2$$

$(dx^i)(dx^i)$

Objekt je (diferenciální) 2-forma 1 proměnné, speciálně

$$dot\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{d\gamma^i}{du}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{d\gamma^i}{du}\right)^2$$

Motivace z fyziky: $l(j) = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx_1^2 - dx_2^2}}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_m}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\, dt =$

nejen to velitou ale čísla

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{|det(x^* euc_m)|}\, dt \quad \text{kde } x: t \longmapsto (x^1(t), \dots, x^m(t)),\ t \in (t_0, t_1)$$

Definice 1.6

Nechť $\Phi: \mathbb{R}^k[u^1, \dots, u^k] \longrightarrow \mathbb{R}^m[x^1, \dots, x^m]$ je regulární k-plocha a f je funkce na $\Phi(U)$ (tj. $f: \Phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$). Pak definujeme integrál 1. druhu z f přes $\Phi(U)$ jako

$$\int_{\phi(U)} f\,dS = \int (f\circ\phi)\sqrt{\left|\det(g_{ij})_{i,j=1}^{k}\right|}\,\underbrace{du^1\ldots du^k}_{=d\lambda_{R^k}} \quad \text{kde } \Phi^*(euc_m)_m = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}(m)(du^i)_m(du^j)_m$$

Chybí: nezávislost na parametrizaci tj. při reparametrizaci Φ difeomorfismem φ se $\int_{\phi(U)} f\,dS^{\Phi} =$

$$= \int_{(\varphi\circ\Phi)(U)} f\,dS^{\varphi\circ\Phi}$$ nemění a je roven

tj. $k=2$, $n=3$, $U=I\times J$, I,J ot.

$\Phi: I\times J \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\Phi^*(euc_3) \rightsquigarrow g_{ij} \overset{def}{\rightsquigarrow} \Phi(u^1,u^2) =: (\Phi^1(u,v),\Phi^2(u,v),\Phi^3(u,v))$

$I\times J$

def: $\Phi^i: (u,v)\longmapsto \Phi^i(u,v)$

$$\Phi^*\left(\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2\right) = \sum_{r,s,i=1}^{3,2}\left(\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^r}du^r\right)\left(\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^s}du^s\right) = \sum_{r,s=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^r}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^s}du^r du^s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{rs}(m) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^r}(m)\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^s}(m)$$

(u,v)

Konvence sk. součin v $\mathbb{R}^3$: $(v^1,v^2,v^3)\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} v^i u^i$, $g_{rs}(m) = \frac{\partial\Phi}{\partial u^r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial u^s}(m)$

tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u^r} = \left(\frac{\partial\Phi^1}{\partial u^r}(u,v), \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^r}(u,v), \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^r}(u,v)\right)$

1. fundamentální forma (nebo zápis pullbacku do metriky)

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^1},\frac{\partial\Phi}{\partial u^1}\right) & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^1},\frac{\partial\Phi}{\partial u^2}\right)\\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^2},\frac{\partial\Phi}{\partial u^1}\right) & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^2},\frac{\partial\Phi}{\partial u^2}\right)\end{pmatrix} = (g_{ij}) \longrightarrow \det g_{ij} = EG - F^2$$

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) = E$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) := F$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^2},\frac{\partial\Phi}{\partial u^2}\right) = G$

Pak $f: \Phi(I\times J)\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\int_{\Phi(I\times J)} f\,dS = \int_{I\times J\subseteq\mathbb{R}^2}(f\circ\Phi)\sqrt{EG-F^2}\,du^1du^2$$

! spec. případ $f=1$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\int f\,dS$ se rovná obsahu plochy $\Phi(U)$. Vyjde nenulový, pokud I, J jsou nedegenerované ($=$ nejsou to $(a,a)=\{a\}$ body). Ano, neboť Φ je regulární 2-plocha $=$ $Jac(\Phi) = \begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi^1}{\partial u} & \frac{\partial\Phi^1}{\partial v}\\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial u} & \frac{\partial\Phi^2}{\partial v}\\ \frac{\partial\Phi^3}{\partial u} & \frac{\partial\Phi^3}{\partial v}\end{pmatrix}$ má maximální hodnost, tj. hodnost 2

Jac toto souvisí s $\sqrt{|EG-F^2|}$? Zkusíme: $\mathrm{Jac}(\Phi)^T \mathrm{Jac}(\Phi) =$ $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u}\frac{\partial \Phi^i}{\partial u} & \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u}\frac{\partial \Phi^i}{\partial v} \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial v}\frac{\partial \Phi^i}{\partial u} & \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial v}\frac{\partial \Phi^i}{\partial v} \end{pmatrix}$

TRIK: použij na to determinant

$\det(\mathrm{Jac}\Phi)^T \det(\mathrm{Jac}\Phi) = \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \neq 0$

Dk: pro spor Nechť $\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = 0$, $(E,F) \in \mathbb{R}^2$ je lineárně závislý s vektorem $(F,G) \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \lambda F \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u}\frac{\partial \Phi^i}{\partial u} = \lambda \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u}\frac{\partial \Phi^i}{\partial v}$, $F = \lambda G \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u}\frac{\partial \Phi^i}{\partial v} = \lambda \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi^i}{\partial v}\frac{\partial \Phi^i}{\partial v}$

$\vec{u} = \left(\frac{\partial \Phi^1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi^2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi^3}{\partial u}\right)$ $\vec{v} = \left(\frac{\partial \Phi^1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi^2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi^3}{\partial v}\right)$ $\vec{u}\cdot\vec{u} = \lambda \vec{v}\cdot\vec{v}$ (*)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda \vec{v}\cdot\vec{v}$

Víme, že $\{\vec{u},\vec{v}\}$ je lin. nezávislý z pp reg. 2-plochy Φ. Připíšeme (*) $\vec{u}\cdot\vec{u} - \lambda\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$

$\vec{v}\cdot\vec{u} - \lambda\vec{v}\cdot\vec{v} = 0$

$\Rightarrow (\vec{u} - \lambda\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$

$(\vec{u} - \lambda\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$ a platí $\vec{u} - \lambda\vec{v} \in \mathcal{L}(\{\vec{u}\times\vec{v}\})$. Avšak $\vec{u} - \lambda\vec{v} \in \mathcal{L}(\{\vec{u},\vec{v}\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} - \lambda\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}$ $\lightning$ s tím, že $\vec{u},\vec{v}$ jsou lin. nez. cbd.

$\sqrt{EG-F^2} \neq 0$

" $\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $\rightarrow \int 1\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \neq 0$ (× Lebesgueův integrál 2-formy v 3-prostoru je nulový protože to je míra nula)

Matematika pro fyzik II

13.3.2014

Primula: Integrál 1 druhu $\int_{\Phi(U)} f\,dS = \int_U (f\circ\Phi)\sqrt{g}\,du^1\dots du^k$, kde $\Phi: \mathbb{R}^k[u^1,\dots,u^k] \to \mathbb{R}^n$ je reg. parametrizovaná k-plocha a $g = \det(g_{ij})_{i,j=1}^k$. g_{ij} spočítatelné z $\Phi^* euc_n = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}\,du^i du^j$

$(euc_n = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$, Φ^* značí: že x^i dosadím $x^i = f^i(u^1,\dots,u^k)$, $i=1,\dots,n$

" příp. pís. pro Φ $\quad \Phi: x^1 = f^1(u^1,\dots,u^k)$

$x^n = f^n(u^1,\dots,u^k)$

Definice 1.7 Objem k-plochy

$\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ buď regulární k-plocha. Pak $\int_{\Phi(U)} 1\,dS$ rozumí objem této k-plochy.

Chceme rozšířit $\int_{\Phi(U)} f\,dS$ na parametrizaci Φ

Lemma 1.4

$(g_{ij})_{i,j=1}^k = (Jac\Phi)^T (Jac\Phi)$

Dk: $\Phi: U \to \mathbb{R}^n$ $\quad Jac\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^n}{\partial u^k} \end{pmatrix}$ $\quad \Phi^* euc_n = \Phi^*\left(\sum_{i=1}^n (dx^i)^2\right) = \sum_i \Phi^*(dx^i)\Phi^*(dx^i) =$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j} du^j \sum_{l=1}^k \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^l} du^l\right) = \sum_{j,l=1}^k \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^l}}_{g_{jl} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^l}} du^j du^l \qquad \forall j,l = 1,\dots,k$$

Matice se rovnají $\iff$ se rovnají jejich komponenty

$$[(Jac\Phi)^T(Jac\Phi)]_{jl} = \sum_i [(Jac\Phi)^T]_{ji}[Jac\Phi]_{il} = \sum_i (Jac\Phi)_{ij}(Jac\Phi)_{il} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^l} = g_{jl}$$ ∎

Pozn.: Ze vzorce lemmatu 4 plyne: $\det((g_{ij})_{i,j=1}^k) = \det[(Jac\Phi)^T(Jac\Phi)]$, tzv. Grammův vzorec

- Zpět k rozdělitelnosti na parametrizaci:

$U_1 \xrightarrow{\Phi_1} \Phi_1(U_1) = \Phi_2(U_2) \overset{?}{\Longrightarrow} \int_{\Phi_1(U)} f\,dS = \int_{\Phi_2(U)} f\,dS$

$\Phi_4 \uparrow \circlearrowright \nearrow \Phi_2$ $\quad U_2$

tato značení: $\Phi_1 \circ \varphi = \Phi_2$

Proč by to nemuselo platit? $(u^1,u^2) \longmapsto (u^1,u^2,\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2})$ $\quad \Phi_+$

$[-1,1]^2$

$\Phi_2: (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \ni (u^1, u^2) \longmapsto (\cos u^2 \sin u^1, \sin u^2 \sin u^1, \cos u^1)$

Věta 1.5

Nechť $\Phi_i: U_i \subseteq \mathbb{R}^k[u_i^1, \dots, u_i^k] \to \mathbb{R}^n$ jsou regulární k-plochy a nechť $\varphi: U_2 \to U_1$ je difeomorfismus a $Jac(\varphi)_j$ regulární matice. Pak $\int_{\Phi_1(U_1)} f\,dS = \int_{\Phi_2(U_2)} f\,dS \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(\Phi_1(U_1))$.

Dk: $\int_{\Phi_2(U_2)} f\,dS \overset{\text{def } U_2}{=} \int_{U_2} (f \circ \Phi_2) \sqrt{|\det g_{ij}^2|}\, du_2^1 \dots du_2^k =$

$du_2^i = du^i$

$= \int_{U_2} (f \circ \Phi_2) \sqrt{|\det [(Jac\,\Phi_2)^T (Jac\,\Phi_2)]|}\, du_2^1 \dots du_2^k \overset{(*)}{=}$ $du_1^i = du^i$ homenco

1 mat. mj počít $[Jac(\Phi_1 \circ \varphi)]_{ij} = \frac{\partial(\Phi_1 \circ \varphi)^i}{\partial u_2^j} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \Phi_1^i}{\partial u_{1l}^l} \frac{\partial \varphi^l}{\partial u_2^j} \Rightarrow Jac(\Phi_1 \circ \varphi) = (Jac\,\Phi_1)(Jac\,\varphi)$

du_2^i se fce φ prom. vnější proměnné $u_1 \varphi(m)$

$(*) = \int_{U_2} (f \circ \Phi_2) \sqrt{|Jac\,\Phi_2|}\, du_2^1 \dots du_2^k = \int_{U_2} (f \circ (\Phi_1 \circ \varphi)) \sqrt{|\det [Jac(\Phi_1 \circ \varphi)^T Jac(\Phi \circ \varphi)]|}\, du_2^1 \dots du_2^k =$ mat. mj počít

$= \int_{U_2} ((f \circ \Phi_1) \circ \varphi) \sqrt{|\det [(Jac(\Phi_1)\, Jac\,\varphi)^T \circ (Jac\,\Phi_1 \circ Jac\,\varphi)]|}\, du_2^1 \dots du_2^k = \int_{U_2} (f \circ \Phi_1) \circ \varphi \sqrt{|\det [(Jac\,\varphi)^T (Jac\,\Phi_1)^T$

$(Jac\,\Phi_1)(Jac\,\varphi)]|}\, du_2^1 \dots du_2^k = \int_{U_2} (f \circ \Phi_1) \circ \varphi \sqrt{|\det (Jac\,\varphi)^2|\, |\det (Jac\,\Phi_1^T\, Jac\,\Phi_1)|}\, du_2^1 \dots du_2^k = (**)$

$\square$ mat. φ · $\square$ mat. $\square$ mat.

$\forall j,i$ $\sum_l (Jac\,\varphi^{-1})_{jl} (\varphi(u_2^1, \dots, u_2^k)) Jac(\varphi)_{li} = \delta_{ij} \Rightarrow [(Jac\,\varphi^{-1})(\varphi(m))]\,(Jac\,\varphi)(m) = \mathbb{1}$ (mat. $\square$)

$\sum_l \frac{\partial (\varphi^{-1})^j}{\partial u_1^l} (\varphi(u_2^1, \dots, u_2^k)) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u_2^i} (u_2^1 \dots u_2^k) = \delta_{ij}$

$\frac{\partial}{\partial u^i} \left(\begin{matrix} 1 \\ = \\ 1 \end{matrix} \right)^i = \delta_{ij}$

zde $m = (u_2^1, \dots, u_2^k) \in U_2$

$\boxed{(Jac\,\varphi^{-1})(\varphi(m)) = (Jac\,\varphi)^{-1}(m)}$ $\blacktriangledown$ c

$(g_{ij}^1 = \Phi_1^* euc_n,\ g_{ij}^2 = \Phi_2^* euc_n$

$(**) = \int_{U_2} ((f \circ \Phi_1) \circ \varphi\, |\det (Jac\,\varphi)| \sqrt{|\det (g_{ij}^1)_{ij}|}\, du_2^1 \dots du_2^k =$

$\int (f \circ \Phi_1) dS$

Dále ~~Fubini~~ Věta o u_1 substituci

$= \int_{U_1 (= \varphi(U_2) \text{ vos})} (f \circ \Phi_1) \sqrt{|\det [(g_{ij}^1)_{ij}]|}\, du_1^1 \dots du_1^k = \int_{U_1} f\,dS$ $\blacksquare$

Pozn. • Speciální objem nezávisí na reparametrizaci

• Nambuova - Gotoova akce

$$\mathcal{L}_{NG}(\Phi) = \int_U \sqrt{\det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial u^\nu}\eta_{\mu\nu}\right)}\,du^1\dots du^k \quad \forall \Phi:\ \mathcal{L}_{NG}(\Phi)\in\mathbb{R},\ \text{pokud } U \text{ je kompaktní, } \Phi \text{ je spojité}$$

na $U \subseteq \mathbb{R}^2$ $[u^1, u^2]$

Vzpomeňme, že $\int_{\text{ksi}} \sqrt{|\det(\Xi_{ij})_{i,j}|}$ $(\Xi_{ij})_{i,j}$ je definice nebo Φ^*_{eucn} ale Φ^*_{mink}, víme,

že nezávisí na reparametrizaci.

Věta 1.6 Objem rovnoběžnostěnu

Nechť $\{v_1, \dots, v_k\}$ je k lineárně nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^n$. Pak objem rovnoběžnostěnu

$\Phi(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^k \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} v_i t_i \in \mathbb{R}^n$ je roven $\sqrt{\det\begin{pmatrix} (v_1,v_1) & \cdots & (v_1,v_k) \\ \vdots & & \\ (v_k,v_1) & \cdots & (v_k,v_k) \end{pmatrix}}$.

Dk. $\int_{\Phi([0,1]^k)} 1\,dS = \int_{[0,1]^k} \sqrt{|\det(g_{ij})_{i,j=1}^k|}\,dt_1 \dots dt_n = \int_{[0,1]^k} \sqrt{|(Jac\Phi)^T(Jac\Phi)|}\,dt_1 \dots dt_k =$

pozn. za L^4, Gram. rozvoj, det

$$(Jac\Phi)^T = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_k^1 \\ v_1^2 & \cdots & v_k^2 \\ \vdots & & \\ v_1^n & \cdots & v_k^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow = \int_{[0,1]^k} \sqrt{\det\begin{pmatrix} (v_1,v_1) & \cdots & (v_1,v_k) \\ \vdots & & \\ (v_k,v_1) & \cdots & (v_k,v_k) \end{pmatrix}}\,dt_1 \dots dt_k =$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} (v_1,v_1) & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}} \int_{[0,1]^k} dt_1 \dots dt_k = \sqrt{\det(\dots)}$$ neboť $Int = 1 \dots 1$

$\int_c 1 = 1$ ∎

Příklad $a \cdot (b \times c) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{pmatrix}}$ zkuste ověřit

Pozn. Stokes v sobě zřejmou motivaci nemá. Ač integrály I. druhu jsou nezbytné.

Definice 1.8

Buď (V, B) vektorový prostor s nedegenerovanou symetrickou bilineární formou. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je nějaká ON-báze (V, B) s fixním uspořádáním svých členů. Pak $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ definujeme $*: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{n-k} V$ předpisem: $*v = w \iff \forall \bar{v}: \bar{v} \wedge w = e_1 \wedge \dots \wedge e_n (\bar{v}, \dots)_B$.

$\forall v \in \Lambda^k V$ $\quad \forall \bar{v} \in \Lambda^k V$

Věta: Kvalitnost $\Rightarrow$ jednoznačnost $w(=*v)$. ? nedegenerovanost $(\ ,\ )_B$.

Předpoklad $(\bar{v}, w)_B = ?$

Víme $(v_1, v_2)_B$ pro $v_1, v_2 \in V$ $(B: V \times V \to \mathbb{R})$ jde o přirozeným extenzí (restrikcí)

$(\ ,\ )_B: V \times V \to \mathbb{R}$ na $(\ ,\ )_B (\Lambda^{m-k} V)^2 \to \mathbb{R}$ či obecně $(\ ,\ )_B: \Lambda^k V \times \Lambda^k V \to \mathbb{R}$

pomocí ryčtu ON - báze:

$\Lambda^1 V = V \quad (e_1, \dots, e_m)$

$\Lambda^2 V \dots (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots e_1 \wedge e_m, e_2 \wedge e_3, \dots e_2 \wedge e_m, \dots e_{m-1} \wedge e_m), \dots \Lambda^k V \dots \mathbb{R}, |I| = k$

Př: $\mathbb{R}^3$ ... sk. součinem $\qquad (\ ,\ )_B$ = multilineární

$\sum_{i=1}^{3} x^i y^i = ((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3))$ $\qquad (\xi, \xi) = 1$

$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ $\qquad (\xi, \eta) = 0 \quad \xi \neq \eta$

$e_1 \in \Lambda^1 V \quad * e_1 \in \Lambda^{3-1} \mathbb{R}^3 = \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \quad (k=1)$

$\bar{v} \wedge (* e_1) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ formou objemu (orientovaný krychle F_1)

$(\bar{v}, e_1)_B$ $\qquad e_1$

$\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2 \quad e_1 \wedge (\gamma_1 e_1 \wedge e_2 - \gamma_2 e_1 \wedge e_3 + \gamma_3 e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 (\bar{v}, e_1) = 1\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

$\bar{v} = e_2$

$\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = 0 \quad (e_2, e_1) = 0$

$e_1 \wedge * e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \quad (e_1, e_2)$

$\Rightarrow \gamma_3 = 0$

$e_3 \wedge * e_2 \qquad \gamma_1 e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \cdot 0 = 0 \qquad \gamma_1 = 0$

$\gamma_2 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = -\gamma_2 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \qquad \gamma_2 = -1$

$* e_2 = -e_1 \wedge e_3 = e_3 \wedge e_1$

$* e_1 = e_2 \wedge e_3$

$* e_3 = e_1 \wedge e_2$

Matematika pro fyziky

20.3.2014

$\eta = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \quad \mathbb{R}^4[x^1, x^2, x^3, x^4]$

$x \; y \; z \; t$

$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ matice STR

$(3,1)$

(e_1, e_2, e_3, e_4) báze $\mathbb{R}^4$ (zvolme kanonickou)

$*(e_1 \wedge e_2) = k e_3 \wedge e_4$

$(*(e_1 \wedge e_2)) \wedge (e_1 \wedge e_2) = \eta(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_2)$

$k e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 = \eta(e_1, e_2)\,\eta(e_2, e_2)$ $\quad vol = 1 \cdot 1\, vol$

$k e_{1234} = e_{1234} \Rightarrow k = 1$

$* \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4 (*\eta)$

$(B = \eta) \; \forall w$

$(*v) \wedge w := B(v, w)\, vol$

Značení: $*(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = k e_I \quad I = \{1, \dots, m\} \setminus \{1, \dots, k\}$

$*(e_j) = k e_I \quad I = \{1, \dots, m\} \setminus j$

$*(e_1, e_3) = k e_2 \wedge e_4 - k e_{24}$

$(* e_{13}) \wedge e_{13} = \eta(e_{13}, e_{13})\, vol$

$k e_{24} \wedge e_{13} = \eta(e_1, e_1)\,\eta(e_3, e_3)\, vol$

$* k e_{124} e_3 = 1 \cdot 1\, vol$

$k e_{1234} = vol \Rightarrow k = -1$

$*(e_1 \wedge e_3) = -e_{24} \quad *(e_1 \wedge e_4) = -e_2 \wedge e_3 \quad *(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4 \quad *(e_2 \wedge e_4) = e_{13} \quad *(e_3 \wedge e_4) = -e_{12}$

$\dim(\Lambda^2 \mathbb{R}^4) = \binom{4}{2} = 6 \qquad * : \Lambda^k \mathbb{R}^m \to \Lambda^{m-k} \mathbb{R}^m$

$* : \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \to \Lambda^2 \mathbb{R}^4$

$**(e_1 \wedge e_2) = -e_1 \wedge e_2$

$**(e_1 \wedge e_3) = -e_{13}$

$** : \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \to \Lambda^2 \mathbb{R}^4$

$*^2 = -\mathbb{1}_{\Lambda^2 \mathbb{R}^4}$

Věta 1.7

Nechť (V, B) je vektorový prostor s reálným symetrickým bilineárním formou. Nechť $(e_1, \dots, e_m)$ je resp. ON-báze $(B(e_i, e_j) = \pm \delta_{ij})$. Pak $* : \Lambda^k V \to \Lambda^{m-k} V$ je:

1) lineární zobrazení

2) až na znaménko involuce, tj. $*^2 = * \circ * = (-1)^{r_k} \mathbb{1}_{\Lambda^k V}, \forall k, \exists r_k$

Dk: 1) $v = v_1 + \alpha v_2, \; \alpha \in \mathbb{R}, \; v_1, v_2 \in \Lambda^k V$

$\forall w : (*v) \wedge w = B(v, w)\, vol = B(v, w)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m$

$[*(v_1 + v_2)] \wedge w = B(v_1 + v_2, w)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m - [B(v_1, w) + B(v_2, w)]\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m = B(v_1, w)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m +$

$+ B(v_2, w)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m = (*v_1 \wedge w) + (*v_2 \wedge w) = (*v_1 + *v_2) \wedge w$ pro volbu $\alpha = 1$

$*(\nu_1+\nu_2)\wedge w = (*\nu_1 + *\nu_2)\wedge w$

$B(*(\nu_1+\nu_2), w)\,\mathrm{vol} = B(*\nu_1 + *\nu_2, w)\,\mathrm{vol}$ Protože $\{\mathrm{vol}\}$ je báze $\Lambda^n V \cong \Lambda^n \mathbb{R}$

(obecně $\{\mathrm{vol}\}$ je L.N.), tak $B(*(\nu_1+\nu_2), w) = B(*\nu_1 + *\nu_2, w)$ $\forall w \in V$

$B(*(\nu_1+\nu_2) - (*\nu_1 + *\nu_2), w) = 0^{\mathrm{vol}=B}$ $\forall w \in V$

modif. $B \Rightarrow *(\nu_1+\nu_2) = *\nu_1 + *\nu_2$

Pro $\alpha \neq 1$ stejně dokáže

$B(\alpha v, w) = \alpha B(v, w)$

2) Ověříme na bázi $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ multiindex $|I| = k$

$(*e_I)\wedge e_I = B(e_I, e_I)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$

$(*e_I)\wedge e_J = B(e_I, e_J)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$

pro $J \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus I$. Avšak $B(e_I, e_J) = 0$

$|J| = k$ $\quad B(e_{i_1}, e_{j_1}) \cdots B(e_{i_k}, e_{j_k})$

Opět z modu generovanosti zjistíme $*e_I = \sum_{\substack{K \\ K \cap I = \emptyset \\ |K| = n-k}} c_K e_K$

$*e_I \wedge e_I = e_1 \wedge \dots \wedge e_n\,(\pm 1)$ neboť $B(e_I, e_I) = \pm 1$ $\quad (B(e_I, e_I) = B(e_{i_1}, e_{i_1}) \cdots B(e_{i_k}, e_{i_k}))$

(z výpočtu nahoře)

$\sum_K c_K e_K \wedge e_I = e_1 \wedge \dots \wedge e_n (\pm 1) \Rightarrow K = \{1, \dots, n\} \setminus I$ a $c_K \neq 0$, ostatní $c_J = 0$

$c_K e_K \wedge e_I = e_1 \wedge \dots \wedge e_n (\pm 1)$

$c_K \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ K & & I \end{pmatrix} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = e_1 \wedge \dots \wedge e_n (\pm 1)$

$\Rightarrow c_K \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ K & & I \end{pmatrix} = \pm 1 \Rightarrow c_K = \pm 1$

$*e_I = \pm *(e_{\{1, \dots, n\} \setminus I})$ $\quad **e_I = *(\pm e_{\{1, \dots, n\} \setminus I}) = \pm(\pm e_{\{1, \dots, n\} \setminus I}) = \pm e_I$

z linearity $* \Rightarrow *^2\left(\sum \nu_j e_j\right) = \sum \nu_j *^2 e_j = \pm \sum \nu_j e_j$ ∎

Pozn: 1) Zobr. $L^2 = \mathbb{1}$ involuce

$L^2 = \pm \mathbb{1}$ involutorní

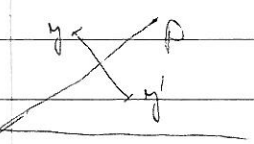
3) střídavá souměrnost

$x \longmapsto -x \longrightarrow * \longmapsto -x = x \quad S^2 = \mathbb{1}$

3) Reflexe podle 2-nadroviny v 3-prostoru

Reflexe podle 1-nadroviny v 2-prostoru

Spc. $\Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \dots \Lambda^{n-2} \to \Lambda^{n-1} \to \Lambda^n$



+ vlastně z LA mám Věta: $*$ je izomorfismus

neboť, když nenulové: $*: \Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V$, tj. $\operatorname{Ker}(*) (= \{\nu \in \Lambda^k V \mid *\nu = 0\}) \neq 0$

Nezmi $0 \neq \nu \in \ker(*)$

$** \nu = \pm \nu$

$\uparrow$ bod 2, V4

$*0 = \pm \nu \Rightarrow$ ↯ s regulárností ν

0

- dobře uvidíme z LA: $*$ je surjektivní

$* : \Lambda^k V \to \Lambda^{m-k} V$

$\Lambda^k V \cong \ker * \oplus \operatorname{Im} *$ $\quad \dim \Lambda^k V = \dim \ker * + \dim \operatorname{Im} *$

$\binom{m}{k} = 0 = \dim \operatorname{Im} *$

$\binom{m}{m-k} = \dim \Lambda^{m-k} V = \dim \operatorname{Im} * \Rightarrow \operatorname{Im} * = \Lambda^{m-k} V$

Smíšený a zmíšený indexy

Nechť (V, B) je vektorový prostor s nedeg. symetrickou bilineární formou ($B \in \bigotimes^2 V^*$)

Definujme (musí být lin.) isomorfismy

$b : V \to V^*$ $\quad \# : V^* \to V$ $\quad$ (V je konečné dimenze)

$(b\nu)(w) := B(v, w)$ $\forall v, w$ $\quad B((\# \alpha, w)) = \alpha(w)$ $\forall \alpha \in V^*, \forall w \in V$

Korektnost b... jasná

Korektnost $\#$: ↯: $\#\alpha = \nu_1$, $\#\alpha = \nu_2$

$B(\nu_1, w) = \alpha(w)$

$B(\nu_2, w) = \alpha(w)$

$B(\nu_1, w) - B(\nu_2, w) = \alpha(w) - \alpha(w) = 0$

$B(\nu_1 - \nu_2, w) = 0$ $\quad$ nedeg. $\forall w$ $\quad \nu_1 - \nu_2 = 0 \Rightarrow \nu_1 = \nu_2$ ↯

Pozn: $B(e_i, e_j) = b_{ij}$, $\left(\sum \nu^i e_i\right)^\flat = \sum b_{ij} \nu^i \varepsilon^j$

$\sum \nu^i b_{ij} = \nu_j$

$\left(\sum \nu^i \delta_{ij} = \nu^j = \nu_j\right)$

$\sum \nu^i \eta_{ij} = \nu^j \neq \nu_j$ obecně

Definice 1.9

Nechť g je symetrická bilineární nedegenerovaná diferenciální forma. f nechť je funkce

Pak $g(\operatorname{grad} f, X) = (df)(X)$ $\forall X \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$

Korektnost

$\forall m \in U$ $\quad g_m((\operatorname{grad} f)_m, X_m) = (df)_m X_m$ $\quad \forall X_m$ $\quad X_m$ je vektor X je vektorové pole

$X : m \longrightarrow X_m \in \mathbb{R}^k$

$\hat{\imath}$

jednoznačnost grad f z nedegenerovanosti g

Divergence reálného pole:

g je nedegenerovaná, $\exists$ izomorfismus $\flat$, $\sharp$ dvě bilineární diferenciální formy. $\quad b(v) = g_{ab} v^b$

$X \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ $\quad \sharp(v) = v^\sharp$

$*d*X^\flat$

diferenciální 1-forma $\in V^*$ v každém bodě m

$(n-1)$-forma (vnější d(f)) $\quad \| \quad (\mathbb{R}^n)^*$

n-forma

$n \cdot m$ = 0-forma, funkce

Př. $div X$, $X \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^2)$

$X_m = X^1(m) e_1 + X^2(m) e_2$, $g = euc_2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ $\quad (e_1, e_2)$ kanonická báze

$X_m^\flat = (X^1(m) e_1 + X^2(m) e_2)^\flat = X^1(m) e_1^\flat + X^2(m) e_2^\flat =$ $\quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ kanonická báze $(\mathbb{R}^2)^*$

$X^1(m)\varepsilon^1 + X^2(m)\varepsilon^2 \quad \forall m$ $\quad X^\flat = X^1\varepsilon^1 + X^2\varepsilon^2$ $\quad (dx^1)_m = \varepsilon^1(m) \quad \forall m \in U$

~~$dX = \frac{\partial X}{\partial x^1} dx^1 \varepsilon^1 + \frac{\partial X}{\partial x^2} dx^1 \varepsilon^2 = 0$~~

de Rhamova projekce

$*X^\flat = ?$ $\quad *e_1 = \pm e_2$ $\quad *(e_1 \wedge e_1) = g(e_1, e_1) e_1 \wedge e_2$ $\quad *\varepsilon^1 = -\varepsilon^2$

$*e_2 = \pm e_1$ $\quad (\pm e_2) \wedge e_1 = e_1 \wedge e_2$ $\quad *\varepsilon^2 = +\varepsilon^1$

$*X^\flat = -X^1_m \varepsilon^2 + X^2_m \varepsilon^1$

$d*X^\flat = -\frac{\partial X^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial X^2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial X^2}{\partial x^1} dx^2 \wedge \varepsilon^1 = \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$

$\|$ $\quad \cap$

$* \left[- \left(\quad \right) \right] = - \frac{\partial X^1}{\partial x^1} - \frac{\partial X^2}{\partial x^2}$

Cp. Δ g modg.

$\Delta : \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k \mathbb{R}^n)$

$\Delta \alpha = d*d*\alpha + *d*d\alpha$

$n-k$

$n-k+1$

$n-(k+n-1) = k-1$

$= R$

Spec. $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^n \mathbb{R}^n)$ $\quad \Delta\alpha = \underbrace{d*d*\alpha}_{0} + *d*d\alpha = *d*d\alpha$

$div\, grad\, \alpha = {}^k *d*(grad\, \alpha)^\flat \quad \alpha \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$

Stačí $(grad\, \alpha)^\flat = d\alpha$

$g(\text{grad}\alpha, X) = (d\alpha)(X)$

def grad ⇓

$(\text{grad}\alpha)^\flat(X)$ tj. $(\text{grad}\alpha)^\flat(X) = (d\alpha)(X)\ \forall X \Rightarrow (\text{grad}\alpha)^\flat = d\alpha$

tj. $\Delta\alpha = *d*d\alpha$

$div(\text{grad}\alpha) = *d*d\alpha \qquad \Delta\alpha = div\ \text{grad}\,\alpha$

Pozn: Homologie dle vlastností Δ

$0 \to \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \qquad \Lambda^{n-1} \to \Lambda^{n-1} \to \Lambda^n \to 0$

$0 \leftarrow \Lambda^0 \xleftarrow{*d*} \Lambda^1 \xleftarrow{*d*} \Lambda^2 \qquad \Lambda^{n-1} \leftarrow \Lambda^{n-1} \leftarrow \Lambda^n \leftarrow 0$

2. Fourierovy řady a úvod do Hilbertových prostorů

Motivace: LA se sk. součinem na nekonečně dimenzionálním vektorovým prostoru
- co nejvíce analytických vlastností, ale analogie věty z LA platily
- prostory stavů objektů QP (modely prostoru stavů)

Definice 2.9 pre-Hilbertův prostor $(H, (.|.))$
Každý vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $(.|.): H \times H \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ nazýváme pre-Hilbertův prostor.

Definice 2.10 Hilbertův prostor $(H, (.|.))$
Pre-Hilbertův prostor nazýváme Hilbertovým, pokud každá $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$, $(a_n)_n$ cauchyovská $\Rightarrow (a_n)_n$ konverguje

Definice 2.11
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ buď posloupnost $(a_n)_n \subseteq (P, \varrho)$ nazýváme cauchyovskou, pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)(\varrho(a_m, a_n) < \varepsilon)$

Pozn: Dokažte (P, ϱ) metrický prostor dotaz indukovaný normou, tj. $(P, |\cdot|)$ a $\varrho(x,y) = |x-y|$.
pak cauchyovskost $\varrho(a_m, a_n) < \varepsilon \iff |a_m - a_n| < \varepsilon$
Víme (Bolzano-Cauchyova věta) že $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a $(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)$ tj. $|a_m - a_n| < \varepsilon \Rightarrow$
$\exists a \in \mathbb{R}$ $(a = \lim_{n\to+\infty} a_n)$ $(\lim a_m = a \Rightarrow \lim \exists \Rightarrow$ konv.)
konverguje $\Rightarrow \exists \lim \Rightarrow \exists a, \lim a_n = a$

Matematika pro fyziky I

26. 3. 2014

Připomenutí:

pre-Hilbertův p. = vektorový prostor se skalárním součinem

cauchyovská posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ |a_m - a_n|_H < \varepsilon$

$|x|_H := \sqrt{(x,x)}$ $(H, (,))$

konvergentní posloupnost $(a_n) \subseteq H \equiv \exists A \in H\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - A| < \varepsilon$

- silnější složitější splnit

konvergentní $\Rightarrow$ cauchyovská

- pre-Hilbertův prostor, kde cauchyovská posloupnost implikuje konvergentní, se nazývá Hilbertův p.

Pozn: Říkáme-li prostor (resp podprostor), myslíme vektorový prostor (resp podprostor)

Př. $(\mathbb{R}, (,))$, $(x,y) := xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ... pre-Hilbertův prostor $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{R}$)

$(x+\bar{x}, y) = (x+\bar{x})y = xy + \bar{x}y = (x,y) + (\bar{x},y)$

$(x,x) = x^2 \geq 0$

$(x,x) = x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Př. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, q \neq 0, p \in \mathbb{Z}\right\}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$ (ne nad $\mathbb{R}$ (e $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$; Cauchyův odhad zbytku Taylorova ~~pol~~ polynomu, iracionalita e)

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = ?$

$\mathcal{B} = \{1\}$, $1 \in \mathbb{Q}$

- lineárně nezávislost: $\alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$

generuje: $\pi \in \mathbb{Q}$ $\pi = \pi \cdot 1$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = 1$

$(x,y) = xy$ $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Q}$ je pre-Hilbertův p.

Lemma 1.8

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská posloupnost $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0\ \forall p \geq 0\ |a_{n_0} - a_{n_0+p}| < \varepsilon$.

Dk:

cauchyovská $\equiv \forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists \tilde{n}_0 > 0\ \forall \tilde{m}, \tilde{n} \geq \tilde{n}_0\ |a_{\tilde{m}} - a_{\tilde{n}}| < \tilde{\varepsilon}$

snažíš se definovat: $\Rightarrow$ zadej mi ε. Polož $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, $n_0 = \tilde{n}_0$ $|a_{\tilde{m}} - a_{\tilde{n}}| < \tilde{\varepsilon}$ $\forall \tilde{m}, \tilde{n} \geq \tilde{n}_0$.

$\tilde{m} = n_0$, $n_0 + p \geq \tilde{n}_0 = n_0 \Rightarrow |a_{n_0} - a_{n_0+p}| < \varepsilon$

obj. implikace: $\Leftarrow$ zadej mi $\tilde{\varepsilon}$

$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ... $\exists n_0\ \forall p > 0\ |a_{n_0} - a_{n_0+p}| < \varepsilon$. Chci vzít něco z $|a_m - a_n|$:

$|a_m + a_{m-1} - a_{m-1} + a_{m-2} - a_{m-2} + \ldots + a_{n_0} - a_{n_0} - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} + a_{m-2}| + \ldots +$

$+ |a_{n_0+1} - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n_0+1} - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_{n+p}| \leq$

$< \varepsilon$

$\Leftarrow \varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon = (m - m_0 + 1)\varepsilon \qquad m_0 = m-1 \qquad |a_{m-1} - a_m|$

vezmi $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{m - m_0 + 1}$ (Dú zkusím) ▨

($\sim p$)

P_{ij} $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

je hilbertův p., $(a_m)_m \subseteq \mathbb{R}$, víme $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m_0 \; \forall p \geq 0 \; |a_m - a_{m+p}| < \varepsilon \Rightarrow \exists A, \lim_{m \to +\infty} a_m = A$

(Bolzano-Cauchyova věta, 1. semestr)

= definuje Hilbertova prostoru → opravdu je hilbertův!

- $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot)), (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i, \quad x = (x^1, \dots, x^n)$

$y = (y^1, \dots, y^n)$

Víme $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ konverguje k $A = (A^1, \dots, A^n) \in \mathbb{R}^n \iff \forall i = 1, \dots, n \quad a_m^i \to A^i, \; m \to +\infty$

(konvergence v $\mathbb{R}^n$ = konvergence po složkách)

Proč?

$|a_m^i - A^i| < \varepsilon \equiv |a_m^1 - A^1| < \varepsilon \wedge |a_m^2 - A^2| < \varepsilon \wedge \dots \wedge |a_m^n - A^n| < \varepsilon$

„globální": $|a_m - A|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$

a) - euklidovská v normě $\sqrt{(a_m^1 - A^1)^2 + \dots + (a_m^n - A^n)^2} \leq |a_m^1 - A^1| + \dots + |a_m^n - A^n| < n\varepsilon \; (\varepsilon + \dots + \varepsilon)$

tzv. (unrae minimum) kosočtvercová norma

kontroluj složky ⇒ kontroluj globální

b) $|a_m^i - A^i| \leq \sqrt{(a_m^1 - A^1)^2 + \dots + (a_m^n - A^n)^2} < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, n$

↑ každý tento člen je i zde

- kontroluj globální ⇒ kontroluj složky

Máme ukázat: $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ cauchy ⇒ $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konverguje

Zjevně: $(a_m)_m$ cauchy ⇒ $(a_m^i)_m$ cauchy $\forall j$

(stejně: globální kontrola normou implikuje složkovou kontrolu)

$(a_m^i)_m \subseteq \mathbb{R} \overset{\text{B-C věta}}{\Longrightarrow} a_m^i \to A^i, \; m \to +\infty$

$A = (A^1, \dots, A^n)$ je limitou $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$, neb je limitou složkovou (dle viz výše ⇒ je i limitou globální)

P_{ij} $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Q}$ s normou $(x,y) = xy$ není hilbertův prostor, $|x|_a = |x|$

Dk. nejdeme cauchyovku, která není konvergentní

$a_m = \frac{\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^m \rfloor}{10^m}$ (podmínka celé části) $, \; m \in \mathbb{N}: \; a_1 = 1{,}4, \; a_2 = 1{,}41, \; a_3 = 1{,}414, \dots$

$|a_m - a_{m+1}| < 10^{-m} \quad |a_m - a_{m+p}| < 10^{-m}$ ⇝ ekvivalentní s cauchyovou p.

$|a_m - a_n| \leq 10^{-\min\{m,n\}}$ ⇝ def. Cauchyho p.

$1 > \varepsilon > 0 \quad n_0 = -\log\varepsilon \quad \forall m,n \geq n_0 = -\log\varepsilon$

$|a_m - a_n| \leq 10^{-\min\{m,n\}} \leq 10^{-n_0} = 10^{-(-\log\varepsilon)} = \varepsilon$

$\min\{m,n\} \geq n_0 \quad \forall m,n \geq n_0$

$\lim a_n = ?$

$a_n \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n\sqrt{2} \rfloor}{10^n} = \sqrt{2} \qquad \sqrt{2} := \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\} \in \mathbb{R}$

topologická extenze (všechny pos. konvergující k $\sqrt{2}$)

$\{r \in \mathbb{Q}, r > 5\} = (5, +\infty)$

$M := \{x > 0 \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot x > 2\} = \sqrt{2}$

$|a_m - \sqrt{2}|_{\mathbb{Q}} = |a_m - \sqrt{2}|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \qquad |a_m - A|_{\mathbb{Q}} = |a_m - A|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \to A = \sqrt{2} \not\in \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ▨

rovnice platí v $\mathbb{R}$ | norma pro $\mathbb{R}$ | vím, že konverguje k $\sqrt{2}$

Věta 2.9 Cauchy-Schwarzova nerovnost

$(H, (\cdot,\cdot))$ buď pre-Hilbertův prostor. Pak $\forall x,y \in H$ je $|(x,y)_H| \leq |x|_H |y|_H$

(abs hodnota)

Dk: Předpokládejme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se liší jen v detailech) $x,y \in H$ platí $\leq$, když $y \neq 0$:

def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\lambda) = (x + \lambda y, x + \lambda y)_H \in \mathbb{R}$

$= (x,x)_H + (x, \lambda y)_H + (\lambda y, x), \lambda^2 (y,y)_H = |x|_H^2 + 2\lambda (x,y)_H + \lambda^2 |y|_H^2$

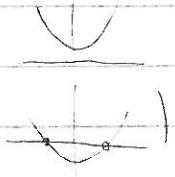
$f(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ a definice skalárního součinu (dělám se součin dvou stejných věcí)

$(z,z) \geq 0 \quad (\Rightarrow f(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda)$

f kvadratická, vedoucí koeficient u λ^2 je $|y|^2 \geq 0 \Rightarrow D \leq 0 \quad (D < 0$

$D = 4(x,y)^2 - 4|y|_H^2 |x|_H^2 \leq 0$ $\qquad D > 0$

$b^2 - 4ac$



$(x,y)_H^2 \leq |x|_H^2 |y|_H^2$

$|(x,y)_H| \leq |x|_H |y|_H$ ✓ ▨

Pozn: Silnější úplnost (= cauchyovskost $\Rightarrow$ konvergence) - nepoužili jsme

Platí i pro nekonečnou dimenzi. Nepoužilo se pozitivní definitnost ale jen pozitivní semidefinitnost $(\cdot,\cdot)_H$

[Pozn: def. $\equiv$ pos. semidef. + $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$]

$(x,x) \geq 0$

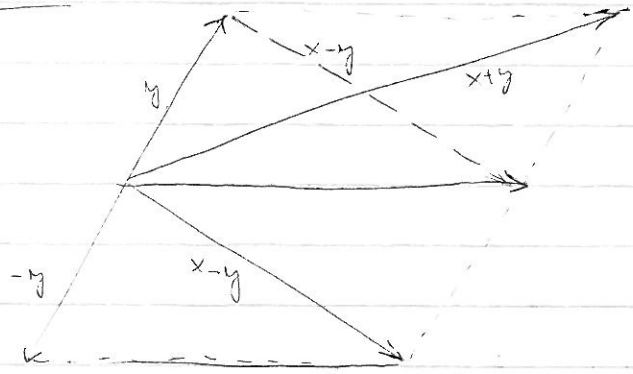
Věta 2.10 Rovnoběžníkové pravidlo

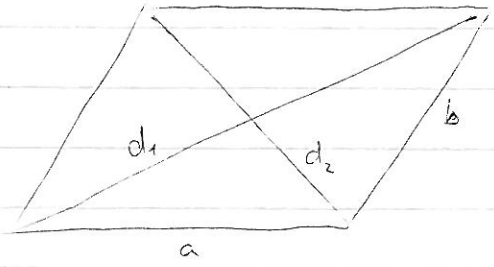
Nechť $(H, (\cdot,\cdot))$ je pre-Hilbertův p. Pak $\forall x,y \in H$ je $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, kde $\|\cdot\| = |\cdot|_H$

Dk: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, spec. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$(x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) + (x,-y) + (-y,x) + (-y,-y) =$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2$$ ▣

Pozn:





Věta 2.11 Trojúhelníková nerovnost

Nechť $(H, (\cdot,\cdot))$ je pre-Hilbertův prostor. Pak $\forall a,b \in H$: $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$, kde $\|\cdot\| = |\cdot|_H = \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$

Dk

Cauchy-Schwartz $\cos\frac{(a,b)}{ab} \leq 1$

$$(\|a\| + \|b\|)^2 = \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 \geq \|a\|^2 + 2|(a,b)_H| + \|b\|^2 \geq \|a\|^2 + 2\mathrm{Re}(a,b) + \|b\|^2$$

(zúžení podstatným reálnou částí)

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) = \|a\|^2 + (a,b) + \overline{(a,b)} + \|b\|^2 =$$

$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

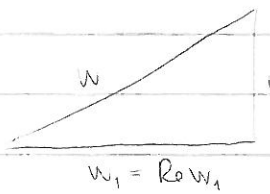
$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\mathrm{Re}(a,b)$$

→ srovnáním s předchozím $\leq (\|a\| + \|b\|)^2 \underset{\|\cdot\| \geq 0}{\Rightarrow} \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ ▣

Pozn: • Použili jsme $|(a,b)| \geq \mathrm{Re}(a,b)$

$|w| \geq \mathrm{Re}(w)$

$w \in \mathbb{R}$ → triviálně $|w| = \max\{w, -w\}$, $w \in \mathbb{C}$



$w = w_1 + iw_2$

$w_1^2 + w_2^2 \geq |w_1|^2 \Rightarrow |w| \geq |w_1| \geq w_1 = \mathrm{Re}\, w$

• Každý pre-Hilbertův prostor je normovaný

$\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}_0^+$

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definice:

H je vektorový prostor nad tělesem K ($\mathbb{R}/\mathbb{C}$), $M \subset H$ nazveme bází $H \iff$ 1) M je lineárně nezávislá, 2) M generuje H

Definice:

M generuje $H \iff \forall h \in H \; \exists N$ konečná, $N \subset M$, $\exists c_1, \dots, c_{\#N} \in K$, $h = \sum_{i=1}^{\#N} c_i m_i$, $m_i \in N$ $\forall i = 1, \dots, \#N$

Definice:

M je lineárně nezávislá $\iff \forall N \subset M$ konečná je N LN (tedy jak prvky mají v LK, tj. $N = \{m_1, \dots, m_p\}$ $(\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K)$ $(\sum \lambda_i m_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \; \forall i = 1, \dots, p)$ (jediná triviální lin. kombinace je nulová))

Pozn: Naše problémy s definicí

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$) $H = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$

$a, b \in \mathbb{R}$ umíme

$a \cdot b \in \mathbb{R}$ umíme, tím spíše když $a \in \mathbb{Q}$

Báze $\mathbb{R}$ jako vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$?

$B = \{1\}$ $e = k \cdot 1$, $k \in \mathbb{Q}$ $\nexists k$

$B = \{1, e\}$ LN

$q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot e = 0$

$q_1 \neq 0$ $1 = -\frac{q_2}{q_1} e \Rightarrow 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (je iracionální)

$q_2 \neq 0$ $e = -\frac{q_1}{q_2} 1 \Rightarrow e \in \mathbb{Q}$ ↯ → nulová je právě jen nulová kombinace

ale $\pi = q_1 1 + q_2 e$ ... nelze

$\Rightarrow B = \{1, e, \pi\}$ ... musím přidat další iracionální číslo

Cantor/Dedekind ... iracionálních čísel je nekonečně mnoho

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je nespočetná

Trans $= \{x \in \mathbb{R} / \nexists$ nenulový polynom $p \neq 0$ s celočíselnými koeficienty, že $p(x) = 0\}$

transcendentní číslo

Trans $\subset I$ = nejsou kořenem lineárního polynomu s celočíselnými koeficienty

(např. π není kořenem žádného polynomu $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

- transcendentních čísel tedy nespočetně mnoho

(ne každé je speciální číslo - jako polynomů, i koeficienty celočíselné je spočetně)

→ Hamel Báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ se jí říká Hamelova

Definice 2.12 Ortogonální systém (OG-systém), ortonormální systém (ON-systém)

$(H, (.,.))$ pu-Hilbertův p., $M \subset H$ mají ortogonální systém $\iff \forall e, f \in M, e \neq f$ platí, že $(e,f) = 0$. Ortogonální systém ~~nazval~~ $M \subset H$, $(H, (.,.))$ pu-Hilbertův p.) tvoří ON-systémem $\iff \forall g \in M$ je $(g,g) = \|g\|^2 = 1$

Pozn: M OG systém $\Rightarrow \exists M'$ ON-systém, $f \in M' \iff f(f,f) \in M$ (f vznikne normováním prvků z M)

$v \in M \rightsquigarrow \frac{v}{\|v\|}$

$$\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|^2}(v,v) = \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 1$$

⚠ Uvažujme množství I je indexová množina a $\{c_\alpha, \alpha \in I\}$ množina nezáporných čísel. Řekneme že $c \in \mathbb{R} \vee c = +\infty$ je součtem řady $\sum_{\alpha \in I} c_\alpha \iff c = \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} c_\alpha \mid F \subseteq I, \#F < +\infty, F \text{ je konečná}\right\}$

(~ součet přes nespočetnou množinu)

Matematika pro fyziky

3.4.2014

Mimo: $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|$ konverguje, pokud pro libovolnou konečnou podmnožinu $F\subseteq\mathbb{N}$ a pokud $\exists P, \sum_{i\in F}|\alpha_i|<P$ resp. smysl. dokázat. Nebo chceme $\forall\varepsilon$ $\exists m_0\ \forall m\geq m_0, |s_m - s|<\varepsilon$ kde $s_n=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$ (konv. $\sum$ k s). Mohu: $\sup\{\sum_{i\in F}|\alpha_i|,\ F\in\mathbb{N}, F \text{ konečná}\}$. $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$ konečné číslo a menší než P. Tj. sup nejen existuje ale je i konečné (z omezenosti $\sum|\alpha_i|<P$) Zjevně $s=\sup\{\sum|\alpha_i|, F\subseteq\mathbb{N}, \#F<+\infty\}$, splňuje, že $\forall\varepsilon, \exists m_0$ z def. suprema. ↳ def. sup, bod 1

Platí $\sum_{j\in F}|\alpha_j|<P$ $\forall F\subseteq\mathbb{N}$ kon. / sup F

$$\sup_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}\\ \#F<+\infty}}\sum_{j\in F}|\alpha_j|\leq P \rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty}|\alpha_j| = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{m}|\alpha_j|\right\} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j\in\underbrace{\{1,\dots,m\}}_{F}}|\alpha_j|\right\}$$

def. sup, bod 2

↳ motivace k definici

Definice 2.13

M buď množina (indexová). Řekneme, že řada $\sum_{j\in M}\alpha_j$ konverguje, pokud $\forall F\subseteq M$ konečnou, je $\sum_{i\in F}\alpha_i<P$, kde $\exists P\in\mathbb{R}$.

Pozn: • Konvergence již byla definována pro $M=\mathbb{N}$ Je přesně tato definice v souladu s definicí dosavadní? Ano, viz motivace výše.

• Nevíme totiž, zda v Hilbertových prostorech existují spočetné maximální množiny.

Definice 2.14

Řekneme, že $S\subset H$ ($(H,(,))$ pre-Hilbertův) ON-systém je úplný, pokud k každému $f\in H$ splňující $(f,s)=0\ \forall s\in S \rightarrow f=0$.

Pozn: Úplný ON-systém (Karlín), pre-Hilbertova báze (Západ), báze (Anglie). Uvidíme, že $\exists$ ÚONS, jež nejsou bází (ve sporu LA)

Př. trigonometrický systém v $L^2(I)$, $I=(a,b)$

Úloha

Mějme pre-Hilbertův prostor $(H,(,))$, $x\in H$ a $Y=\mathcal{L}(\{u_1,\dots,u_j\})$ (konečně dim. podprostor, BÚNO $\{u_i\}_{i=1}^{j}$ je ON-báze). Najdi $y\in Y$, že $\|x-y\|$ je minimální.

Věta 2.12 Gaussův aproximační problém

Úloha výše má právě 1 řešení. Toto řešení je $y=\sum_{i=1}^{j}(x,u_i)u_i$

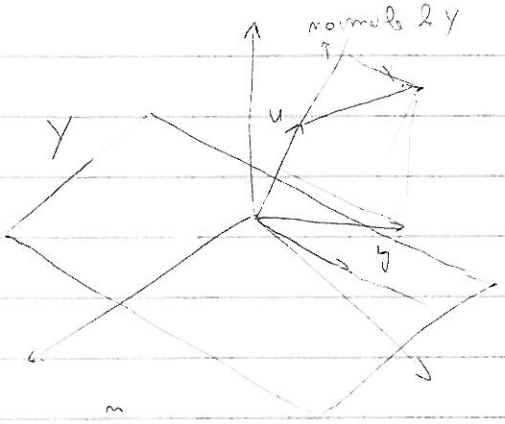
Dk: $\lim 0 \le \left\| x - \sum_{i=1}^{j} \beta_i u_i \right\|^2 \quad \forall \beta_i \in \mathbb{C} \quad = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{j} \beta_i (x, u_i) - \sum_{i=1}^{j} \bar{\beta}_i (x, u_i) +$

$$+ \sum_{i,k=1}^{j} \beta_i \bar{\beta}_k (u_i, u_k) = \|x\|^2 - \sum_i \beta_i (x, u_i) - \sum_i \bar{\beta}_i (u_i, x) + \sum_{i=1}^{j} |\beta_i|^2 = \|x\|^2 - \sum_i |(u_i, x)|^2 -$$

$$+ \sum_i |(u_i, x) - \beta_i|^2 \quad \text{zvolím-li } \beta_i = (u_i, x) \ldots \text{dojde k minimalizaci.}$$

$$(a+b)(\overline{a+b}) = |a+b|^2 = |a|^2 + b^2 + \bar{a}b + a\bar{b}$$

Pozn



y je ortogonální projekce

V LA $u = \sum_{a=1}^{m} \lambda^a e_a \quad / (e_b, \cdot)$

$$(e_b, u) = \sum_a \lambda^a (e_b, e_a) = \sum_a \lambda^a \delta^a_{ba} = \lambda^b$$

Souřadnice vůči bázi jsou skalární výše tedy, až na bázi jsou to souřadnice v zobrazování do $Y \subseteq H$.

Připomenutí: $(H, (\,,\,))$ je unitární prostor, $e, f \in H$, $e \perp f \iff (e, f) = 0$ $M, N \subseteq H$,

$M \perp N \iff \forall m \in M \ \forall n \in N$ je $m \perp n$ $((m, n) = 0)$

Věta 2.13

$(H, (\,,\,))$ je unitární prostor, $\{u_1, \ldots, u_j\}$ ON-systém (konečný), $Y = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots, u_j\})$ $x \in H$.

Pak řešení ŷ Gaussova aproximačního problému splňuje $x - \hat{y} \perp \hat{y}$, a dokonce $\{x - \hat{y}\} \perp Y$

Dk: $\hat{y} \in Y$ „sice" $\forall f \in Y \ f \subset Y \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i u_i$. Spočteme $(x - \hat{y}, f) = (x - \sum_{i=1}^{j} (u_i, x) u_i,$

$$\sum_{k=1}^{j} \alpha_k u_k) = (x, \sum_{k=1}^{j} \alpha_k u_k) - (\sum_{i,k=1}^{j} \alpha_k (u_i, x) u_i, u_k) = (x, \sum_k \alpha_k u_k) - \sum_{i,k} \alpha_k (u_i, x) \underbrace{(u_i, u_k)}_{\delta_{ik}} =$$

$$= (x, \sum_k \alpha_k u_k) - \sum_k \alpha_k (u_k, x) = \ldots = 0 \quad (\text{symetrie}) \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

„Správní závěrečné, že jsem zapomněl závorku." (LK)

Pozn: $x \in H$, $\{u_1, \dots, u_j\}$ ON - systém, $P(x) = \sum_{i=1}^{j} (x, u_i) u_i$, $P: H \to H$ ... ortogonální projekce.
$P(f) = \sum_{i=1}^{j} (f, u_i) u_i$. Dokaž: $P^2 = P$ (idempotent) ($P^n = P$)

Při $(Px, y) = (x, Py)$, neboť $(Px, y) = \left(\sum_{i=1}^{j} (x, x_i) u_i, y\right) = \sum_{i=1}^{j} \overline{(x, u_i)} (u_i, y) = \sum_{i=1}^{j} (u_i, (x, u_i) y) =$
($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$= \left(u_i, \sum_i (x, u_i) y\right) = \overline{\left(\sum_i (x, u_i) y_i u_i\right)} = \overline{(y, \sum (x, u_i) u_i)} = (y, Px)$ .. sorry. (:)

bodům to nemá zkazit to pravý

Zmrd Okamo $(x, Py) = \left(x, \sum_{i=1}^{j} (y, u_i) u_i\right) = \left(\sum_{k=1}^{s} (x, u_k) u_k, \sum_{i=1}^{j} (y, u_i) u_i\right) =$

$\{u_{j+1}, \dots\}$ ji doplníme $\{u_i\}_{i=1}^{j}$

$\sum_{k=1}^{s} \overline{(x, u_k)} \sum_{i=1}^{j} (y, u_i) \underbrace{(u_k, u_i)}_{\delta_{ki}} = \sum_{k=1}^{s} (x, u_k)(y, u_k)$

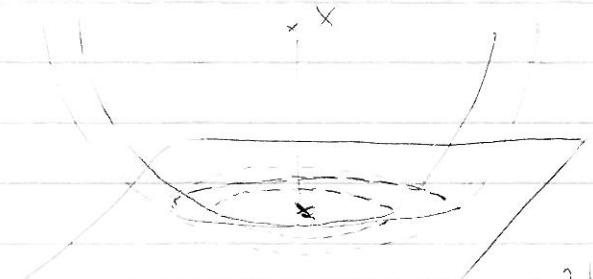
$(Px, y) = \left(\sum_{i=1}^{j} (x, u_i) u_i, \sum_{k=1}^{s} (y, u_k) u_k\right) = \sum_{i,k} \overline{(x, u_i)} (y, u_k) (u_i, u_k) = \sum_{k=1}^{s} \overline{(x, u_k)} (y, u_k)$

Věta 2.14

Nechť $(H, (,))$ je pu-Hilbertův prostor a $Y \subseteq H$ podprostor, který je Hilbertův prostor, pak pro $\forall x \in H$, $\exists! \hat{y} \in Y$, pro které $\|x - \hat{y}\|$ je minimální

Dk: $\{\|x - y\|, y \in Y\} \subseteq \mathbb{R}_0^+$, $\inf\{\|x - y\|, y \in Y\} \in \mathbb{R}_0^+$, neboť $\{\|x - y\|, y \in Y\}$ je zdola omezená (nulou)
$\inf = \gamma$

Vezmi $(y_m)_{m \in \mathbb{N}^+}$ že $\|x - y_m\| \to \gamma$, $m \to +\infty$ (Existuje z def. infima) Dokážeme cauchyovskost



$(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ | $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$?, $u = x - y_n$, $v = x - y_m$

$\|y_n - y_m\|^2 = \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u + v\|^2 =$

tch 10

$\left(\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\right)$

$= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - (y_m + y_n)\|^2 =$

$= 2\|x - y_n\| + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2 = 4\gamma^2 - 4\gamma^2 = 0$, $n, m \to +\infty$

$\|x - y_n\| \to \gamma$, $\|x - y_m\| \to \gamma$, $\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\| \to \gamma$

$\forall \varepsilon \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \|x - y_n\| \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$. $\forall \varepsilon, \exists m_0, \forall m \geq m_0 \; \|x - y_m\| \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$

$N = \max\{n_0, m_0\}$

$\|y_M - y_N\|^2 = 2\|x - y_M\|^2 + 2\|x - y_N\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_M + y_N}{2}\right\|^2 \leq 2\frac{\varepsilon^2}{64} + 2\frac{\varepsilon^2}{64} - 4\frac{\varepsilon^2}{64} = 0 \; \frac{\varepsilon^2}{64}$ $N \geq M$

Zatím cauchyovskost Y je dle prostředku Hilbertův $\Rightarrow$ $\forall$ cauchyovské v Y je konvergentní $\Rightarrow \exists y_0$

že $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Toto y_0 je hledaným řešením, neboť

a) Jiným $\|x-y_0\|^2 \le \|x-(y_0+\alpha y)\|^2 = \|x-\hat{y}_0\|^2$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$ $z\bar{z}=|z|^2$

$-2\alpha(x-y_0,y) + |\alpha|^2\|y\|^2$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ $\forall y\in Y$

Zvolím $\alpha = \frac{(x-y_0,y)}{\|y\|^2}$

$$\|x-y_0\|^2 \le \|x-y_0\|^2 - \frac{(x-y_0,y)^2}{\|y\|^2} \Rightarrow (x-y_0,y)=0$$

b) $x-y_0$ je tedy kolmé na každý $y\in Y$ $\|x-y\|^2 = \|(x-y_0)-y_0-y\|^2 = (x-y_0,y_0) - (x-y_0,y)$

$(x-y_0+y_0-y,\ x-y_0+y_0-y) = (x-y_0,x-y_0) - (x-y_0,y_0-y) = 0$ dle a

$$(y_0-y,x-y_0) - (y_0-y,y_0+y) \ge \|y_0-x\|^2 + \|y_0-y\|^2$$

0

$(x-y_0,y_0)=0$ dle a

$(x-y_0,y)=0$ dle a

Tj. $\|x-y\|^2 \ge \|y_0-x\|^2 + \|y_0-y\|^2$ (existence)

Jednoznačnost: Ve hypotéze $\|y_m-y_n\|^2$ vezmu $y_{2m-1}=z_0$, $y_{2m}=y_0$, kde $y_0 \neq z_0$ jsou pro spor různá řešení aproximačního problému, jiná než nejlepší.

$(y_n)\subseteq Y$. Pro větší m je $\|y_m-y_n\|$ lib. omezit, což nyní znamená:

$\|z_0-y_0\| < \varepsilon \Rightarrow z_0=y_0$ (ř sp. $z_0\neq y_0$) $\Rightarrow \|z_0-y_0\| \neq 0$

$\|z_0-z_0\|$ $=: k$

$\|y_0-y_0\|$ $\|z_0-y_0\| < \frac{k}{3}$

$\|y_0-z_0\|$

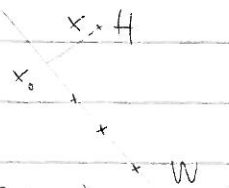
□

Matematika pro fyziky

10. 4. 2014

Minule: $\forall x \in H \; \exists! \, x_0 \in W$ t. ž. $\|x - x_0\|$ je minimální, kde H pre-Hilbertův a W je Hilbertův / úplný vůči normě $\|\cdot\|$ zúžené na W

Shrnutí: Zvolím H Hilbert
Vezmu W uzavřený
Tak platí věta.



Pozn: Budeme mít prostor $H = L^2(X, \lambda), X \subseteq Y$ (Y, W, λ) (nap. $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n, \lambda_{\mathbb{R}^n})$) a v něm $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ (Schwartz) vekt. podprostor, který není uzavřený (tím spíš není úplný)

Definice 2.15

H je pre-Hilbertův p., $W \subset H$ úplný. Pak zobrazení $x \in H \longrightarrow x_0 \in W$ označím jako projekci P_W.

Pozn: $P_W : H \longrightarrow W$ zvýrazní $P_W : H \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow W$ (značíme pro mě), neboť $\forall x \in W \; \exists! \, x_0 \in W$
$P_W(x_0) = x$ (Dohromady $x_0 = x$)

Lemma 2.15

H je pre-Hilbertův a $W \subset H$ úplný. Pak P_W je projekce, tj. $P_W \circ P_W = P_W$ a $P_W^* = P_W$

Dk: 1) $P_W \circ P_W = P_W$ je triv. ($P_W x = x_0$, $P_W x_0 = x_0$ LS x_0)

2) $P_W^* = P_W$? $(P_W x, y) = (x, P_W y)$ (1) viz dk. z minule pro projekce na konečně rozměrném podprostoru. ∎

Definice 2.16

H je pre-Hilbertův p. se skalárním $(\,,)$ a $A : H \longrightarrow H$ je lineární zobrazení. Pak $L : H \longrightarrow H$ nazveme adjunkcí (nebo operátorem sdruženým k A), pokud $\forall x, y \in H$ $(Ax, y) = (x, Ly)$. Takový operátor označíme A^*. Operátor (= lin. zobrazení) A nazveme samosdruženým (samoadjungovaným), pokud $A = A^*$.

Pozn • Umíme-li A^* i A_1^*, A_2^* adj. k A, $(x, A_2^* y) = (Ax, y) = (x, A_1^* y)$ $\forall x, y \in H \overset{\text{b. p.}}{\Longrightarrow}$
$(x, A_2^* y - A_1^* y) = 0 \;\; \forall x, y \Rightarrow (x, (A_2^* - A_1^*) y) = 0 \overset{x = (A_2^* - A_1^*) y}{\Longrightarrow} (A_2^* - A_1^*) y = 0 \;\; \forall y$
$A_2^* y = A_1^* y \Rightarrow A_2^* = A_1^*$ cbd.

• Existence, problém.
Ne vždy pro H Hilbertův prostor, jenž je separabilní.

Definice 2.17

$(H, (\,,))$ pre-Hilbertův prostor nazveme separabilní, pokud v něm existuje úplný ortonormální systém, jenž má spočetný počet prvků.

Pí úplnost ON-systému $\Rightarrow$ úplnost pre-Hilbertova prostoru (tj. hilbertovost H)?

Ne: • $(\mathbb{Q}, (,1)$ $(x,y) = xy$

UONS $\{1\}$? $(x,1) = 0 \iff x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0$. Tj. $\{1\}$ je UONS a $\mathbb{Q}$ není úplný

• $H = -\Delta + x^2$ na $L^2(\mathbb{R}^3)$ $H\psi = -\Delta\psi + (x^2+y^2+z^2)\psi$. Problém s definičním oborem $\mathcal{D}(H) \neq L^2(\mathbb{R}^n)$. Je jen esenciálně samoadjungovaný

• Konečná dimenze $(H, (,))$ a $H = \mathbb{C}^n$

$(z,w) = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}^i w^i$ $\quad (z,z) = \sum_{i=1}^{n} |z^i|^2 = 0$ iff $z^i = 0 \ \forall i \Rightarrow \vec{z} = (z^1, \dots, z^n) = 0$

Adjunkce: $(Az, w) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(Az)^i} w^i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A^i{}_j z^j\right) w^i = \sum_i \sum_j \overline{A^i{}_j} \bar{z}^j w^i =$

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$= \sum_j \sum_i (\overline{A^T})^j{}_i w^i \bar{z}^j = \sum_j (\bar{A}^T w)^j \bar{z}^j = \sum_j \bar{z}^j (\bar{A}^T w)^j = (z, \bar{A}^T w)$

$\Rightarrow A^* = \bar{A}^T$ Tj. adjunkce v $\mathbb{C}^n$ je komplexně sdružená transpozice (v $\mathbb{R}^n$ adjungování je transponování)

Samosdružená / samoadjungovaná $A = A^*$

$A = \bar{A}^T$ v $\mathbb{C} \to$ hermitovská (hermitovsky symetrická)

symetrická $A = A^T$ v $\mathbb{R}^n$

$(* = +)$. Většinou $+ = \overline{\quad}^T$ jim v $\mathbb{C}^n$

!!! • Samosdružený operátor tvoří vel. prostor, neboť: $A, B \in \mathcal{L}(H,H) = Hom(H,H)$, $\exists A^*, B^*$

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$((A+B)x, y) = (Ax + Bx, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^*y) + (x, B^*y) = \dots = (x, (A^* + B^*)y)$

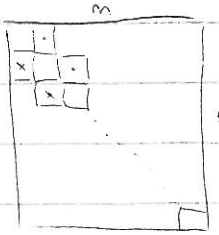
$\Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^* = A + B$

$A \in Hom(H,H)$ $\exists A^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$? $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ $\quad A^* = A$

$(\lambda Ax, y) = \bar{\lambda}(x, A^*y) = \bar{\lambda}(x, Ay) = (x, \bar{\lambda} Ay) \Rightarrow (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A = \bar{\lambda} A^*$

$(\lambda A)^* = \lambda A \iff \lambda A = \lambda A$, platí pouze když

když $\lambda = \bar{\lambda}$, tj. λA je samosdružený op., tj. jde jen o v.p. nad $\mathbb{R}$

• 

jak mile mám ⊡ volnost v ⊠ už ne. Na diagonále je volnost

$n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = s$ Gauss $\frac{n(n+1)}{2} = s$

$\dim \{A \mid A = A^*\} = \frac{n(n+1)}{2}$

Zajímavější je $H = \{H \in Mat(2,2,\mathbb{C}) \mid H^+ = H\}$ $\quad \begin{pmatrix} z+t & x+iy \\ x-iy & z-t \end{pmatrix}_b^a$ na diagonále $a, b \in \mathbb{R}$

$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \iff a = \bar{a},\ d = \bar{d},\ \bar{c} = b,\ \bar{b} = c$

$\iff a, d \in \mathbb{R}$ $\quad b = x + iy \iff \bar{b} = x - iy = c$

$$\begin{pmatrix} a & x+iy \\ x-iy & b \end{pmatrix} \quad a = z+t \quad z = \frac{a+b}{2}$$
$$b = z-t \quad t = \frac{a-b}{2}$$

$$\det \begin{pmatrix} z+t & x+iy \\ x-iy & z-t \end{pmatrix} = z^2 - t^2 + (x^2+y^2) = -x^2 - y^2 - t^2 + z^2$$

když zaměníme t za z, tak y je $\det$ přímo Minkowského metrika

Zpětně: $\mathbb{H} \longleftrightarrow$ jako reálný prostor $\longleftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$

$\eta((x,y,z,t),(x,y,z,t)) = \det(j(x,y,z,t)) \Rightarrow$ vede na $SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} SO(1,3)$

$\leftarrow \{A \in Mat(2,2;\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ / spec. lin. grupa unimodulární matice

fyzikové to označují $Spin(1,3)$

$=$

$SLC(2,\mathbb{C})$

$\{A \in Mat(4,4,\mathbb{R}) \mid \eta(Au, Av) = \eta(u,v)\} \cap SL(4,\mathbb{R})$

speciální ortogonální grupa



2-listé maloryt z S^1 do S^1

$e^{i\varphi} \longmapsto e^{2i\varphi}$

$\mathbb{Z}$ - maloryt

$z: (\cos\varphi, \sin\varphi) \longmapsto (\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$

$z: S^1 \twoheadrightarrow S^1$

$\forall \tilde{x} \in S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} \quad \exists! \varphi, \text{že } \tilde{x} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

až na $(0,1)$

Lebesgueovy prostory

$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid |f|^p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\}$ mnoha fcí, jejichž p-tá mocnina má konečný Lebesgueův integrál

Zajem $p=2 \Rightarrow$ umíme zavést skalární součin. Kandidát na skl. součin $(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}\, d\lambda_{Leb}$

Problém:

$(f,f) = 0 \Rightarrow f = 0$ (nul. sl. s. / pre-Hilb. prostor)

"$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 = 0$ $\quad n=1$ a $f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{v } x = 1 \end{cases}$

$\int |f|^2 = \int 0 = 0$

Řešení: Faktorizace / Quotient space / modulo / třídy ekvivalence

Definice 2.18

$L^2(\mathbb{R}^n, \lambda) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)/\!\sim \quad f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0$ s.v. (tzn. s.v. x $f(x) = g(x)$)

Cpalovalmi M množina, R relace, $R \subseteq M \times M$

Př. $\{\{p_1, p_2, \dots\}, \{q_1, q_2, \dots\}, \dots, \{z_1, z_2, \dots\}, \dots\}$ $p_i \parallel p_j$, $q_i \parallel q_j$, $z_i \parallel z_j$
$p_i \nparallel q_j \nparallel z_k \nparallel P_2$

Relace $R \subseteq M \times M$ je ekv.

$\forall x \ (x,x) \in R$ refl.

$\forall x,y \ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

$\forall x,y,z \ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Klasifikace $xRy = (x,y) \in R$

Pozn. Uspořádání mezi typické relace ekvivalence

$\leq$ = reflexivní, tranzitivní ale skoro antisymetrické

$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

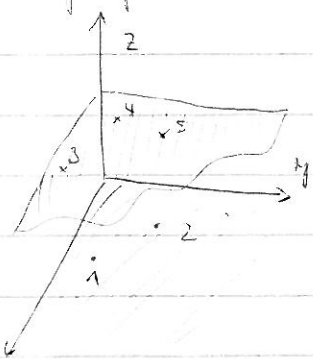
Př. $\leq \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(a,b) \in \leq \iff b - a \in \mathbb{N}_0$

Definice

M/R, kde $R \subseteq M \times M$ je nějaká relace ekvivalence, je definováno jako množina všech podmnožin $[x]$ pro $x \in M$, přičemž $[x] = \{z \in M, zRx\}$ množina tříd ekvivalence.

Př. Podíl v.p. spec. množ. tříd ekvivalence $W \subseteq V$, $V/W = V/\cong$, $v_1 \cong v_2 : v_1 - v_2 \in W$



$V = \mathbb{R}^3$

$W \cong \mathbb{R}^2$ $W = \{(x,y,0) | x,y \in \mathbb{R}\}$ $V/W = \{[1], [3], \dots\} \cong$

$\cong$ množina rovin $\parallel xy$ (1,2 ; 3,4,5)

Lemma 2.16

$L^2(\mathbb{R}^n)$ je pre-Hilbertův prostor.

Dk.

$L^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)/\cong$ $([f],[g]) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} g \, d\mu$, Korektnost nezávisí na výběru $f \in [f]$ a $g \in [g]$

$f_1, f_2 \in [f]$

$([f_1],[g]) = \int \bar{f}_1 g$ $\int \bar{f}_1 g - \int \bar{f}_2 g = \int (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) g$ (*) Odtud $\bar{f}_1 - \bar{f}_2 = 0$ s.v.

$([f_2],[g]) = \int \bar{f}_2 g$ (*) Linearita L int.

($f_1, f_2 \in [f]$ tj. $f_1 - f = 0$ s.v.

$f_2 - f = 0$ s.v. tj. $f_1 = f$ na $\mathbb{R}^n \setminus M_1$, $f_2 = f$ na $\mathbb{R}^n \setminus M_2 \Rightarrow f_1 - f_2$ na $\mathbb{R}^n \setminus M_1 \cup M_2$

$\mu(M_1 \cup M_2) \leq \mu(M_1) + \mu(M_2) = 0 + 0$

$\Rightarrow (f_1 - f_2)g = 0$ s.v.

$(*) = \int fcg = 0$ s.v. $= 0 \quad \Rightarrow ([f_1],[g]) = ([f_2],[g])$

3) Je to skalární součin, je bilineární to sk. součinu z linearity Leb. integrálu

• pozitivně - def. $\rightarrow$ pozn. semi def. $(f,f) \geq 0$

$\int |f|^2 \geq 0$ ✓

$\rightarrow$ pozn. definitnost

$(f,f) = \int |f|^2 = 0 \Rightarrow |f| = 0$ s.v.

$\int |f|^2 = \sup \{ \sum_i f_i \mu(M_i) \sum_i f_i \chi_{M_i} |f|^2 \} \Rightarrow$ zjevně $f = 0$ s.v.

(vlastnost def.)

$|f| = 0$ s.v. $\Leftrightarrow f = 0$ s.v. $\Rightarrow [f] = 0$, což je nula v $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)/\cong$ ∎

Pozn:

$f \in L^2(\mathbb{R}^n), g \in L^2(\mathbb{R}^n), (f+g) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \int (f+g)^2 < +\infty$ (def. L^2)

$\int f^2 + 2\int fg \cdot \int g^2 < +\infty$, $\int f^2 < +\infty$ $\int g^2 < +\infty$, Cauchy - Schwarz. nerovnost

$\int |fg| \leq \sqrt{\int f^2} \sqrt{\int g^2}$

Připomínka: $L^2(X)$ $(X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^2(X)/\simeq$ $f \simeq g \Leftrightarrow f - g = 0$ s.v.

Pozn. $L^2(X) = \mathcal{L}^2(X)/N$, kde $N = \{f \in \mathcal{L}^2(X) \mid f = 0 \text{ s.v.}\}$ (viz obrázek, obv. V/W a $V/\simeq$ $N_1 \simeq N_2 \Leftrightarrow N_1 - N_2 \in W$)

Bylo řečeno: $L^2(X)$ je Hilbertův. V důkazu je potřeba $\int|fg| \le \left(\int|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ což je Cauchy-Schwarzova nerovnost již známe dokázanou. Je pro Hilbertovy prostory $\Rightarrow$ $L^2(X)$ je Hilbertův. Problém: musíme, že $L^2(X)$ je v.p. Am o $\mathcal{L}^2(X)$. Proto: lemmata o množinách.

Lemma 2.17 Jensen

Pro $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\forall \alpha \in [0,1]$ je $a^\alpha b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b$

Dk: 1) $a = b$ $(a \le a)$

$a = 0$ $(H_0 \vee)$ ✓

2) $a > 0$ a $b > a$ $(b < a$ obdobně$)$

$f(x) = x^{1-\alpha}$ na $[a,b]$

VČS: $\exists \xi \in (a,b)$, že $b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha}(b-a)$

$b^{1-\alpha} = a^{1-\alpha} + (1-\alpha)\xi^{-\alpha}(b-a) \quad / a^\alpha$

$a^\alpha b^{1-\alpha} = a + (1-\alpha)\left(\frac{a}{\xi}\right)^\alpha (b-a)$

$a^\alpha b^{1-\alpha} \le a + (1-\alpha)1(b-a) \qquad \xi > a$

$a^\alpha b^{1-\alpha} \le a + \alpha a - a - b\alpha + b$

$\le \alpha a + (1-\alpha)b$ □

Lemma 2.18 Young

Nechť $p, q > 0$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $c, d \in \mathbb{R}_0^+$. Pak $cd \le \frac{1}{p}c^p + \frac{1}{q}d^q$

Dk: $a = c^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow c = a^\alpha$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $b = d^q \Rightarrow d = b^{\frac{1}{q}} = b^{1-\frac{1}{p}} = b^{1-\alpha}$

Dle L2.17: $(c^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha d \le \frac{1}{p}c^p + \frac{1}{q}d^q$ □

Věta 2.19 Hölderova nerovnost

$\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$, $p, q > 0$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $\sum_{i=1}^n |\xi_i \eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Dk: $c = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $d = \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

$\tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i}{c}$, $\tilde{\eta}_i = \frac{\eta_i}{d}$. Dle L2.18 je $|\tilde{\xi}_i \tilde{\eta}_i| \le \frac{1}{p}\frac{\tilde{\xi}_i^p}{c^p} + \frac{1}{q}\frac{\tilde{\eta}_i^q}{d^q} \quad / \sum_i$

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\xi}_i \tilde{\eta}_i| \le \frac{1}{p} \overbrace{\frac{|\xi_i|^p}{c^p}}^{c^p} \cdot \frac{1}{q} \overbrace{\frac{|\eta_i|^q}{d^q}}^{d^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\xi_i \eta_i|}{cd} \le 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

BÚNO $c = C \Rightarrow \xi_i = C^+ \forall i$

$d = D \Rightarrow \eta_i = C \forall i$ □

Věta 2.20 (Minkowského nerovnost)

$\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$ pak $\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Dk: $p = 1$ $\sum_i |\xi_i + \eta_i| \le \sum_i |\xi_i| + \sum_i |\eta_i| \Leftarrow |\xi_j + \eta_j| \le |\xi_j| + |\eta_j|$ ∆ nerov.

$p > 1$

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i| |\xi_i + \eta_i|^{p-1} \le \sum_{i=1}^{n} (|\xi_i| + |\eta_i|) |\xi_i + \eta_i|^{p-1}$$

$$|\xi_i + \eta_i|^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| |\xi_i + \eta_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| |\xi_i + \eta_i|^{p-1} \le$$

Hölder $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\le \left(\sum |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |\xi_i + \eta_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |\xi_i + \eta_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$(p-1)q = p$

$pq - q = p \;/\; \frac{1}{pq}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \Big/ \left(\sum |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1 - \frac{1}{q}} \le \left(\sum |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ □

Pozn. $p = 2$

$$\left(\sum |\xi_i + \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum |\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\eta_i = -\tilde{\eta}_i$ $\left(\sum |\xi_i - \tilde{\eta}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum |\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$d(\xi, \eta) = |\xi|_{euc} + |\eta|_{euc}$ součet dvou odv. z vět. mísa norem dle p-prostor

Zobecníme nerovnosti na $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^p(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \mid |f|^p \in \mathcal{L}(I)\}$ $I = (a,b)$, $\mathbb{R}$, $(-\infty, \infty)$, (a, ∞)

Věta 2.19 (Hölderova)

$f \in \mathcal{L}^p(I)$, $g \in \mathcal{L}^q(I)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $\int_I |f(x) g(x)| dx \le \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$ $(dx = d\mu_L)$

Dk $c = \left(\int_I |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, d = \left(\int_I |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

$\tilde{f}(x) = \frac{1}{c} f(x)$, $\tilde{g}(x) = \frac{1}{d} g(x)$ (smysl $\Rightarrow$ jmen. f v g. s v nule $\Rightarrow$ $\in$ lin.)

(Young) L 2.18 $|cd| \le \frac{1}{p}|c|^p \cdot \frac{1}{q}|d|^q$ pro $\tilde{f}(x)$ a $\tilde{g}(x)$ $\forall x \in I$

$\forall x \in I$ $|\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)| \le \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{p} \cdot \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{q}$ / $\int$

(Pozn. Lemma o integrovatelné majorantě pro posloupnost měřitelných prostor)

$$\int_I |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)| \le \frac{1}{p}\int_I \frac{|f(x)|^p}{c^p}\,dx + \frac{1}{q}\int_I \frac{|g(x)|^q}{d^q}\,dx$$

$$\int_I |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)|\,dx \le \frac{1}{p}\frac{\int_I |f(x)|^p dx}{c^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_I |g(x)|^q dx}{d^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_I |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$ □

Pozn: Opravdu měřitelné $\int_I |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)|\,dx$

$G(x) = |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)| \in \mathcal{L}(I) \Leftrightarrow |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)| \in \mathcal{M}(I)$

$0 = |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)|^- \in \mathcal{M}(I)$ ✓

a $\int G^- = \underbrace{\int G}_{=0}$ mv smysl a je konečný $\int G^+$ mv smysl a je konečný

Ano Lebesgueova věta. $G_n(x) = \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{q}$. G_n mv Lebesgueův integrál $\forall n \in \mathbb{N}$

neboť $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q \Rightarrow$

$\Rightarrow |\tilde{f}|^p < \mathcal{L}$, $|\tilde{g}|^q < \mathcal{L} \Rightarrow \frac{1}{p}|\tilde{f}|^p + \frac{1}{q}|\tilde{g}|^q < \mathcal{L}$

$G \le G_n$, G_n monotónní ($G_1 = G_j$). $G_n \in \mathcal{L} \Rightarrow G \in \mathcal{L}$

Věta 2.20' (Minkowského)

$f, g \in \mathcal{L}^p(I)$ a $p \ge 1$. Pak $\left(\int_I |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Dk $\int_I |f(x)+g(x)|^p dx \le \int |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx$ neboť algebra

$+ \quad |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$

Hölder V 2.19'

$$\le \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\int (|f+g|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\int (|f+g|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad / \; pq - q = p \text{ a vydělím } \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, což je trojúhelníková nerovnost pro Leb int.

Nyní dokážeme, že $\left(\int_I |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je konečné $< +\infty$

Víme: $|f(x)+g(x)|^p = [\max\{f(x), g(x)\}]^p \quad \forall x$

$= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \in \mathcal{L}(f, g \in \mathcal{L}^p)$

$\int (|f(x)|^p + |g(x)|^p) < +\infty$

$= \int |f(x)|^p + \int |g(x)|^p < +\infty + \infty = +\infty$

Tj. $\int |f(x)+g(x)|^p < +\infty$ a tedy $f+g \in \mathcal{L}^p$. ∎

Věta 2.21

$L^2(I)$ je pre-Hilbertův prostor.

Dk: Z dk. L16 víme, že $(f,g) = \int f\bar{g}\,dx$ je definováno (skalární součin). Bilineární forma. Když jsme dále dokázali, že $f \in L^2(I)$ a $g \in L^2(I) \Rightarrow f+g \in L^2(I)$ $\left(= \int |f+g|^2 dx < +\infty\right)$, tedy jsme prokázali nyní $\int_I |f+g|^2 = \int_I |f|^2 + 2\int_I |fg| + \int_I |g|^2$

$\int |f|^2 \cdot \int |g|^2$ (konečné) — Cauchy-Schwarz nerovnost, kterou Schwarz prokázal pro H. p.v.

Z Věty V2.20: $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$

$\left(\int |f+g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int |f+g|^2 < +\infty \underset{\text{def } \mathcal{L}^2}{\Rightarrow} f+g \in \mathcal{L}^2$

$< +\infty \qquad < +\infty$ z předp.

- $a \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow af \in \mathcal{L}^2 \qquad \int |af|^2 = a^2 \int |f|^2 < +\infty$ ∎

Tedy: V2.21 je odpověď na problém v L2.16

- $\int |f|^2 = 0 \Rightarrow f = 0$ s.v. $\Rightarrow [f] = 0 \equiv$ p. def v $L^2(I) = \mathcal{L}^2(I)/\mathcal{N}$
- $\mathcal{N} = \{f \mid f = 0 \text{ s.v.}\}$

Pozn.: na $\mathcal{L}^2(I)$ norma $\|\cdot\|$ je def., ale jen pol. semidef. $f = 0$ s.v. $\Leftrightarrow \|f\| = 0$ ale $f \neq 0$

- Lze dokázat (Beppo-Levi, Lebesgue), že $L^2(I)$ je úplný pre-H. prostor se skalárním součinem, tj. H. prostor (tzn. každá cauchyovská je konvergentní). Bez důkazu.

Dle H. pro $(X, \mathcal{A}, \mu) \rightsquigarrow L^2(X)$ je H. prostor.

Definice 2.19

Nechť $(Y, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor (n.v.p.). Pokud je v něm každá cauchyovská

posloupnost konvergentní, rozpor její Banachův prostor. (Každý Banachův je Hilbertův)

Př. $\mathbb{R}$ (Bolzano-Cauchyova věta), $\mathbb{Q}$ není $\left(\frac{\lfloor \sqrt{2}\, 10^n \rfloor}{10^n}\right)$, $\mathbb{R}^n$ je, $L^2(X)_\mu$ je (spec. $L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^2([a,b])$ etc.) jsou Banachovy prostory

Definice 2.20

$\forall p \in (0, +\infty)$ a každý měřitelný prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ položíme $L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/\sim$

Pozn.: $f \in \mathcal{L}^p(X) \overset{\text{def}}{\iff} |f|^p \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^1(X) = \mathcal{L}^1$

??: Na $L^p(X)$ definujeme (tzv. L^p-normu) $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

Věta 2.22

$\forall p \geq 1$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je $L^p(X)$ Banachův prostor

Dk: 1) v.p. $f, g \in L^p \Rightarrow |f|^p = \mathcal{L}^1$ a $|g|^p \in \mathcal{L}^1$

Vím $\int |f+g|^p \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow |f+g|^p \in \mathcal{L}^1 \equiv f+g \in L^p$

V 2.20 $< +\infty$ $< +\infty$

2) splněny $\Delta \rightsquigarrow$ Minkowski V 2.0' $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$\|\lambda f\|_H = \left(\int |\lambda|^p |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|f\|_{L_p}$$

3) $\|f\|_{L_p} = 0 \iff \int |f|^p dx = 0 \underset{\text{viz L 2.16}}{\overset{\text{def L5.}}{\Longrightarrow}} |f|^p = 0$ s.v. $\Rightarrow |f| = 0$ s.v. $\Rightarrow f = 0$ s.v. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f \in \mathcal{N} \Rightarrow [f] = 0$

4) úplnost bychom -

□

Matematika pro fyziky

24. 4. 2014

Minule: $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\simeq = L^p(\mathbb{R}^n)$ je vektorový prostor

$L^2(\mathbb{R}^n)$ je vektorový prostor se skalárním součinem (tj. pre-Hilbertův p.)

$L^2(\mathbb{R}^n)$ je Hilbertův úplný p. (bez dk.) $\int f\bar{g}\,d\lambda = (f,g)$, $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$

$L^p(\mathbb{R}^n)$ je Banachův (bez dk.) $\|f\|_p = \int |f|^p d\lambda$

Upomnutí: 2 def. $\mathcal{X}$ int $(X, \mathcal{M}, \lambda)$ (Beppo-Lévi, Lebesgueova míra)

Lemma 2.23

Nechť H je pre-Hilbertův p., $(u_n)_{n\in A}$ ON-systém. Pak $\forall x \in H$

1) $\forall \underset{\text{kon.}}{F \subseteq A}$ $\sum_{n\in F} |(x,u_n)|^2 \leq \|x\|^2$ F konečná

2) $\sum_{n\in A} |(x,u_n)|^2$ konverguje

3) $\sum_{n\in A} |(x,u_n)|^2 \leq \|x\|^2$

Dk:

1) $\|x - \sum_{n\in F}(x,u_n)u_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n\in F}\overbrace{(x,u_n)(x,u_n)}^{|(x,u_n)|^2} - \sum_{n\in F}(x,u_n)(x,u_n) + \sum_{n\in F}|(x,u_n)|^2$ dle

$\|y\|^2 = (y,y)$ a $\left(\sum_{n\in F}(x,u_n)u_n, \sum_{n\in F}(x,u_n)u_n\right) = \sum_{n,m\in F}(x,u_n)(x,u_m)(u_n,u_m) = \sum_{n\in F}(x,u_n)(x,u_n)$ neb.

$(u_n,u_m) = \delta_{nm}$

Pak $0 \leq \|x - \sum_{n\in F}(x,u_n)u_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n\in F}|(x,u_n)|^2 \Rightarrow \sum_{n\in F}|(x,u_n)|^2 \leq \|x\|^2$ ✓

2) z def. konv. přes l.b. mn. ($\sup_{F\subseteq A}\sum_{n\in F}|(x,u_n)|^2 < +\infty$). Z 1) navíc $\sup_F \leq \sup_F \|x\|^2 =$

$= \|x\|^2$ ✓

3) $\sum_n |(x,u_n)|^2 = \sup_{\substack{F\subseteq A\\ F\text{ kon.}}} \sum_F |(x,u_n)|^2 \leq \sup_{F\subseteq A}\|x\|^2 = \|x\|^2$ ∎

Pozn.
- Nerovnost 3) se NAZÝVÁ Besselova nerovnost
- Každý pre-Hilb. $(u_n)_{n\in A}$ každý ON-systém. (Každý konečný v H, $\dim H = +\infty$)
- Umíme se vyjádřit o $\sum_{n\in A}|(x,u_n)|^2$ (i pro $(u_n)_{n\in A}$ je UONS v H) .. řeší cenou $\|x\|^2$

Proč $\sum_{n\in A}(x,u_n)u_n$ nic neříkáme.

N.P. konvergence (v normě) řídí implikuje, že $|(x,u_n)|^2 \longrightarrow$, když $n \to +\infty$ $(A = \mathbb{N})$

- pokud nějaký Hilbertův prostor, nemá separabilní tj. $\exists$ spočetný UONS $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Věta 2.24

Nechť H je Hilbertův prostor, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ÚONS. Pak $\forall x \in H$ platí:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n$ konverguje (v H)

3) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, u_n)|^2$ Parsevalova rovnost

Dk. 1)

$s_k = \sum_{n=1}^{k} (x, u_n) u_n \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|s_{k+1} - s_k\| = \|(x, u_{k+1}) u_{k+1}\| = |(x, u_k)|^2 \longrightarrow 0, \ k \longrightarrow +\infty$

Ale prostor H tj. $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská ($p = 1$) H je vždy Hilbertův p., tj. $\forall$ cauchyovská je konvergentní $\Rightarrow \exists s \in H$, že $s_k \to s$, tj. $\sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n$ konverguje.

3) $x - \sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n = v \quad / (\cdot, u_j) \ j \in \mathbb{N}$

$$(x, u_j) - \sum_{n} (x, u_n) \underbrace{(u_n, u_j)}_{\delta_{nj}} = (v, u_j)$$

$0 = (x, u_j) - (x, u_j) = (v, u_j)$. Z ekv. ÚONS a $(v, u_j) = 0 \ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \|x\|^2 =$

$= \|\sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n\|^2 = (\sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, u_n)|^2$ □

Pozn:

V průběhu dk. jsme zjistili, že nejen $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, u_n)|^2$ ale i $x = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, u_n) u_n$ ve smyslu konv. v H i prostoru

$L^2(I) \ni f$ a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi}{l} x n}$ ve smyslu konv. $L^2(I) \cdot (|I| = l) \not\Rightarrow$ obecně $\forall \tilde{x} \in I$ je $f(\tilde{x}) =$

$= \sum_{n} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}\tilde{x} n}$ (tj. nejedná se o bodovou konvergenci) (tj. $\|f - \sum\|^2 < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon, \exists n_0, \ldots n \geq n_0$))

Př) $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0, 2\pi) \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad \tilde{f} \in L^2([0, 2\pi])$

$\rightsquigarrow a_n, b_n$ tj. a_n a b_n pro $\tilde{f}$ stejné jako a_n, b_n pro $f(x) = \sin x$ (∫ se nezmění na prostoru fce se nemění hodnoty O)

$f(x) = \sin x, \quad a_1, a_2, a_3, \ldots = 0, \quad b_0, b_1, b_2, \ldots = 0, \quad a_1 = 1$

$\tilde{f}(x) = \sin x$ nespojitá pro $x = 0$

1 "v" 0 "c"

Pozn: • Obtížné je zjistit, nejen zda pro H Hilb. je H Hilb., ale ještě více to, zda je separabilní, tj. zda existuje spočetný ÚONS

• Problém je v formě: H Hilbertův $\Rightarrow$ má bázi (tj. ortonormální), např. nespočetnou (např. $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ má nesp. bázi) $\rightarrow (u_1, u_2, \ldots) = (u_i)_{i\in I}$

Gramm-Schmidt: $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $v_2 = u_2 + \lambda_2 v_1$ $\lambda_2(v_1, v_2) = 0$

$v_3 = u_3 + \lambda_3 v_2 + \lambda_3 v_1$ $\lambda_3, \lambda_4 (v_3, v_2) = (v_3, v_1) = 0$ Takto systémem stejně počítaný systém/ báze

Věta 2.25

$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_{2m-1}(x) = \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}$, $e_{2m}(x) = \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}}$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Pak $(e_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ je ONS v $L^2([-\pi, \pi])$.

Dk: nyní neboť (myšlenkově)

V příští lemma $\mathcal{C}(X)$ husté v $L^2(X)$, X kompaktní v $\mathbb{R}^n$. ▨

Pozn: $\mathcal{C}(X) = \{f: X \to \mathbb{C}/\mathbb{R} \mid f \text{ sp. na } X\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kom. $\iff$ X uzavřená a omezená

$A \subseteq B$ husté $\dots \forall b \in B \ \forall U_b \subseteq B$ otevř. okolí b v B $(b \in U_b)$ je $U_b \cap A \neq \emptyset$

Příj $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ husté, $x \in \mathbb{R}$, $U_x \subseteq \mathbb{R}$ $U_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, tj U_x obsahuje alespoň jedno rac. číslo

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \exists \rightsquigarrow y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ má jistě desítkový rozvoj

$\tilde{y} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ a $\tilde{y} \in \mathbb{Q}$

Jinak $x \in \mathbb{R} \longrightarrow x \in \mathbb{Q}$ $\left[U(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus U(x+\varepsilon, +\infty)\right] \ni \tilde{y}$

$\subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 5 \wedge q > 0\}$

Definice 2.21

$n \in \mathbb{N}_0$, $H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} x^2$ je n-tý Hermitův polynom. $h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$

Věta 2.26

$(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je ONS v $L^2(\mathbb{R})$.

Dk: zmožným.

Pozn: • Obecný (a, b) viz V2.25 $\rightsquigarrow$ $\cos \frac{2\pi x}{l} n$, $\sin \frac{2\pi x}{l} n$ UOGS, $l = b - a$ Pro $\mathbb{R}$ tedy aplik.

• Hermitovy fce v $\mathbb{R}^n$: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$, $h_\alpha(x_1, \dots x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) h_{\alpha_2}(x_2) \dots h_{\alpha_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(x_i)$. Můžeme definovat $U_m = \mathcal{L}(\{h_\alpha \mid |\alpha| = m\})$, kde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ $\left(\forall |\alpha| = k\right)$ Pak lze dokázat, že $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{m=0}^{+\infty} U_m$ ← kl. příp. zúplní

Aplikace: $n = 3$, $\alpha = (0,0,0)$ $h_\alpha(x_1, x_2, x_3) = h_0(x_1) h_0(x_2) h_0(x_3) = e^{-\frac{x_1^2}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} e^{-\frac{x_3^2}{2}} = e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2}}$

$\alpha = (1,0,0) = h_1(x_1)\, h_0(x_2)\, h_0(x_3) = h_1(x)\, e^{-\frac{x_2^2 - x_3^2}{2}}$

$\alpha = (0,1,0) = e^{-\frac{x_1^2 - x_3^2}{2}}\, h_1(x_2)$

$\mathcal{O}_0 = \mathcal{L}(\{h_\alpha \mid |\alpha| = 0\}) = \mathbb{C}\langle h_{(0,0,0)}\rangle = \mathbb{C}\, e^{(-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)/2}$

$\mathcal{O}_1 = \mathcal{L}(\{h_{(1,0,0)}, h_{(0,1,0)}, h_{(0,0,1)}\})$

$\mathcal{O}_2 = \mathcal{L}(\{h_{200}, h_{020}, h_{002}, h_{110}, h_{011}, h_{101}\})$

.

$L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{O}_0 \oplus \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2 \oplus \dots$

Pozn: Fyzikální notace $\mathcal{H}$ separabilní Hilb. prostor, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ONS. $(|e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}} \equiv$ ONS.

$|e_j\rangle\langle e_i| \mapsto$

$\langle e_j|$ budí duální bázi, tj báze $\mathcal{H}^* = \{\alpha : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \mid \alpha$ lin. a spoj.$\}$ a $\langle e_j | e_i\rangle = \delta_{ij}$ ($\langle e_j| \in \mathcal{H}^*$, $|e_i\rangle \in \mathcal{H}$)

$|e_j\rangle\langle e_i| \in \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ def. vzhledem $(|e_j\rangle\langle e_i|)\psi := (e_i, \psi)e_j \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$

$|e_j\rangle\langle e_i| \sim u_i \otimes v_j$, kde $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ duální k $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $(u_i \otimes v_j)(w) = v_j(w)\, u_i(w)$

Idea důkazu: $\mathbb{1} = \sum_{i=0}^{+\infty} |e_i\rangle\langle e_i| \quad /\psi$

$\Rightarrow$ ANO $\psi = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle = \sum_i (e_i, \psi) e_i$ (Parseval)

Existuje topologie na $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \{L : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid$ spojité$\}$, že $\sum_{i=1}^{+\infty} |e_i\rangle\langle e_i| \to \mathbb{1}_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$

Pozn: ?! pro a_n, b_n, c_n → cvičení (V25 + Parseval) ?!

. $M \subset \mathcal{H}$ pre-Hilb., M podmnožina, $M^\perp := \{w \in \mathcal{H} \mid (w, m) = 0, \forall m \in M\}$

Věta z 3Y

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův p. a M je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$. Pak

1) $M \oplus M^\perp = \mathcal{H}$

2) $(M^\perp)^\perp = M$

Dk. Napasujeme na jednu z předchozích vět. Pp. byly $\mathcal{H}$ pre-Hilbertův / M je Hilbertův (úplný pre-prostor $\mathcal{H}$)

? Každá uzavřená v Hilbertově je úplný (zřejmé z definice) uz. množ. $= M \subset \mathcal{H}$, přesně $\forall (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a $\exists A \in \mathcal{H}$, že $\lim_{i\to+\infty} m_i = A \Rightarrow A \in M$ (cauchy $\|m_{i+1} - m_i\| \to 0 \overset{\exists}{\Rightarrow} A$)

Pp. splněny $\rightsquigarrow P_M : \mathcal{H} \to M$ projekce pre-Hilbert.

a) $M \cap M = 0$: $m \in M \cap M \Rightarrow (\underset{M}{m}, \underset{M^\perp}{m}) = 0 \overset{\text{pre-Hilb.}}{\Rightarrow} m = 0$

b) P_M je projekce $\Rightarrow 1 - P_M$ je proj. $(1: H \to H)$

neb 1) $(1-P_M)^2 = (1-P_M)(1-P_M) = 1 - P_M - P_M + P_M^2 = 1 - P_M$ neb P_M je idempotent
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \| P_M$

2) $(1-P_M)^* = 1 - P_M^* = 1 - P_M$

Dim $M \cap M^\perp = 0$

$M \subseteq H$, $M^\perp \subset H$ neb $x \in M^\perp, y \in M^\perp$ $(x+y, m) = (x,m) + (y,m) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$
$x+y \in M^\perp$

$M \oplus M^\perp \subseteq H$

c) $M \oplus M^\perp \supseteq H$ $\quad x \in H \ldots \underset{\in M}{x_1} + \underset{\in M^\perp}{x_2}$

$x = 1x + P_M x - P_M x = (1-P_M)x + P_M x$ Avšak $P_M x \in M$ (viz výše)

- $(1-P_M)x \in M^\perp$, neb $\forall y \in M$ $((1-P_M)x, y) = (x,y) - (P_M x, y) \overset{\text{def}^*}{=} (x,y) - (x, P_M^* y) =$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P_M = P_M^*$

$= (x,y) - (x, P_M y) = (x,y) - (x,y) = 0$ ✓ $\Rightarrow (1-P_M)x \in M^\perp$

$x = \underbrace{(1-P_M)x}_{M^\perp} + \underbrace{P_M x}_{M}$ $\qquad H \subseteq M \oplus M^\perp$

2) tvr. ∎

Pozn: • Uzavřenost M dělá sp. Obecně $H - \bar{M} \oplus M^\perp$ ... opět ne $(M^\perp)^\perp = M$ pro otevřenou M
ale $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$

• $L: V \to W$ lineární operátor (spojitý) mezi dvěma H. sp. prostory a $\mathrm{Im} L$ uzavřený.
Pak $V = \mathrm{Im}(L^*) \oplus \ker L$

3. Analýza v komplexním oboru

Příklad fce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Připomenutí: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v)$$
$$(x,y)\cdot(u,v) := (xu - yv, yu + xv)$$

konvence: $(x,y) \to x + iy$

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

$[(x,y)\cdot(u,v)](z,w) = (x,y)(z,w) + (u,v)(z,w)$ doma

$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$, $-z = -1 \cdot z$

Kde $\bar{z} := x - iy$ $\quad |z| = (\bar{z} z)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ je těleso

Definice 3.22

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je f-ce holomorfní v $z_0 \in D_f$, pokud $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. f nazýváme holomorfní v $U \subseteq D_f$, pokud je holomorfní v každém $z_0 \in U$

Pozn: • $\lim_{z \to z_0} g(z) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in U_\delta(z_0)$ je $|g(z) - A| < \varepsilon$

$U_\delta(z_0) := \{ w \mid |w - z_0| < \delta \}$

• Definice formálně stejná jako dif. Ale nyní: $\frac{[f(z_0+h)-f(z_0)]\overline{h}}{(h_1^2+h_2^2)}$ " $\frac{h_1 - ih_2}{h_1^2+h_2^2} \to \sqrt{h_1^2+h_2^2}$

Matematika pro fyziky

G 5 2014

Primula holomorfní funkce

holomorfní v $z_0 \xrightarrow{\text{def}} \exists f'(z_0)$

holo v $U \xrightarrow{\text{def}} \exists f'(z)\ \forall z \in U$

Př. $f(z)=z \quad f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)-z_0}{h}=\lim_{h\to 0}1=1 \quad h\neq 0$

$f(z)=\bar{z} \quad f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0+h}-\bar{z}_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-iy}{x+iy}=$

$x=t, y=0 \quad \lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$

$x=0, y=t \quad \lim_{t\to 0}\frac{-t}{t}=-1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}\cdot i$

$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \quad 2\cos\varphi\sin\varphi$

$\nexists \lim_{r\to 0} \quad \nexists \lim_{r\to 0}$

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

Spojíme do Cauchyho-Riemannovy podmínky:

Věta 3.28 Cauchyho-Riemannovy podmínky

Nechť $f: U(z_0)\to\mathbb{C}$ a nechť $\tilde{f}: U(\tilde{z}_0)\subseteq\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}=(f_1,f_2)$. Pak f je holomorfní v z_0, právě když platí:

1) $\exists (d\tilde{f})_{\tilde{z}_0}$

2) $(f_1)_x(\tilde{z}_0)=(f_2)_y(\tilde{z}_0)$

$(f_1)_y(\tilde{z}_0)=-(f_2)_x(\tilde{z}_0)$,

A navíc $f'(z_0)=\frac{\partial f_1(\tilde{z}_0)}{\partial x}+i\frac{\partial f_2}{\partial x}(\tilde{z}_0)$

Dk: 1) holomorfní $\Rightarrow$ 1 a 2), $f'(z_0)=:A\in\mathbb{C}$, $A=A_1+iA_2$

$\overset{\text{def}}{\Rightarrow} f(z_0+h)=f(z_0)+Ah+r(h)$, $r(h)=o(|h|)$ $(h\to 0)$

$f_1(z_0+h)=f_1(z_0)+A_1h_1-A_2h_2+r_1(h_1,h_2)$

$f_2(z_0+h)=f_2(z_0)+A_1h_2+A_2h_1+r_2(h_1,h_2)$

$r(h)=o(|h|)+|r_1(h)|\leq|r(h)|=o(|h|) \Rightarrow r_1(h)=o(|h|)$

Řekli jsme pp o ppp $\Leftrightarrow \exists$ tot. df. fce

f_1 a fce $f_2 \Rightarrow$ 1) ✓

$\tilde{f}=(f_1,f_2)$ má totální df., a sice $f_1 \rightsquigarrow (A_1,-A_2)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$

$f_2 \rightsquigarrow (A_2,A_1)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$

$(d\tilde{f})_{\tilde{z}_0}=\begin{pmatrix}A_1&-A_2\\A_2&A_1\end{pmatrix}$

Ad 2) Víme, že totální diferenciál je tvaru $\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\tilde{z}_0)&\frac{\partial f_1}{\partial y}(\tilde{z}_0)\\\frac{\partial f_2}{\partial x}(\tilde{z}_0)&\frac{\partial f_2}{\partial y}(\tilde{z}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&-A_2\\A_2&A_1\end{pmatrix}$

Celkem $(f_1)_x(\tilde{z}_0) = (f_2)_y(\tilde{z}_0)$

$-(f_2)_x(\tilde{z}_0) = (f_1)_y(\tilde{z}_0)$

2 z 1 a 2) $\Rightarrow$ holomorfní v z_0

a) $\exists (df)_{\tilde{z}}$ a CR $\Rightarrow \exists \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}$

b) $A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}$ $A_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ $A = A_1 + iA_2$

c) $\exists$ totální diferenciál $\tilde{f}_1$ v $z_0 \Rightarrow \exists$ totální diferenciál $f_1 \longleftrightarrow f_1(z_0+h) = f_1(z_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \pi_1^0(h_1,h_2), \pi_2^0(h_1,h_2) = o(|h|)$

$\Rightarrow \exists$ totální diferenciál $f_2 \longleftrightarrow f_2(z_0+h) = f_2(z_0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} +$

d) $f_1 + if_2 = f(z_0+h) = f(z_0) + \underbrace{Ah}_{CR} + \pi_1^0(h_1,h_2) + \pi_2^0(h_1,h_2)$

$Ah = ?$

$= f_{1x}h_1 + f_{1y}h_2 + (f_{2x}h_1 + f_{2y}h_2)i = A_1h_1 + f_{1y}h_2 + i(A_2h_1 + f_{2y}h_2) = A_1h_1 - \underbrace{f_{2x}}_{=A_2}h_2 + i(A_2h_1 + f_{1x}h_2) = \underbrace{f_{1x}}_{=A_1}(A_1h_1 - A_2h_2) + i(A_2h_1 + A_1h_2) = Ah$

3) Vyšlo z d), že A je derivace f v z_0. $A = A_1 + iA_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\tilde{z}_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(\tilde{z}_0)$. ∎

Př.

- $f(\tilde{z}) = \bar{z}$

  $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy) = \overline{x+iy}$

  $f_1(x,y) = x$

  $f_2(x,y) = -y$ projde na souřadnice (Parc. indexy by měly být NAHOŘE)

  $1 = (f^1)_x = (f^2)_y = -1$

  $0 = (f^2)_x = (f^1)_y = 0$ ✓

- $f(\tilde{z}) = \sin\tilde{z}$ viz Cvičení

3.1 Wirtingerovy derivace

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Lemma 3.23

Cauchy-Riemannovy podmínky $\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Dk: $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (f^1 + if^2)}{\partial x} + i\frac{\partial (f^1 + if^2)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{\partial f^2}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial y}\right)\right)$ ☒

Dolbeaultův diferenciál

$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} dz$ $\quad dz = dx + i dy \in$ dif. 1-forme na dvou proměnných (na $\mathbb{R}^2$) s hodnotami na $\mathbb{C}$

$\bar\partial f := \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z$ $\quad d\bar z := dx - i dy \in$ dif. 1-forma na $\mathbb{R}^2$ s h. v $\mathbb{C}$

Ztotožníme 1-formy v $\mathbb{R}^2$ s hodnotami v $\mathbb{C} \equiv \forall \alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$\forall r \in \mathbb{R}\ \alpha(rv) = r\alpha(v)$

Pozn.: CR-podm. + $\exists$ totálního diferenciálu fce $\tilde f \equiv df$ je $\mathbb{C}$-lineární,

to znamená $c(\widetilde{df})_{\tilde z}(h_1 + ih_2) = (d\tilde f)_{\tilde z}(c(h_1 + ih_2))\ \forall c \in \mathbb{C}$

($\mathbb{R}$-lin. je z def. $d\tilde f$ zjevné $(d\tilde f)_{\tilde z}\begin{pmatrix} rh_1 \\ rh_2 \end{pmatrix} = r(d\tilde f)_{\tilde z}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$(1\ 2)\begin{pmatrix} r3 \\ r4 \end{pmatrix} = r(1\ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = r\,11$

Pz: $dz \wedge dz = (dx + i dy) \wedge (dx + i dy) = \underbrace{dx \wedge dx}_{0} + i dx \wedge dy + i dy \wedge dx - \underbrace{dy \wedge dy}_{0} = 0$

$dz \wedge d\bar z = (dx - i dy) \wedge (dx - i dy) = i dx \wedge dy + i dy \wedge dx = -2i\, dx \wedge dy$

$\partial f + \bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx + i dy) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx - i dy) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + i\frac{\partial f}{\partial x} dy - \right.$

$\left. - i\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx - i\frac{\partial f}{\partial x} dy + i\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, $f = f^1 + if^2$

$\boxed{\bar\partial + \partial = d}$ Dolbeault + anti-Dolbeault = DeRham

Definice 3.23

$f: U \to \mathbb{C}$ je holomorfní fce, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, f je sp. $\mathrm{Im}\,\gamma$. Pak

$\int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma f\,dx + i\int_\gamma f\,dy$, kde integrály vpravo jsou integrály diferenciálních 1-forem přes křivku γ

Dům: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f\,dx + i\int_\gamma f\,dy = \int_\gamma (f_1 + if_2)\,dx + i\int_\gamma (f_1 + if_2)\,dy = \int_\gamma \tilde f_1(x,y)\,dx - \int_\gamma \tilde f_2(x,y)\,dy + i\int_\gamma \tilde f_2(x,y)\,dx +$

$+ i\int_\gamma \tilde f_1(x,y)\,dy$

Lemma 3.30

$f: U \to \mathbb{C}$, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ f sp. na $\mathrm{Im}\,\gamma \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ Pak $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

Dk: 1 sp na $\mathrm{Im}\,\gamma$, $\mathrm{Im}\,\gamma$ je měřitelná množina $\Rightarrow \exists$ int. $\int_\gamma$ $\int_a^b$

3 Spočtu pravou stranu: $\int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t))\,dt + i\left\{\int_a^b (f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t))\,dt\right\}$

Dále rozepíšeme levou stranu z podmínky výše je levá strana totožná jako.

$$\int_\gamma f_1(x,y)\,dx - \int_\gamma f_2(x,y)\,dy + i\left\{\int_\gamma f_2(x,y)\,dx + \int_\gamma f_1(x,y)\,dy\right\} = \int_a^b f_1(\gamma^1(t),\gamma^2(t))\,d\gamma^1 -$$

def. int. přes plochu

$\gamma_1'(t)\,dt = \frac{d\gamma^1}{dt}\,dt$

$$- \int_a^b f_2(\gamma^1(t),\gamma^2(t))\,d\gamma^2 + i\left\{\int_a^b f_2(\gamma^1(t),\gamma^2(t))\gamma_1'(t)\,dt + \int_a^b f_1(\gamma^1(t),\gamma^2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt\right\}$$

L = P ✓

Př) $\int_\gamma z^m\,dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $\mathrm{Im}\,\gamma = S^1$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} (e^{it})^m\, ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{-mt} e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt$$

$m = -1$: $i\int e^0\,dt = 2\pi i$

$m \neq -1$: $i\left[\frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)}\right]_0^{2\pi} = i\left(\frac{e^{2\pi m} - e^0}{i(m+1)}\right) =$

$$= i\left(\frac{1-1}{i(m+1)}\right) = 0$$

Matematika pro fyziky

13.5.2014

1. CR - podm. (holomorf. v z_0) $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ | $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)_{\in \mathbb{R}} = 0$
2. Wirtingerovy derivace $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$
3. Dolbeaultovy diferenciály $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$
4. Integrály z komplexních forem

$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$, $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

$df = \partial f + \bar{\partial} f$ $\quad (dz = dx + i\,dy)$

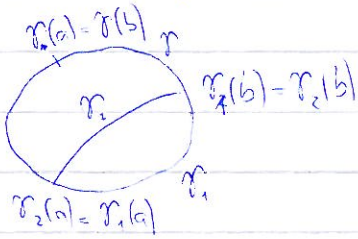
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$\int_{[a,b]} (f\circ\gamma)\underbrace{(\gamma^* dz)}_{dz} dt \qquad \text{(Dosadíme do def. int. dif. 1-formy z min. semestru)}$$

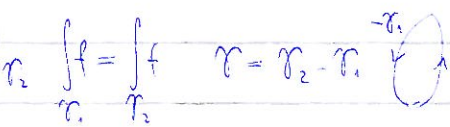
Věta 3.31

Nechť f je spojitá na $\mathrm{Im}\,\gamma$, kde $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $\partial\gamma = 0$. Pak $\int_\gamma f dz = 0 \iff \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$, $\forall \gamma_1, \gamma_2$ křivky, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

Ilustrace:



Důk: $\Rightarrow$



$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \quad \gamma = \gamma_2 - \gamma_1$

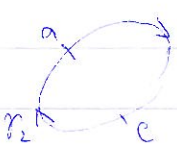
$\partial\gamma = \partial(\gamma_2 - \gamma_1) = 0$

$[\gamma_2(b) - \gamma_2(a) - \gamma_1(b) + \gamma_1(a)] = 0$ $\qquad \partial[a,b] = b - a$ minuly semestr

$$0 = \int_{\partial\gamma} f(z)\,dz \overset{pp}{=} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\Leftarrow$ γ je uzavřená orientovaná křivka (cyklus) ($\partial\gamma = 0$)

Vlapíš $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$



$\gamma_1 = \gamma[a,c]$

$\gamma_2 = \gamma[c,a]$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \overset{\text{dle pp}}{=} 0$$

∎

Př. $\int_{S^1} (z-z_0)^n \, dz = \int_{t=0}^{2\pi} (z_0+e^{it}-z_0)^n \, d(z_0+e^{it}) = \int_0^{2\pi} e^{nit} \, ie^{it} \, dt = \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} \, i \, dt = i \left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} = i \cdot \frac{[e^{2\pi i(n+1)} - e^0]}{(n+1)i} =$

$n \neq -1$

$n = -1: \int_0^{2\pi} e^0 \, i = i\,2\pi$

Věta 3.32

Nechť f' existuje na $\mathrm{Im}\,\gamma$. Pak $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Dk: $\int_\gamma df \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\gamma} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

$df = \partial f + \bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z = \frac{\partial f}{\partial z} dz + 0 = f'(z)\,dz$

f holom (+ def.) $\to$ CR $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$

$\int_\gamma df\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ " $\int_\gamma f'(z)\,dz$ ∎

Důsledek: Lemma 3.33

f holomorfní na Ω a γ uzavřená ($\partial\gamma = 0$) pak $\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$

Dk: zjm $f(\gamma(b)) = \gamma(a)$ ∎

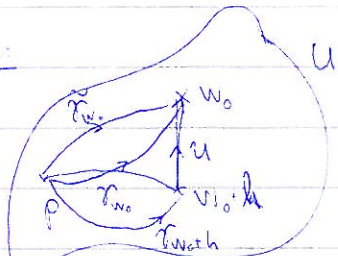
Pozn. $\int_{\gamma_1} f'(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f'(z)\,dz$ nebo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ $\partial\gamma = 0$ $\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$ (viz Důsledek)

$\int_{\gamma_1} f'(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f'(z)\,dz$

Věta 3.34

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ $\forall \gamma$ $\partial\gamma = 0$, $\mathrm{Im}\,\gamma \subseteq U$. Pak $\exists F: U \to \mathbb{C}$, že $F' = f$. (f je spojitá)

Dk:



U $w_0 \in U$ $p \in U$ $F(w_0) := \int_{\gamma_{w_0}} f(z)\,dz$, kde $\gamma_{w_0}: [a,b] \to U$, $\gamma_{w_0}(a) = p$, $\gamma_{w_0}(b) = w_0$

Je F skutečně primitivní k f? $\frac{F(w_0+h) - F(w_0)}{h} = \frac{\int_{\gamma_{w_0+h}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{w_0}} f(z)\,dz}{h}$

$-\gamma_{w_0} + u + \gamma_{w_0+h} =: \gamma$

$\Rightarrow$ (γ uzavřená) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ (pp)

$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma_{w_0}} f(z)\,dz + \int_u f(z)\,dz + \int_{\gamma_{w_0+h}} f(z)\,dz$ Dosazením do členu:

$\frac{F(w_0+h) - F(w_0)}{h} =$

$= -\int_u f(z)\,dz$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{F(w_0+h)-F(w_0)}{h} = -\lim_{h\to 0} \int_u^{} \frac{f(z)\,dz}{h} =$ $\quad$ u. t. $\longrightarrow w_0+th$, $t\in[0,1]$

$= -\lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{f(w_0+th)h}{h}\,dt = -\lim_{h\to 0} \int_0^1 f(w_0+th)\,dt = -\int_0^1 \lim_{h\to 0} f(w_0+th)\,dt = -\int_0^1 f(w_0)\,dt =$

(integrál existuje, jsou to Riem. množiny, je kompaktní + f je spojitá)

$= -f(w_0)(1-0) = -f(w_0)$ Tj. vezmi $\tilde{F} := -F$. Vyjmi $\tilde{F}'(w_0) = +f(w_0)$ ∎

Pozn: je potřeba, aby f byla SPOJITÁ. (ve větě doplňuji)

Věta 3.35 Cauchyova věta

Nechť $U \subseteq \mathbb{C}$ je množina, jejíž okraj je křivka nebo sjednocení křivek. Nechť f je holomorfní na U. Pak $\int_{\partial U} f(z)\,dz = 0$.

Dk: $\gamma = \partial U$ $\quad \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial U} f(z)\,dz = \int_U d(f(z)\,dz) = \int_U (\partial f + \bar\partial f)\wedge dz = \int_U \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z\right)\wedge dz =$

$= \int_U \left(0 + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z\right)\wedge dz = 0$ ∎

$dz\wedge dz = 0$; holomorfní fce mají nulový integrál

Pozn: Není to zvláštní? $f(z) = \frac{1}{z}$ na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ je holomorfní

$U = P_{1,R}(0)$ $\quad r < R$

f je holomorfní na $P_{1,R}(0)$

Cíle! $\int_{S^1} \frac{1}{z} = d\bar z$: na každé křivce v kruhové oblasti, kde je fce holomorfní

S^1 není kruhová oblast, kde je f holomorfní

a to věty operovala s křivkami, který BYLY kruhové obl. kde je f holom.

$\partial(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \{0\}$

$\mathbb{C}\setminus(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \{0\}$ $\quad \int_{\partial(\mathbb{C}\setminus\{0\})} f(z)\,dz = \int_0 f(z) = 0$

f je holomorfní na $P_{r,R}(0)$ $\quad \partial P_{r,R}(0) = \int_R(0) - \int_r(0)$

$\int_{S^1_R(0)} \frac{1}{z}dz - \int_{S^1_r(0)} \frac{1}{z}dz = 0 \Rightarrow \int_{S^1_R(0)} \frac{1}{z}dz = \int_{S^1_r(0)} \frac{1}{z}dz$ homotopicky (rozeberu na pokročilou)

Některé speciální funkce: 1) $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad R = +\infty$

2) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

2) a 3) přímou Taylorovy řady $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

3) $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1$

4) $\cos z + i \sin z = e^{iz}$ platí Eulerova formule?

$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{ix} \cdot e^{y} = (\cos x + i \sin x) e^{y}$ ... dokonalý počet

Matematická analýza

15.5.2014

Minule: $\int_{\partial U} f(z)\,dz = 0$, f holomorfní na U.

Cauchyova věta (kplx. analýze)

Skoro je definovaným "spc." fce

$\rightarrow e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Pozn: $z \in \mathbb{R}$ víme

Dk: $\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{2e^{iz}}{2} = e^{iz} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ∎

Věta 3.36

$\exp \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp: z \mapsto e^z$ je implikativní na pásu $0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi$

Dk: $e^{z_1} = e^{z_2}$, $0 \le \operatorname{Im} z_1 < 2\pi$, $0 \le \operatorname{Im} z_2 < 2\pi$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow e^{x_1+iy_1} = e^{x_2+iy_2} \Rightarrow e^{x_1 - x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1) = \cos y_2 + i \sin y_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x_1 - x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \cos y_1 = \cos y_2 \wedge \sin y_1 = \sin y_2 \Rightarrow (y_2 = \pi - y_1 + 2k\pi \vee y_2 = y_1 + 2k\pi) \vee (y_2 = 2m\pi - y_1 \vee y_2 = y_1 + 2m\pi)$

$\pi - y_1 + 2k\pi = 2\pi m - y_1 \Rightarrow 2k + 1 = 2m$

$\pi - y_1 + 2k\pi = y_1 + 2m\pi \Rightarrow y_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi + m\pi \Rightarrow y_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - k\pi + m\pi$

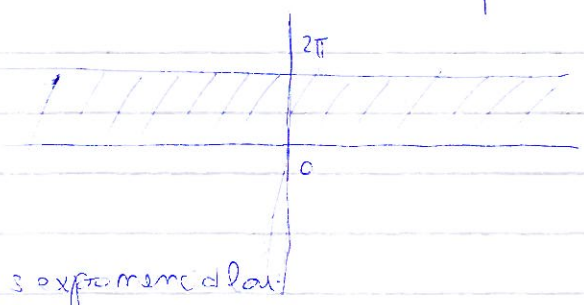
$y_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi + m\pi \Rightarrow y_2 - y_1 = 2\pi m$



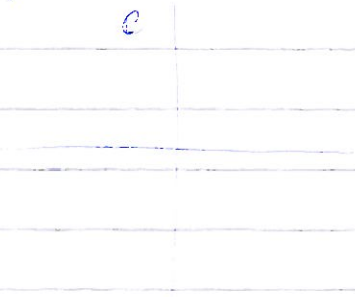
$\Rightarrow y_1 = y_2$

Další možnosti: dle v. (buď spor nebo $y_1 = y_2$) ∎

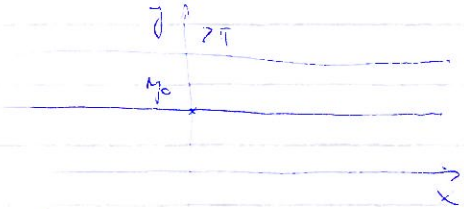
Pozn:



do

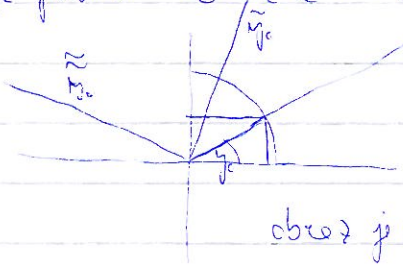


Výpočty s exponenciálou:



$z = x + iy_0$, y_0 pevné $\quad e^z = e^x e^{iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0)$

$x \in \mathbb{R}$



řešením je polopřímka

daná úhlem y_0 (až do

obraz je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad 2\pi$)

Výpočet s exponenciálou:

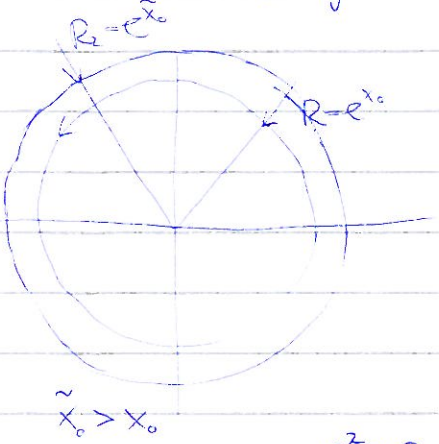
$(0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi)$

Kam exp zobrazí přímky $z = x_0 + iy$, $y \in \mathbb{R}$

$e^z = e^{x_0 + iy} = e^{x_0}(\cos y + i \sin y) \Rightarrow |e^z| = |e^{x_0}||\cos y + i \sin y| = |e^{x_0}| = e^{x_0} > 0$

$e^z = R(\cos y + i \sin y)$, $y \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Im}(\exp(x_0 + iy)) = S^1(0, e^{x_0})$



Může $e^z = 0 \iff e^x(\cos y + i \sin y) = 0 \;/\cdot \overline{1}$

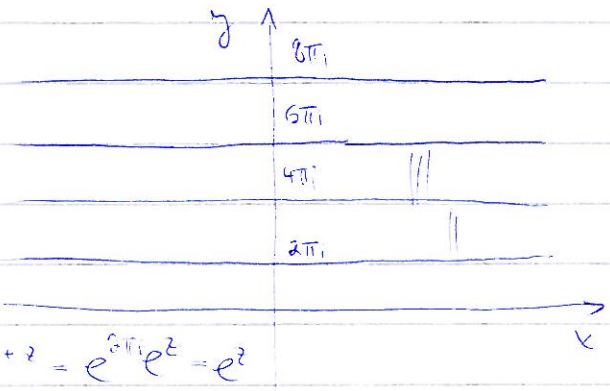
$z = x + iy \quad \Rightarrow e^x |e^{iy}| = 0$

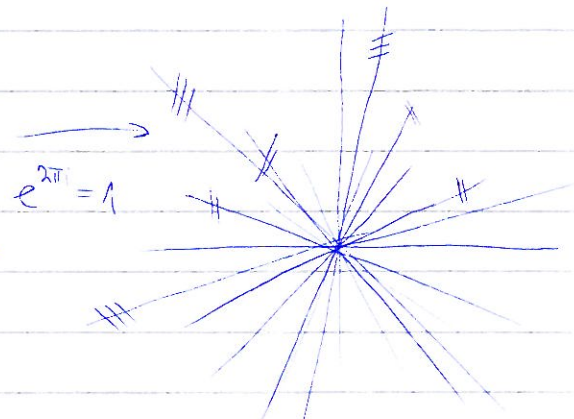
$|e^{iy}| = 1$

$\Rightarrow e^x = 0$ ↯

$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

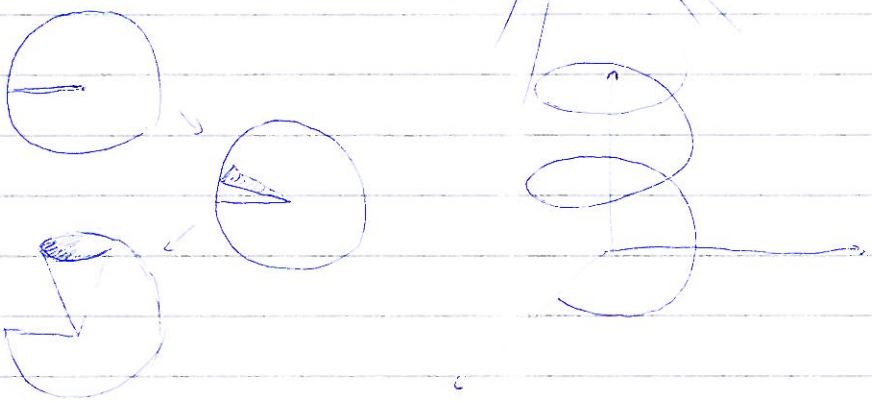
Shrnutí 1 a 3 výpočet implikuje, že $\exp: \mathbb{C} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$





$e^{2\pi i + z} = e^{2\pi i} e^z = e^z$

$\operatorname{Im} z \in (0, 2\pi)$



Věta 3.31 Cauchyův vzorec

Nechť $f: U(z_0, R) \to \mathbb{C}$ je holomorfní a nechť γ označuje hranici $\overline{U(z_0, R)}$. Pak

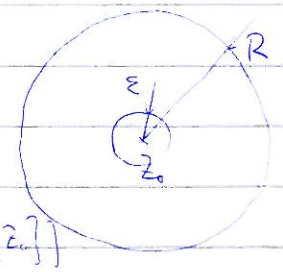
$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz$$

Pozn: Zmáme-li $f(z)$ pro $z \in \operatorname{Im} \gamma \Rightarrow$ zmáme holomorfní uvnitř (f holomorfní)

Dk: Pro $k = 0$ $\quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)}$

$V = U(z_0, R) \setminus U(z_0, \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < R)$

$\partial V = S^+(z_0, R) - S^+(z_0, \varepsilon)$



$f(z)$ je holomorfní $U(z_0, \varepsilon)$ spec. na V

$\frac{1}{z - z_0}$ je holomorfní na V (dokonce všude na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$)

$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z - z_0)}$ je holomorfní na V (dle Cauchyovy věty (II.3.35)) platí, že $\int_{\partial V} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{S^+(z_0, R)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - \int_{S^+(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \Big/ \lim_{\varepsilon \to 0} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S^+(z_0, R)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S^+(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0 + \varepsilon e^{it})\,i\,dt =$$

$S^+(z_0, \varepsilon) \dots \gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$

$cp + TD \Rightarrow$ f spojitá (pro $\varepsilon = 0$)

$\Leftarrow$ f holomorfní na okolí z_0

$$= \int_0^{2\pi} f(z_0)\,i\,dt = 2\pi i f(z_0)$$

Zdůvodnění $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \dots$ f je spojitá v $z_0 \Rightarrow f$ spojitá v proměnné t na $X = [0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ spojitá na uz. a om. intervalu $\Rightarrow |f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ je spojitá na om. a uz. int. $\Rightarrow |f|$ má maximum

$$|f| \leq C \cdot = \max \{ |f(z_0 + \varepsilon e^{it})|,\ t \in [0, 2\pi] \}$$

Cauchyova věta $\int_{\partial U(z_0, R)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$

II. Pp. že výrok platí pro k

$$f^{(k+1)}(z_0) = \left[f^{(k)} \right]'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(z_0 + h) - f^{(k)}(z_0)}{h} \overset{\text{ind. 2.}}{\overset{\text{PP}}{=}} \lim_{h \to 0} \int_\gamma \left[\frac{f(z)\,k!}{(z - z_0 - h)^{k+1}} - \frac{f(z)\,k!}{(z - z_0)^{k+1}} \right] \frac{1}{2\pi i h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k!}{2\pi i h} \int_\gamma \frac{f(z)\left[(z - z_0)^{k+1} - (z - z_0 - h)^{k+1} \right]}{(z - z_0)^{k+1} (z - z_0 - h)^{k+1}} dz = \lim_{h \to 0} \frac{k!}{2\pi i h} \int_\gamma \frac{f(z)\left[(z - z_0)^{k+1} - \sum_{m=0}^{k+1} (z - z_0)^{k+1-m} \dots \right]}{(z - z_0)^{k+1} (z - z_0 - h)}$$

$$\frac{(-1)^m h^m \binom{k+1}{m}}{} dz - \lim_{h \to 0} \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \left[(z - z_0)^k (k+1) + h^2 (z - z_0)^{k-1} (\dots) + h^3 (\dots) \cdot h^{k+1} \right] \Big/ (z - z_0)^{k+1} (z - z_0 - h)^{k+1} \, d$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)(k+1)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz$$

$\lim_{h \to 0}$ $\int_\gamma$ ∎

Pozn: Zobecněná Cauchyova vzorce. Nechť U je omezená a členěná množina (= oblast) s hranicí ∂U. f holomorfní v U, $z_0 \in U$, $z_0 \notin \partial U$. Pak $\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \cdot \frac{1}{2\pi i} = f(z_0)$

Dk: Vezmi $U(z_0,\varepsilon) \subset U$ $\quad V := U \setminus U(z_0,\varepsilon)$ $\quad \partial V = \partial U - S^-(z_0,\varepsilon)$

Cauchyova věta $\int_{\partial V} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$, $\frac{1}{z-z_0}$ je holomorfní na $U \setminus U(z_0,\varepsilon)$

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz - \int_{\partial U(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0 \quad \Rightarrow \int_{\partial U} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \int_{\partial U(z_0,\varepsilon)=S^+(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad / \lim_{\varepsilon \to 0}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})}{z_0+\varepsilon e^{it}-z_0} \cdot i\varepsilon e^{it}\,dt = 2\pi i f(z_0)$$ □

Důsledek 3.38

f buď holomorfní na nějakém okolí U bodu z_0. Pak $f^{(k)}(z_0)$ $\exists$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$

Dk: $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$

A.d.

Formálně: důsledek Cauchyových formulí. Jakmile má fce 1 derivaci tak má všechny. □

Pozn: Vztah k Laplaceově rovnici. Víme (věta o CR-podm) $f'(z_0)$ $\exists \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ $\exists$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ $\exists$

3.38 $\Rightarrow \exists f''(z_0) \overset{CR}{\Rightarrow} \exists \frac{\partial}{\partial x}(f')$ $\exists \frac{\partial}{\partial y} f'$

$\exists$ TD $\Rightarrow \exists$ parc. der. (spoj. parc. d. $\Rightarrow \exists$ TD)

$\exists$ p.d. $\not\Leftrightarrow \exists$ TD

$\Rightarrow \exists \Delta f = \Delta \tilde{f}_1 + i \Delta \tilde{f}_2$

pracuj: $\Delta \tilde{f}(x,y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial x^2}(x,y) + i \frac{\partial^2 \tilde{f}_2}{\partial x^2}(x,y)$

$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial y^2}(x,y) + i \frac{\partial^2 \tilde{f}_2}{\partial y^2}(x,y)$

Věta 3.39 Laplaceova věta

Nechť f holomorfní na $U \Rightarrow \Delta f = 0$ na U.

Dk: f holomorfní na $U \Rightarrow f$ splňuje v každém bodě U CR-podmínky (a navíc tot. dif.)

$\overset{\text{def. CR}}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ na U

pomocí $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

$\Delta f = ?$ $\quad 0 = \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f}_{=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2} f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ mám $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je sp.

$= \frac{1}{4}\Delta f \Rightarrow \Delta f = 0$ □

Pozn:

Vzorec $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z} \partial z}$

Víme f, že $\Delta f = 0$ říkáme harmonická (bez zdrojů)

$\Delta f = \Delta f_1 + i\Delta f_2 = 0 \Rightarrow \Delta f_1 = 0 \Rightarrow f_1$ je potenciál bezezdrojových prostorů

$\Delta f_2 = 0$

Př



torus $\Delta\varphi = 0$ na $T^2 = S^1 \times S^1$

γ_1, γ_2 jsou otevřené homotopie jednorozměrných uzavřených křivek na T^2

Obtížné jedk že $\{\varphi / \Delta\varphi = 0\}$ má tvar dimenze 2 ($\#\{\gamma_1, \gamma_2\} = 2$)

Ve chí mymi $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ $\{\varphi / \Delta\varphi = 0\} \cong \mathbb{R}$

3.2 Vícerozměrné funkce

Definice 3.24

Řada $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ se nazývá Laurentovou řadou (v bodě z_0). Řekneme, že Laurentova řada konverguje $\Leftrightarrow$ $S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ konverguje a $S_-(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ konverguje.

Součtem Laurentovy řady je $S(z) = S_+(z) + S_-(z)$. Regulární část $= S_+(z)$, hlavní část $= S_-(z)$.

Pozn $L(z)$, $S_+(z)$, $S_-(z)$ jsou řady funkcí, nikoli množinové řady.