Eine mathematische Einführung in die konforme Feldtheorie

Vorlesung am

Mathematischen Seminar der Universität Hamburg

Martin Schottenloher
(München)

November/Dezember 1994

Mitschrift von Andreas Jochens (Hamburg)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Konforme Feldtheorie in zwei Dimensionen hat ihren Ursprung in der Statistischen Physik (siehe [BPZ84] als grundlegende Arbeit und [Gin89] als Einführung). Sie steht in enger Beziehung zur Stringtheorie und zu anderen zweidimensionalen physikalischen Theorien (siehe z.B. [LPSA94]). Insbesondere sind alle masselosen Feldtheorien konform invariant. Das Besondere an der konformen Feldtheorie in zwei Dimensionen ist das Vorliegen einer unendlichen Anzahl von unabhängigen Symmetrien des Systems, welche zu entsprechenden Zwangsbedingungen führen. Diese Symmetrien können als infinitesimale konforme Symmetrien der euklidischen Ebene verstanden werden. Da die konformen, orientierungstreuen Transformationen auf offenen Mengen der euklidischen Ebene holomorph sind, besteht ein Zusammenhang der konformen Feldtheorie mit der Funktionentheorie. Dieser Zusammenhang liefert bemerkenswerte physikalische Resultate über Modulräume von Vektorbündeln über kompakten Riemannschen Flächen, also physikalische Anwendungen in der Mathematik.

Das Ziel der Vorlesung war es, das Auftreten der Virasoro-Algebra im Zusammenhang mit der konformen Symmetrie in zwei Dimensionen zu beschreiben und zu erklären. Mit Blick auf die üblichen Schwierigkeiten eines Mathematikers beim Lesen von Texten über konforme Feldtheorie war es ein Hauptanliegen der Vorlesung, nicht an ein Hintergrundwissen über Standardmethoden der Physik zu appellieren und darauf aufzubauen. Stattdessen wurde versucht, die auftretenden Begriffe und Methoden vollständig auf mathematische Weise darzustellen. Das erklärt das Adjektiv "mathematisch" im Titel der Vorlesung. Ein wesentliches Motiv für den Gegenstand der Vorlesung war auch, auf den verwirrenden Sprachgebrauch der Physiker einzugehen, die z.B. betonen, daß die konforme Gruppe der holomorphen Abbildungen der komplexen Ebene unendlichdimensional sei — was nicht stimmt —, dabei aber meinen, daß eine bestimmte, mit der konformen Symmetrie in enger Beziehung stehende Lie-Algebra — nämlich die Virasoro-Algebra — unendlichdimensional ist.

Es ist klar, daß bei dieser Zielsetzung die Vorlesung kaum zur eigentlichen konformen Feldtheorie kommen konnte. Diese tritt im Rahmen der Vorlesung nur als Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra (Abschnitt 6) auf. Der vorliegende Text ist daher als Vorbereitung zur konformen Feldtheorie zu verstehen, als Einstieg in die konforme Feldtheorie für Mathematiker. Der Physiker mag seinen Nutzen ziehen aus der ausführlichen Darstellung einiger elementarer Strukturen.

Aufbau der Vorlesung: Um die gerade erläuterten Aufgaben zu erfüllen, ist es sinnvoll, erst einmal die konformen Transformationen in beliebigen Dimensionen und in Bezug auf beliebige Signaturen ausführlich zu beschreiben (Abschnitt 1) und die zugehörigen konformen Gruppen zu bestimmen (Abschnitt 2). Die nächsten beiden Abschnitte dienen dazu, zentrale Erweiterungen von Gruppen und Lie-Algebren einzuführen. Denn bei einer Quantisierung ist die Symmetriegruppe des Quantensystems in der Regel eine zentrale Erweiterung der klassischen Symmetriegruppe. Der fünfte Abschnitt führt die Virasoro-Algebra als die einzige nichttriviale zentrale Erweiterung der Witt-Algebra ein. Die Witt-Algebra ist der entscheidende Baustein der klassischen konformen Symmetrie in zwei Dimensionen für die euklidische Ebene und für die Minkowski-Ebene! Damit endet der erste Teil der Vorlesung, der vergleichsweise elementar ist und in dem im großen und ganzen alle Beweise ausgeführt werden. Beides gilt nicht mehr für den zweiten Teil, der mit der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra beginnt (Abschnitt 6), kurz auf die Darstellungstheorie von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$ (Abschnitt 7) und die Stringtheorie (Abschnitt 8) eingeht, bevor in den beiden abschließenden Abschnitten über ein Axiomensystem für zweidimensional konform invariante Quantenfeldtheorien und über die Verlinde-Formel als eine Anwendung der konformen Feldtheorie in der Mathematik berichtet wird.

Der vorliegende Text ist eine überarbeitete Mitschrift einer Vorlesung, die ich im November/Dezember 1994 als Gastprofessor am Mathematischen Seminar der Universität Hamburg gehalten habe. Eine Reihe von Argumenten, die seinerzeit nur mündlich angesprochen wurden, konnte so eingefügt werden. Außerdem sind im Vergleich zur Vorlesung die Abschnitte 9 und 10 hinzugekommen. Abschnitt 10 entspricht dabei dem Stoff von Seminarvorträgen im November/Dezember 1994 in Hamburg.

P. Slodowy, H. Brunke und A. Jochens möchte ich für Verbesserungsvorschläge danken und A. Jochens außerdem für die Erstellung der ersten Mitschrift sowie für die Umsetzung des Textes in eine TEX-Datei.

München, den 3. Oktober 1995

E-mail:
schotten@rz.mathematik.uni-muenchen.de (Martin Schottenloher)
jochens@ibm.net (Andreas Jochens)

Diese Vorlesungsausarbeitung ist abrufbar unter der Adresse:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~gkadmin/preprint

Teil I

Mathematische Vorbetrachtungen

1 Konforme Abbildungen und konforme Killingfelder

1.1 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 1.1 *Eine* Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit *ist ein Paar (M, g), bestehend aus einer differenzierbaren (d.h. C^∞-) Mannigfaltigkeit M und einem differenzierbaren Tensorfeld g, das jedem Punkt $a \in M$ eine nichtausgeartete, symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum T_aM zuordnet:*

$$g_a : T_aM \times T_aM \to \mathbb{R}$$

In lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ der Mannigfaltigkeit M schreibt sich diese Bilinearform g_a als

$$g_a(X, Y) = g_{\mu\nu}(a) X^\mu Y^\nu$$

wobei die Tangentialvektoren $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu \in T_aM$ durch die Basis $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 1, \ldots, n$, dargestellt werden. Nach Voraussetzung ist die Matrix $(g_{\mu\nu}(a))$ nichtausgeartet und symmetrisch, d.h. es gilt

$$\det(g_{\mu\nu}(a)) \neq 0 \quad \text{und} \quad (g_{\mu\nu}(a))^T = (g_{\mu\nu}(a)).$$

Außerdem bedeutet die Differenzierbarkeit von g, daß die Koeffizienten $g_{\mu\nu}(a)$ von a differenzierbar abhängen. Es muß aber nicht $g_{\mu\nu}(a) X^\mu X^\nu > 0$ für alle $X \neq 0$ gelten, d.h. die Matrix $(g_{\mu\nu}(a))$ braucht nicht positiv definit zu sein. Durch diese Eigenschaft sind gerade die Riemannschen unter den Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten ausgezeichnet.

Beispiele :

- $\mathbb{R}^{p,q} = (\mathbb{R}^{p+q}, g^{p,q})$ für $p, q \in \mathbb{N}$, wobei $g^{p,q}(X, Y) := \sum_{i=1}^{p} X^i Y^i - \sum_{i=p+1}^{p+q} X^i Y^i$, also

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1).$$

- $\mathbb{R}^{1,3}$ oder $\mathbb{R}^{3,1}$: der übliche *Minkowski-Raum*.
- $\mathbb{R}^{1,1}$: der zweidimensionale Minkowski-Raum (*Minkowski-Ebene*).
- $\mathbb{R}^{2,0}$: die *euklidische Ebene*.
- $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{3,0}$: Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{2,0}$. Dabei erhält die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ die von $\mathbb{R}^{3,0}$ induzierte Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

- $\mathbb{S}\times\mathbb{S}\subset\mathbb{R}^{2,2}$: Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{1,1}$. Genauer: $\mathbb{S}\times\mathbb{S}\subset\mathbb{R}^{2,0}\times\mathbb{R}^{0,2}\cong\mathbb{R}^{2,2}$, wobei die erste Kreislinie $\mathbb{S}=\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^{2,0}$ liegt, die zweite in $\mathbb{R}^{0,2}$ und $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ schließlich die von $\mathbb{R}^{2,2}$ induzierte Struktur einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit hat.

- $\mathbb{S}^p\times\mathbb{S}^q\subset\mathbb{R}^{p+1,0}\times\mathbb{R}^{0,q+1}\cong\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ mit der p-Sphäre $\mathbb{S}^p\subset\mathbb{R}^{p+1,0}$ und der q-Sphäre $\mathbb{S}^q\subset\mathbb{R}^{0,q+1}$ als Verallgemeinerung des letzten Beispiels. Diese kompakte Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit $\mathbb{S}^{p,q}$.

Als weitere Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten werden im folgenden — abgesehen von offenen Teilräumen — nur noch die Quadriken $N^{p,q}$ in (2.1) benötigt (die im übrigen lokal zu $\mathbb{S}^{p,q}$ konform isomorph sind).

1.2 Konforme Transformationen

Definition 1.2 *Seien $(M,g),(M',g')$ zwei Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $U\subset M, V\subset M'$ offene Teilmengen von M bzw. M'. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi: U\to V$ heißt* konforme Transformation *(oder einfach* konform*), wenn es eine differenzierbare Funktion $\Omega: U\to\mathbb{R}_+$ gibt, so daß $\varphi^*g'=\Omega^2 g$ gilt. Dabei ist*

$$\varphi^*g'(X,Y):=g'(T\varphi(X),T\varphi(Y)),$$

wobei $T\varphi: TU\longrightarrow TV$ die Tangentialabbildung (Ableitung) von φ bezeichnet, also in lokalen Koordinaten von M bzw. M'

$$(\varphi^*g')_{\mu\nu}(a)=g'_{ij}(\varphi(a))\,\partial_\mu\varphi^i\partial_\nu\varphi^j.$$

Ω heißt der Konformfaktor *von φ. Teilweise verlangt man zusätzlich, daß φ bijektiv oder orientierungstreu oder beides ist.*

Beispiele :

- Lokale Isometrien, also differenzierbare φ mit $\varphi^*g'=g$, sind konforme Transformationen mit $\Omega=1$.

- Wir identifizieren $\mathbb{R}^{2,0}\cong\mathbb{C}$. Dann gilt für offene $U,V\subset\mathbb{C}$ und differenzierbare $\varphi: U\longrightarrow V$:

  $$\varphi \text{ konform und bijektiv} \Longleftrightarrow \varphi \text{ biholomorph oder anti-biholomorph.}$$

  Die linearen Abbildungen $\varphi:\mathbb{R}^{2,0}\longrightarrow\mathbb{R}^{2,0}$ mit darstellender Matrix

  $$A=A_\varphi=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

  sind genau dann konform und orientierungstreu, wenn $a=d$, $b=-c$ und $a^2+c^2\neq 0$ gilt. Außerdem folgt aus elementaren Sätzen über ganze holomorphe Funktionen, daß jede konforme und orientierungstreue Abbildung $\varphi:\mathbb{R}^{2,0}\longrightarrow\mathbb{R}^{2,0}$ von der Form

  $$\varphi(x,y)=(ax-cy,cx+ay)+(r,s)$$

  ist, mit $a,c\in\mathbb{R}$ wie oben und einem Translationsvektor $(r,s)\in\mathbb{R}^2$.

- Die *stereographische Projektion*

$$\begin{array}{rcl}\pi: \ \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} & \to & \mathbb{R}^{2,0} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{1-z}(x,y)\end{array}$$

ist konform mit $\Omega = \frac{1}{1-z}$. Dazu genügt es, die Konformität der Umkehrabbildung $\varphi := \pi^{-1} : \mathbb{R}^{2,0} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{3,0}$ zu zeigen. Es ist

$$\varphi(\xi,\eta) = \frac{1}{1+r^2}(2\xi, 2\eta, r^2-1),$$

$(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $r = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Für die Tangentialvektoren $X_1 = \frac{\partial}{\partial\xi}, X_2 = \frac{\partial}{\partial\eta}$ errechnet man

$$\begin{aligned} T\varphi(X_1) &= \frac{d}{dt}\,\varphi(\xi+t,\eta)|_{t=0} = 2\left(\frac{1}{1+r^2}\right)^2 (r^2+1-2\xi^2, -2\xi\eta, 2\xi) \\ T\varphi(X_2) &= 2\left(\frac{1}{1+r^2}\right)^2 (-2\xi\eta, r^2+1-2\eta^2, 2\eta). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$g'\left(T\varphi(X_i), T\varphi(X_j)\right) = \left(\frac{2}{1+r^2}\right)^2 (\delta_{ij})$$

mit $\Lambda = \frac{2}{1+r^2}$ als Konformfaktor von φ. Daher hat $\pi = \varphi^{-1}$ den Konformfaktor $\Omega = \Lambda^{-1} = \frac{1}{2}(1+r^2) = \frac{1}{1-z}$.
Analog ist die stereographische Projektion der n-Sphäre,

$$\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n,0},$$

eine konforme Abbildung.

- $$\begin{array}{rcl}\varphi: \ \mathbb{R}^{2,0} & \longrightarrow & \mathbb{S}\times\mathbb{S} \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2,0}\times\mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{R}^{4,0}, \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1+ia^+}{1-ia^+}, \frac{1+ia^-}{1-ia^-}\right)\end{array}$$

mit $a^\pm := \frac{1}{2}(x \pm y)$ ist eine konforme Abbildung in die Riemannsche Version $\mathbb{S}^{2,0}$ von $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$. Beweis: Übung! Im übrigen ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^{1,1} = \mathbb{S}\times\mathbb{S}$ eine konforme Abbildung, wenn die Metrik auf $\mathbb{R}^2$ durch die Minkowski-Metrik

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle := \frac{1}{2}(xy'+yx')$$

gegeben ist. Das ist eine Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^2$, für die das Achsenkreuz mit dem Lichtkegel $L = \{(x,y) : \langle (x,y),(x,y)\rangle = 0\}$ in $0 \in \mathbb{R}^2$ übereinstimmt. $\mathbb{R}^2$ mit dieser Metrik ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^{1,1}$ vermöge $\psi : \mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

- $$\begin{array}{rcl}\xi: \ \mathbb{R}^{1,1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{1,1} = \mathbb{S}\times\mathbb{S} \cong \mathbb{R}^{2,0}\times\mathbb{R}^{0,2}, \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1}, \frac{2y}{y^2+1}, \frac{y^2-1}{y^2+1}\right)\end{array}$$

dagegen ist eine konforme Abbildung in die nicht-Riemannsche Version $\mathbb{S}^{1,1}$ von $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ und liefert damit eine konforme Kompaktifizierung der Minkowski-Ebene. ξ entspricht der Komposition $\varphi\circ\psi$ bis auf eine Vertauschung von Koordinaten.

- Die Komposition von zwei konformen Abbildungen ist stets konform. Mit dieser Eigenschaft kann man zum Beispiel die beiden vorangegangenen Beispiele behandeln.

1.3 Konforme Killingfelder

Im folgenden sollen die konformen Abbildungen $\varphi : M \longrightarrow M'$ zwischen offenen Teilmengen $M, M' \subset \mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n > 1$, studiert werden. Zunächst werden sie durch eine infinitesimale Betrachtung klassifiziert:

Sei $X : M \subset \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann ist $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ eine autonome Differentialgleichung. Die *lokale Einparametergruppe* $\left(\varphi_t^X\right)_{t\in\mathbb{R}}$ zu X ist definiert durch die maximalen Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^X(t,a)\right) = X\left(\varphi^X(t,a)\right)$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi^X(0,a) = a$. Für jeden Punkt $a \in U$ ist $\varphi^X(\cdot, a)$ also auf dem maximalen Intervall $]t_a^-, t_a^+[$ definiert. Sei $M_t := \{a \in M : t_a^- < t < t_a^+\}$ und $\varphi_t^X(a) := \varphi^X(t,a)$ für $a \in M_t$. Dann ist $M_t \subset M$ offen, $\varphi_t^X : M_t \longrightarrow M_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus und es gilt $\varphi_t^X \circ \varphi_s^X(a) = \varphi_{s+t}^X(a)$, falls $a \in M_{t+s} \cap M_s$ und $\varphi_s^X(a) \in M_t$.

Definition 1.3 *Ein Vektorfeld X auf $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ heißt* konformes Killingfeld*, wenn φ_t^X für alle t in einer Umgebung von 0 konform ist.*

Satz 1.4 *Sei $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ offen, $g = g^{p,q}$ und X ein konformes Killingfeld mit*

$$X = \left(X^1, ..., X^n\right) = X^\nu \partial_\nu .$$

Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $\kappa : M \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu}$$

gilt. Dabei verwenden wir die Schreibweise: $f_{,\nu} := \partial_\nu f$, $X_\mu := g_{\mu\nu} X^\nu$.

Beweis. Sei X ein konformes Killingfeld, φ_t die zugehörige lokale Einparametergruppe und $\Omega_t : M_t \to \mathbb{R}^+$, so daß

$$\left(\varphi_t^* g\right)_{\mu\nu}(a) = g_{ij}\left(\varphi_t(a)\right) \partial_\mu \varphi_t^i \, \partial_\nu \varphi_t^j = \left(\Omega_t(a)\right)^2 g_{\mu\nu}(a) .$$

Ableitung nach t ergibt an der Stelle $t = 0$ (g_{ij} ist konstant!):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\Omega_t^2(a)\, g_{\mu\nu}(a)\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\left(\varphi_t(a)\right) \partial_\mu \varphi_t^i \, \partial_\nu \varphi_t^j\right)\Big|_{t=0} \\
&= g_{ij} \partial_\mu \dot{\varphi}_0^i \, \partial_\nu \varphi_0^j + g_{ij} \partial_\mu \varphi_0^i \, \partial_\nu \dot{\varphi}_0^j \\
&= g_{ij}\, \partial_\mu X^i(a)\, \delta_\nu^j + g_{ij}\, \delta_\mu^i \, \partial_\nu X^j(a) \\
&= \partial_\mu X_\nu(a) + \partial_\nu X_\mu(a)
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit $\kappa(a) = \frac{d}{dt}\, \Omega_t^2(a)\big|_{t=0}$. ■

Ist $g_{\mu\nu}$ nicht konstant, dann gilt

$$\left(L_X g\right)_{\mu\nu} = X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu} = \kappa g_{\mu\nu} .$$

Dabei ist L_X die Lie-Ableitung und ein Semikolon im Index steht für die kovariante Ableitung des Levi-Civita-Zusammenhangs zu g.

Definition 1.5 *Eine differenzierbare Funktion* $\kappa : M \subset \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* konformer Killingfaktor, *wenn es ein konformes Killingfeld* X *gibt, so daß*

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu}.$$

Satz 1.6 $\kappa : U \to \mathbb{R}$ *ist ein konformer Killingfaktor* $\Longleftrightarrow (n-2)\,\kappa_{,\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Delta_g\kappa = 0$. *Dabei ist* $\Delta_g = g^{kl}\partial_k\partial_l$ *der* Laplace-Beltrami-Operator *zu* $g = g^{p,q}$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $\kappa : U \to \mathbb{R}$ und $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu}$ ($U \subset \mathbb{R}^{p,q}, g = g^{p,q}$). Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_k\partial_l\left(X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu}\right) - \partial_l\partial_\mu\left(X_{k,\nu} + X_{\nu,k}\right) + \partial_\mu\partial_\nu\left(X_{k,l} + X_{l,k}\right) - \partial_\nu\partial_k\left(X_{\mu,l} + X_{l,\mu}\right) \\ &= g_{\mu\nu}\,\kappa_{,kl} - g_{k\nu}\,\kappa_{,l\mu} + g_{kl}\,\kappa_{,\mu\nu} - g_{\mu l}\,\kappa_{,\nu k}. \end{aligned}$$

Multplikation mit g^{kl} (definiert durch $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$) ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= g^{kl}g_{\mu\nu}\,\kappa_{,kl} - g^{kl}g_{k\nu}\,\kappa_{,l\mu} + g^{kl}g_{kl}\,\kappa_{,\mu\nu} - g^{kl}g_{\mu l}\,\kappa_{,\nu k} \\ &= g^{kl}\left(g_{\mu\nu}\,\kappa_{,kl}\right) - \delta^l_\nu\;\kappa_{,l\mu} + n\,\kappa_{,\mu\nu} - \delta^k_\mu\,\kappa_{,l\mu} \\ &= g_{\mu\nu}\Delta_g\kappa + (n-2)\,\kappa_{,\mu\nu}. \end{aligned}$$

Die Umkehrung "$\Leftarrow$" folgt aus den Betrachtungen in Abschnitt 1.4. ■

Der Satz ist auch richtig für offene U in Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit ";" anstelle von ",".

Wichtige Beobachtung: Für $n = 2$ ist $\Delta_g\kappa = 0$ die einzige Bedingung dafür, daß κ konform ist. Für $n > 2$ gibt es dagegen viele weitere Bedingungen. Genauer:

$$\begin{aligned} \kappa_{,\mu\nu} &= 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ \kappa_{,\mu\mu} &= \pm(n-2)^{-1}\Delta_g\kappa. \end{aligned}$$

1.4 Klassifikation der konformen Transformationen

Mit Hilfe der Implikation "$\Rightarrow$" aus Satz 1.6 sollen alle konformen Killingfelder und damit alle konformen Transformationen auf offenen $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ bestimmt werden.

1.4.1 Fall 1: $p + q > 2$

Aus den Gleichungen $g_{\mu\mu}(n-2)\kappa_{,\mu\mu} + \Delta_g\kappa = 0$ für einen konformen Killingfaktor κ folgt durch Aufsummieren $(n-2)\Delta_g\kappa + n\Delta_g\kappa = 0$, also $\Delta_g\kappa = 0$ (wie im Fall $n = 2$). Aus $\kappa_{,\mu\nu} = 0$ für alle μ, ν (denn wegen $\Delta_g\kappa = 0$ gilt ja auch $\kappa_{\mu\mu} = 0$) ergibt sich

$$\kappa_{,\mu}\left(q^1, \ldots, q^n\right) = a_\mu \in \mathbb{R}, \text{ const.}, \quad \mu = 1, \ldots, n.$$

Die Lösungen von $(n-2)\kappa_{,\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Delta_g\kappa = 0$ sind also die affin-linearen Abbildungen

$$\kappa(q) = \lambda + \alpha_\nu q^\nu, \quad q = (q^\nu) \in M \subset \mathbb{R}^n,$$

mit $\lambda, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$.

Als erstes sollen jetzt sämtliche konformen Killingfelder X mit Killingfaktor $\kappa = 0$ bestimmt werden (also die eigentlichen Killingfelder, die zu Isometrien gehören). $X_{\mu,\mu} + X_{\mu,\mu} = 0$ bedeutet, daß X^μ unabhängig von q^μ ist. Wegen $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = 0$ folgt $X^\mu_{,\nu} = 0$. Also hat X^μ die Form

$$X^\mu(q) = c^\mu + \omega^\mu_\nu q^\nu$$

mit $c^\mu \in \mathbb{R}$, $\omega^\mu_\nu \in \mathbb{R}$.

Für den Fall $\omega^\mu_\nu = 0$ ist durch $X^\mu(q) = c^\mu$ die Differentialgleichung

$$\dot{q} = c,$$

also die (globale!) Einparametergruppe $\varphi^X(t, q) = q + tc$ bestimmt. Die zugehörige Transformation ist die *Translation*

$$\varphi_c(q) = q + c.$$

Im Fall $c = 0$ und $\omega = (\omega^\mu_\nu)$ bedeuten die Gleichungen $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = g_{\mu\nu}\kappa$ gerade

$$g_{\nu\rho}\,\omega^\rho_\mu + g_{\mu\rho}\,\omega^\rho_\nu = 0,$$

d.h. $\omega^T g + g\,\omega = 0$. Also sind diese Lösungen gerade durch die Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(p,q) := \left\{\omega : \omega^T g^{p,q} + g^{p,q}\omega = 0\right\}$ gegeben und die zugehörigen konformen Transformationen sind die orthogonalen Abbildungen

$$\varphi_\Lambda : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}, \quad a \mapsto \Lambda a$$

mit

$$\Lambda \in O(p,q) := \left\{\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n} : \Lambda^T g^{p,q}\Lambda = g^{p,q}\right\}$$

oder $O(p,q) = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n} : \langle \Lambda x, \Lambda x' \rangle = \langle x, x' \rangle\}$ bezüglich der durch $g^{p,q}$ gegebenen symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Damit sind alle Isometrien von offenen $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ bestimmt; sie sind Restriktionen von Abbildungen

$$\varphi(q) = \varphi_\Lambda(q) + c, \quad \Lambda \in O(p,q), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

und bilden eine endlichdimensionale Lie-Gruppe, die Gruppe der zu $g^{p,q}$ gehörigen Bewegungen, die auch als semidirektes Produkt von $O(p,q)$ und $\mathbb{R}^n$ beschrieben werden kann.

Zum konstanten Killingfaktor $\kappa = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gehört das konforme Killingfeld $X(q) = \lambda q$, das wiederum zu der konformen Transformation

$$\varphi(q) = e^\lambda q,$$

einer *Dilatation*, gehört.

Bisher haben alle betrachteten konformen Transformationen auf $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ unmittelbar eine eindeutige konforme Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}^{p,q}$. Das gilt nicht mehr für die folgenden konformen Transformationen.

Jeder konforme Killingfaktor $\kappa \neq 0$ ohne konstanten Term kann nach dem Vorangehenden als

$$\kappa(q) = 4\langle q, b\rangle, \quad q \in \mathbb{R}^n,$$

mit $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\langle q, b\rangle = g^{p,q}_{\mu\nu} q^\mu b^\nu$ geschrieben werden. Durch direktes Nachrechnen zeigt sich, daß der Ansatz

$$X^\mu(q) := 2\langle q, b\rangle q^\mu - \langle q, q\rangle b^\mu, \quad \text{für}$$

für $q \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu}$ liefert. Damit ist insbesondere "$\Leftarrow$" zu Satz 1.6 für $n > 2$ bewiesen. Für jede andere Lösung $\tilde{X}$ hat $\tilde{X} - X$ den konformen Killingfaktor 0, d.h. $\tilde{X}$ ist nach dem Vorangehenden von der Form

$$\tilde{X} = X + \Lambda q + c + \omega q.$$

Übung 1.7 *Man zeige, daß die Lie-Klammer zweier konformer Killingfelder wieder ein konformes Killingfeld ist und daß die Gesamtheit der konformen Killingfelder als Lie-Algebra isomorph zu $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ ist (vgl. Übung 1.9).*

Die Killingfelder $X(q) = 2\langle q, b\rangle q - \langle q, q\rangle b$ haben (für $b \neq 0$) keine globalen Einparametergruppen als Lösungen von $\dot{q} = X(q)$, sondern

$$\varphi_t(q) = \frac{q - \langle q, q\rangle tb}{1 - 2\langle q, tb\rangle + \langle q, q\rangle \langle tb, tb\rangle}.$$

Die zugehörige konforme Transformation

$$\varphi(q) = \frac{q - \langle q, q\rangle b}{1 - 2\langle q, b\rangle + \langle q, q\rangle \langle b, b\rangle}$$

hat daher (als Abbildung nach $\mathbb{R}^{p,q}$) bestenfalls eine Fortsetzung auf

$$M = M_1 := \{q \in \mathbb{R}^{p,q} | 1 - 2\langle b, q\rangle + \langle q, q\rangle \langle b, b\rangle \neq 0\}.$$

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 1.8 *Jede konforme Transformation $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$, $n = p + q \geq 3$, auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ ist Komposition*

- *einer Translation $q \mapsto q + c$, $c \in \mathbb{R}^n$,*
- *einer orthogonalen Abbildung $q \mapsto \Lambda q$, $\Lambda \in O(p, q)$,*
- *einer Dilatation $q \mapsto e^\lambda q$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und*
- *einer speziellen konformen Transformation $q \mapsto \dfrac{q - \langle q, q\rangle b}{1 - 2\langle q, b\rangle + \langle q, q\rangle \langle b, b\rangle}$, $b \in \mathbb{R}^n$.*

Genau genommen haben wir nur gezeigt, daß jede konforme Transformation $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$, $p+q > 2$, die als ein Element $\varphi = \varphi_{t_0}$ einer Einparametergruppe (φ_t) von konformen Transformationen auftritt, von der im Satz genannten Form ist. (Dabei ist Λ dann ein Element von $SO(p,q)$, das ist die Komponente von id in $O(p,q)$.) Daraus läßt sich dann aber die Behauptung des Satzes folgern.

Übung 1.9 *Die in Satz 1.8 beschriebenen konformen Abbildungen bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition (trotz der Singularitäten; es handelt sich nicht um eine Untergruppe der Bijektionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$), die zu $O(p+1, q+1)/\{\pm 1\}$ isomorph ist (vgl. Satz 2.6).*

1.4.2 Fall 2: Euklidische Ebene ($p = 2$, $q = 0$)

Dieser Fall wurde bereits als Beispiel mit Hilfe der Funktionentheorie behandelt:

Satz 1.10 *Alle holomorphen Funktionen $\varphi = (u, v) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{2,0}$ mit nirgends verschwindender Ableitung sind konform und orientierungstreu mit $\Omega^2 = u_x^2 + u_y^2 = \det D\varphi$. Umgekehrt ist jede konforme und orientierungstreue Transformation eine solche holomorphe Funktion.*

Das ergibt sich unmittelbar aus den Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen. Dasselbe gilt natürlich für die anti-holomorphen Funktionen und mit der Gesamtheit aller dieser Funktionen sind die konformen Transformationen im euklidischen Fall erschöpft (Beweis als Übung!).

Aus der Sicht der Beschreibung von konformen Transformationen mit Hilfe von konformen Killingvektoren und Killingfaktoren gilt folgendes: Jedes konforme Killingfeld $X = (u, v)$ zum Killingfaktor κ erfüllt $u_y + v_x = 0$ und $u_x = \frac{1}{2}\kappa = v_y$, ist also holomorph.

Im Fall $\kappa = 0$ sind die möglichen Killingfelder von der Form

$$X(z) = c + i\theta z, \quad z \in M,$$

mit $c \in \mathbb{C}$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Dabei verwenden wir die komplexe Schreibweise $z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2,0}$. Die zugehörigen konformen Transformationen sind die euklidischen Bewegungen

$$\varphi(z) = c + e^{i\theta} z.$$

Für lineare Killingfaktoren κ kommen (bei $\kappa = \lambda \in \mathbb{R}$ konstant) noch die Dilatationen

$$X(z) = \lambda z \quad \text{mit} \quad \varphi(z) = e^{\lambda} z$$

und (bei $\kappa = 4\mathrm{Re}(z\bar{b}) = 4(xb_1 + yb_2)$) die "Inversionen" hinzu. Zum Beispiel gilt im Falle $b = (b_1, b_2) = (1, 0)$:

$$\varphi(z) = \frac{z - |z|^2 b}{1 - 2x + |z|^2} = \frac{-1 + 2x - |z|^2 b - x + 1 + iy}{|z-1|^2} = -1 - \frac{\overline{z-1}}{|z-1|} = -\frac{z}{z-1}.$$

Damit sind durch die linearen Killingfaktoren κ gerade die Möbiustransformationen beschrieben.

Für allgemeinere Killingfaktoren $\kappa \neq 0$ folgt aus $\Delta\kappa = 0$, daß es lokal stets holomorphe $X = (u, v)$ mit $u_x + v_y = 0$, $u_x = \frac{1}{2}\kappa = v_y$ gibt. (Damit ist "$\Leftarrow$" in Satz 1.6 für $p = 2, q = 0$ bewiesen, wenn man die Definition von konformen Killingfaktoren lokalisiert.) Die Einparametergruppen (φ_t) zu X sind dann ebenfalls holomorph mit nirgends verschwindender Ableitung.

1.4.3 Fall 3: Minkowski-Ebene ($p = q = 1$)

Satz 1.11 *Für eine differenzierbare Abbildung $\varphi = (u, v) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ auf einer zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{1,1}$ gilt :*

$$\varphi \text{ ist konform} \iff u_x^2 > v_x^2, \text{ sowie } u_x = v_y, u_y = v_x \text{ oder } u_x = -v_y, u_y = -v_x.$$

Beweis. Die Bedingung $\varphi^* g = \Omega^2 g$ für $g = g^{1,1}$ ist äquivalent zu den Gleichungen :

$$u_x^2 - v_x^2 = \Omega^2, \quad u_x u_y - v_x v_y = 0, \quad u_y^2 - v_y^2 = -\Omega^2 \quad \text{mit } \Omega^2 > 0.$$

"$\Leftarrow$" : Aus den drei Gleichungen folgt zunächst $u_x^2 = \Omega^2 + v_x^2 > v_x^2$. Außerdem folgt

$$0 \;=\; \Omega^2 + 2u_x u_y - 2v_x v_y - \Omega^2 \;=\; (u_x + u_y)^2 - (v_x + v_y)^2.$$

Daher ist $u_x + u_y = \pm(v_x + v_y)$. Im Falle von "+" folgt dann

$$0 \;=\; u_x^2 - u_x^2 + v_x v_y - u_x v_y \;=\; u_x^2 - u_x(u_x + v_y) + v_x v_y \;=\; (u_x - v_x)(u_x - v_y).$$

Daher ist $u_x = v_x$ oder $u_x = v_y$. Aber $u_x = v_x$ steht im Widerspruch zu $u_x^2 - v_x^2 = \Omega^2 > 0$.
"$\Rightarrow$" : Mit $\Omega^2 := u_x^2 - v_x^2 > 0$ ergibt sich durch Einsetzen :

$$u_y^2 - v_y^2 \;=\; v_x^2 - u_x^2 \;=\; -\Omega^2 \qquad \text{und} \qquad u_x u_y - v_x v_y \;=\; 0.$$

Also ist φ konform. Im übrigen ist φ orientierungstreu im Falle $u_x = v_y, u_y = v_x$ wegen

$$\det D\varphi \;=\; u_x v_y - u_y v_x \;=\; u_x^2 - v_x^2 \;>\; 0$$

und nicht orientierungstreu im Falle $u_x = -v_y, u_y = -v_x$. ∎

Ein konformer Killingfaktor κ ist wegen $\Delta\kappa = \kappa_{xx} - \kappa_{yy} = 0$ von der Form

$$\kappa(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

mit differenzierbaren Funktionen f und g einer Veränderlichen. Seien F und G Stammfunktionen zu $\frac{1}{2}f$ und $\frac{1}{2}g$. Dann ist

$$X(x, y) = (F(x + y) + G(x - y), F(x + y) - G(x - y))$$

konformes Killingfeld mit $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = g_{\mu\nu}\kappa$. (Damit ist "$\Leftarrow$" in Satz 1.6 schließlich vollständig bewiesen.) Die zugehörige Einparametergruppe (φ_t) von konformen Transformationen besteht aus orientierungstreuen Abbildungen mit $u_x = v_y$, $u_y = v_x$ für $\varphi_t = (u, v)$.

2 Die Konforme Gruppe

Definition 2.1 *Die* konforme Gruppe Conf $(\mathbb{R}^{p,q})$ *ist die Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe der konformen Diffeomorphismen der konformen Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{p,q}$.*

Dabei ist die Gruppe der konformen Diffeomorphismen eine topologische Gruppe bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz.

2.1 Konforme Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{p,q}$

Beim Studium der konformen Transformationen auf offenen, zusammenhängenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$, $p+q \geq 2$, wird die konforme Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{p,q}$ deshalb eingeführt, weil man die konformen Transformationen als überall definierte und bijektive Abbildungen beschreiben möchte. Gesucht ist also eine "minimale" Kompaktifizierung $N^{p,q}$ von $\mathbb{R}^{p,q}$, so daß alle konformen Transformationen $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ als konforme Diffeomorphismen $\widehat{\varphi} : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ fortgesetzt werden können.

Sei $n = p+q \geq 2$. Abkürzend schreiben wir $\langle x \rangle_{p,q} = g^{p,q}(x,x)$ für $x \in \mathbb{R}^{p,q}$, bzw. noch kürzer $\langle x \rangle = \langle x \rangle_{p,q}$, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welche p, q es sich handelt. $\mathbb{R}^{p,q}$ kann in den $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ wie folgt eingebettet werden:

$$\imath : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \quad , \quad x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \mapsto \left(\frac{1-\langle x \rangle}{2} : x^1 : \ldots : x^n : \frac{1+\langle x \rangle}{2}\right).$$

Dabei ist $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ der Quotient $(\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\})/\sim$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\xi \sim \xi' \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = \lambda \xi' \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ kann also als der Raum der durch $0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ verlaufenden Geraden aus $\mathbb{R}^{n+2}$ aufgefaßt werden. $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ ist eine kompakte, $(n+1)$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (vgl. z.B. [Sch95]). Ist $\gamma : \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ die Quotientenabbildung, so schreibt man einen allgemeinen Punkt $\gamma(\xi) \in \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\xi = (\xi^0, \ldots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, in den sogenannten *homogenen Koordinaten* $(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) := \gamma(\xi)$. Offenbar gilt:

$$(\xi^0 : \cdots : \xi^{n+1}) = (\lambda\xi^0 : \cdots : \lambda\xi^{n+1}) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wir suchen eine geeignete Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{p,q}$. Dazu betrachten wir den Abschluß $\overline{\imath(\mathbb{R}^{p,q})}$ des Bildes der differenzierbaren Einbettung $\imath : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$. Es gilt:

Bemerkung 2.2 $\overline{\imath(\mathbb{R}^{p,q})} = \left\{(\xi^0 : \cdots : \xi^{n+1}) \in \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \,|\, \langle \xi \rangle_{p+1,q+1} = 0\right\} =: N^{p,q}.$

Beweis. Nach Definition von $\imath$ ist $\langle \imath(x) \rangle_{p+1,q+1} = 0$ für $x \in \mathbb{R}^{p,q}$, also $\overline{\imath(\mathbb{R}^{p,q})} \subset N^{p,q}$.

Aus $(\xi^0 : \cdots : \xi^{n+1}) \in N^{p,q} \setminus \imath(\mathbb{R}^{p,q})$ folgt zunächst $\xi^0 + \xi^{n+1} = 0$, denn

$$\lambda := \xi^0 + \xi^{n+1} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \imath\left(\lambda^{-1}(\xi^1, \ldots, \xi^n)\right) = (\xi^0 : \cdots : \xi^{n+1}) \in \imath(\mathbb{R}^{p,q}).$$

Es gibt Nullfolgen $\epsilon_k \longrightarrow 0$, $\delta_k \longrightarrow 0$ mit $\epsilon_k \neq 0 \neq \delta_k$ und $2\xi^1\epsilon_k + \epsilon_k^2 = 2\xi^{n+1}\delta_k + \delta_k^2$. Im Falle $p \geq 1$ gilt

$$P_k := \left(\xi^0 : \xi^1 + \epsilon_k : \xi^2 : \cdots : \xi^n : \xi^{n+1} + \delta_k\right) \in N^{p,q}$$

und wegen $\xi^0 + \xi^{n+1} + \delta_k = \delta_k \neq 0$ auch $P_k \in \imath(\mathbb{R}^{p,q})$. Aus $P_k \longrightarrow (\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1})$ für $k \longrightarrow \infty$ folgt schließlich $(\xi^0 : \cdots : \xi^{n+1}) \in \overline{\imath(\mathbb{R}^{p,q})}$, also $N^{p,q} \subset \overline{\imath(\mathbb{R}^{p,q})}$. ■

Wir wählen daher $N^{p,q}$ als unterliegende Mannigfaltigkeit der gesuchten Kompaktifizierung. $N^{p,q}$ ist eine reguläre Quadrik in $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, also insbesondere eine n-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$. $N^{p,q}$ enthält $\imath(\mathbb{R}^{p,q})$ als dichte Teilmenge.

Eine andere Beschreibung von $N^{p,q}$ ergibt sich mit Hilfe der Quotientenabbildung γ.

Lemma 2.3 *Die Restriktion von γ auf das Sphärenprodukt*

$$\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n+2} : \sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j\right)^2 = 1 = \sum_{j=p+1}^{n+1} \left(\xi^j\right)^2 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+2},$$

liefert eine differenzierbare 2-zu-1-Überlagerung $\pi := \gamma|_{\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q} : \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \longrightarrow N^{p,q}$.

Beweis. Offensichtlich ist $\gamma(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q) \subset N^{p,q}$. Für $\xi, \xi' \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ folgt aus $\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$, daß $\xi = \lambda\xi'$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $\xi, \xi' \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$, folgt $\lambda \in \{1, -1\}$. Also ist $\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$ genau dann, wenn $\xi = \xi'$ oder $\xi = -\xi'$. Für $P = (\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) \in N^{p,q}$ lassen sich die beiden Urbilder unter π folgendermaßen angeben: Wegen $P \in N^{p,q}$ ist $\langle \xi \rangle = 0$, also $\sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j\right)^2 = \sum_{j=p+1}^{n+1} \left(\xi^j\right)^2$. Mit $r := \left(\sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\eta := \frac{1}{r}(\xi^0, \ldots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ sind dann η und $-\eta$ die beiden Urbilder von ξ. π ist also surjektiv und die Beschreibung der Urbilder zeigt, daß π lokal differenzierbare Umkehrabbildungen besitzt. ∎

Vermöge der differenzierbaren Abbildung $\pi : \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \longrightarrow N^{p,q}$ läßt sich nun die von $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ auf $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ induzierte Metrik, also die Metrik von $\mathbb{S}^{p,q}$, auf $N^{p,q}$ übertragen, so daß $\pi : \mathbb{S}^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ zu einer (lokalen) Isometrie wird. Auf diese Weise erhält $N^{p,q}$ insbesondere eine konforme Struktur. Da $\imath : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ sich als konforme Einbettung erweist, ist $N^{p,q}$ eine konforme Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{p,q}$.

Satz 2.4 *Für jede Matrix $\Lambda \in O(p+1, q+1)$ wird durch $\psi(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) := \gamma(\Lambda\xi)$, $(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) \in N^{p,q}$, eine konforme Transformation $\psi = \psi_\Lambda : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ mit konformer Umkehrtransformation $\psi^{-1} = \psi_{\Lambda^{-1}}$ definiert. Die Zuordnung $\Lambda \mapsto \psi_\Lambda$ ist nicht injektiv, aber für $\psi_\Lambda = \psi_{\Lambda'}$ gilt stets $\Lambda = \Lambda'$ oder $\Lambda = -\Lambda'$.*

Beweis. Für $\xi \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ mit $\langle x \rangle = 0$ und $\Lambda \in O(p+1, q+1)$ gilt $\langle \Lambda\xi \rangle = g(\Lambda\xi, \Lambda\xi) = g(\xi, \xi) = \langle \xi \rangle = 0$, also $\gamma(\Lambda\xi) \in N^{p,q}$. Da für $\xi \sim \xi'$, also $\xi' = r\xi$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, stets $\Lambda\xi' = r\Lambda\xi$, also $\Lambda\xi' \sim \Lambda\xi$ gilt, ist $\gamma(\Lambda\xi)$ unabhängig vom Repräsentanten ξ. Insgesamt ist daher $\psi : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ wohldefiniert. Weil Λ die Metrik auf $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ erhält, erweist sich ψ_Λ als konform. Man errechnet für $P \in N^{p,q}$ als Konformfaktor $\Omega^2(P) = \sum_{j=0}^{n+1} \left(\Lambda^j_k \xi^k\right)^2$, wenn P durch $\xi \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ repräsentiert wird. (Es gilt i.a. nicht $\Lambda(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q) \subset \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ für $\Lambda \in O(p+1, q+1)$, und die (punktale) Abweichung von dieser Inklusion wird gerade durch $\Omega(P)$ beschrieben:

$$\frac{1}{\Omega(P)}\Lambda(\xi) \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \text{ für } \xi \in \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \text{ und } P = \gamma(\xi).)$$

Offenbar gilt $\psi_\Lambda = \psi_{-\Lambda}$ und $\psi_\Lambda^{-1} = \psi_{\Lambda^{-1}}$. Im Falle $\psi_\Lambda = \psi_{\Lambda'}$ für $\Lambda, \Lambda' \in O(p+1, q+1)$ folgt $\gamma(\Lambda\xi) = \gamma(\Lambda'\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit $\langle \xi \rangle = 0$. Daher ist $\Lambda = r\Lambda'$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen $\Lambda, \Lambda' \in O(p+1, q+1)$ gilt $r = 1$ oder $r = -1$. ∎

Die geforderte Fortsetzungseigenschaft für konforme Transformationen hat nun die folgende Formulierung:

Definition 2.5 *Sei $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ konforme Transformation auf einer zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$. Dann heißt $\widehat{\varphi} : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ eine* konforme Fortsetzung *von φ, wenn $\widehat{\varphi}$ ein konformer Diffeomorphismus mit konformer Umkehrabbildung ist und wenn für alle $x \in M$ gilt: $\imath(\varphi(x)) = \widehat{\varphi}(\imath(x))$. Man erhält also das folgende kommutative Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^{p,q} \\ \downarrow{\scriptstyle \imath} & & \downarrow{\scriptstyle \imath} \\ N^{p,q} & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & N^{p,q} \end{array}$$

2.2 Die konforme Gruppe von $\mathbb{R}^{p,q}$ für $p + q > 2$

Satz 2.6 *Sei $n = p + q > 2$. Jede konforme Transformation auf einer zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ hat eine eindeutig bestimmte konforme Fortsetzung nach $N^{p,q}$. Die Gruppe aller konformen Transformationen $N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ ist isomorph zu $O(p+1, q+1)/\{\pm 1\}$, und die Zusammenhangskomponente der Eins in dieser Gruppe, also nach Definition 2.1 die gesuchte konforme Gruppe* Conf $(\mathbb{R}^{p,q})$, *ist isomorph zu $SO(p+q, q+1)$.*

Hier ist $SO(p+1, q+1)$ die Zusammenhangskomponente der Eins in $O(p+1, q+1)$. $SO(p+1, q+1)$ ist enthalten in $\{\Lambda \in O(p+1, q+1) |\det \Lambda = 1\}$, aber im allgemeinen verschieden von dieser Untergruppe, z.B. im Falle $(p, q) = (2, 1)$.

Beweis. Es genügt, die in Satz 1.8 beschriebenen konformen Transformationen nach $N^{p,q}$ fortzusetzen und diese Fortsetzungen jeweils durch Matrizen $\Lambda \in O(p+1, q+1)$ entsprechend Lemma 2.3 darzustellen.

1. Orthogonale Transformationen. Am einfachsten ist die Fortsetzung einer orthogonalen Abbildung $\varphi(x) = \Lambda' x$ mit einer Matrix $\Lambda' \in O(p, q)$, denn für die Blockmatrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt offenbar $\Lambda \in O(p+1, q+1)$, da $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ mit der zu $g^{p+1,q+1}$ gehörenden Matrix $\eta = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$, und außerdem:

$$\Lambda \in SO(p+1, q+1) \Longleftrightarrow \Lambda' \in SO(p, q).$$

Durch $\widehat{\varphi} = \psi_\Lambda$, also $\widehat{\varphi}(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) = (\xi^0 : \Lambda'\xi : \xi^{n+1})$ für $(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) \in N^{p,q}$, ist eine konforme Abbildung $\widehat{\varphi} : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ definiert (vgl. Satz 2.4). Für $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ ist

$$\widehat{\varphi}(\imath(x)) = \left(\frac{1 - \langle x \rangle}{2} : \Lambda' x : \frac{1 + \langle x \rangle}{2} \right) = \left(\frac{1 - \langle \Lambda' x \rangle}{2} : \Lambda' x : \frac{1 + \langle \Lambda' x \rangle}{2} \right),$$

denn wegen $\Lambda' \in O(p, q)$ gilt $\langle x \rangle = \langle \Lambda' x \rangle$. Also ist $\widehat{\varphi}(\imath(x)) = \imath(\varphi(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^{p,q}$.

2. Translationen. Für die Translationen $\varphi(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}^n$ hat man als Fortsetzung

$$\widehat{\varphi}(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) \ := \ \Big(\xi^0 - \langle \xi', c\rangle - \xi^+ \langle c\rangle \ : \ \xi' + 2\xi^+ c \ : \ \xi^{n+1} + \langle \xi', c\rangle + \xi^+ \langle c\rangle\Big)$$

für $(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) \in N^{p,q}$. Dabei ist $\xi^+ = \frac{1}{2}(\xi^{n+1} + \xi^0)$ und $\xi' = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Es gilt

$$\widehat{\varphi}(\imath(x)) = \left(\frac{1-\langle x\rangle}{2} - \langle x, c\rangle - \frac{\langle c\rangle}{2} \ : \ x + c \ : \ \frac{1+\langle x\rangle}{2} + \langle x, c\rangle + \frac{\langle c\rangle}{2}\right)$$

wegen $\imath(x)^+ = \frac{1}{2}$ und daher

$$\widehat{\varphi}(\imath(x)) = \left(\frac{1-\langle x+c\rangle}{2} \ : \ x + c \ : \ \frac{1+\langle x+c\rangle}{2}\right) = \imath(\varphi(x)).$$

Da außerdem $\widehat{\varphi} = \psi_\Lambda$ mit $\Lambda \in SO(p+1, q+1)$ nachgewiesen werden kann, ist $\widehat{\varphi}$ eine wohldefinierte konforme Abbildung, also eine konforme Fortsetzung von $\widehat{\varphi}$. Die gesuchte Matrix läßt sich aus der Definition von $\widehat{\varphi}$ direkt ablesen und als Blockmatrix schreiben:

$$\Lambda_c = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\langle c\rangle & -(\eta' c)^T & -\frac{1}{2}\langle c\rangle \\ c & E_n & c \\ \frac{1}{2}\langle c\rangle & (\eta' c)^T & 1 + \frac{1}{2}\langle c\rangle \end{pmatrix}.$$

Hier ist E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix und $\eta' = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ die $(n \times n)$-Diagonalmatrix, die zu $g^{p,q}$ gehört. Daß tatsächlich $\Lambda_c \in O(p+1, q+1)$ gilt, erfordert ein wenig elementare Rechnerei. Daß dann $\Lambda_c \in SO(p+1, q+1)$ folgt, sieht man anhand des Weges $t \mapsto \Lambda_{tc}$, der E_{n+2} und Λ_c verbindet.

3. Dilatationen. Zu den Dilatationen $\varphi(x) = rx$, $r \in \mathbb{R}_+$, gehören die Matrizen

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} \frac{1+r^2}{2r} & 0 & \frac{1-r^2}{2r} \\ 0 & E_n & 0 \\ \frac{1-r^2}{2r} & 0 & \frac{1+r^2}{2r} \end{pmatrix}$$

($\Lambda_r \in O(p+1, q+1)$ erfordert eine kurze Rechnung).

Wieder folgt $\Lambda_r \in SO(p+1, q+1)$ wegen der Verbindung $t \mapsto \Lambda_{tr}$. Daß die konforme Transformation $\widehat{\varphi} = \psi_\Lambda$ wirklich Fortsetzung von φ ist, sieht man durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) &= \left(\frac{1+r^2}{2r}\xi^0 + \frac{1-r^2}{2r}\xi^{n+1} \ : \ \xi' \ : \ \frac{1+r^2}{2r}\xi^{n+1} + \frac{1-r^2}{2r}\xi^0\right) \\ &= \left(\frac{1+r^2}{2}\xi^0 + \frac{1-r^2}{2}\xi^{n+1} \ : \ r\xi' \ : \ \frac{1+r^2}{2}\xi^{n+1} + \frac{1-r^2}{2}\xi^0\right). \end{aligned}$$

Mit $\xi = \imath(x)$, also $\xi' = x$, $\xi^0 = \frac{1}{2}(1 - \langle x\rangle)$, $\xi^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \langle x\rangle)$ gilt:

$$\widehat{\varphi}(\imath(x)) = \left(\frac{1-\langle x\rangle r^2}{2} \ : \ rx \ : \ \frac{1+\langle x\rangle r^2}{2}\right) = \left(\frac{1-\langle rx\rangle}{2} \ : \ rx \ : \ \frac{1+\langle rx\rangle}{2}\right) = \imath(\varphi(x)).$$

4. Spezielle konforme Tranformationen. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und

$$\varphi(x) = \frac{x - \langle x \rangle b}{1 - 2\langle x, b\rangle + \langle x \rangle \langle b \rangle}, \quad x \in M_1 \subsetneqq \mathbb{R}^{p,q}.$$

Mit $N = N(x) = 1 - 2\langle x, b\rangle + \langle x \rangle \langle b \rangle$ ist wegen $\langle \varphi(x) \rangle = \frac{\langle x \rangle}{N}$:

$$\begin{aligned} \imath(\varphi(x)) &= \left(\frac{1 - \langle \varphi(x) \rangle}{2} : \frac{x - \langle x \rangle b}{N} : \frac{1 + \langle \varphi(x) \rangle}{2} \right) \\ &= \left(\frac{N - \langle x \rangle}{2} : x - \langle x \rangle b : \frac{N + \langle x \rangle}{2} \right), \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck gibt auch für $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ mit $N(x) = 0$ einen Sinn. Er führt weiterhin zur Fortsetzung

$$\hat{\varphi}(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) = \left(\xi^0 - \langle \xi', b \rangle + \xi^- \langle b \rangle : \xi' - 2\xi^- b : \xi^{n+1} - \langle \xi', b \rangle + \xi^- \langle b \rangle \right),$$

wobei $\xi^- = \frac{1}{2}(\xi^{n+1} - \xi^0)$. Wegen $\imath(x)^- = \frac{1}{2}\langle x \rangle$ gilt tatsächlich

$$\hat{\varphi}(\imath(x)) = \left(\frac{N - \langle x \rangle}{2} : x - \langle x \rangle b : \frac{N + \langle x \rangle}{2} \right) = \imath(\varphi(x)),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{p,q}$, $N(x) \neq 0$. $\hat{\varphi}$ ist konforme Fortsetzung von φ, da $\hat{\varphi} = \psi_\Lambda$ mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\langle b \rangle & -(\eta' b)^T & \frac{1}{2}\langle b \rangle \\ b & E_n & -b \\ -\frac{1}{2}\langle b \rangle & -(\eta' b)^T & 1 + \frac{1}{2}\langle b \rangle \end{pmatrix} \in SO(p+1, q+1).$$

Insgesamt sind damit alle konformen Tranformationen φ auf $\mathbb{R}^{p,q}$ fortgesetzt worden zu konformen Transformationen $\hat{\varphi} : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ der Form $\hat{\varphi}(\xi^0 : \ldots : \xi^{n+1}) = \gamma(\Lambda\xi)$ mit $\Lambda \in SO(p+1, q+1)$, also mit konformen Umkehrtransformationen $\hat{\varphi}^{-1} = \psi_{\Lambda^{-1}}$. Die Zuordnung $\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}$ erweist sich als injektiv (jedenfalls wenn φ in einem maximalen Definitionsbereich M in $\mathbb{R}^{p,q}$ konform fortgesetzt worden ist, also $M = \mathbb{R}^{p,q}$ oder $M = M_1$, vgl. Satz 1.8). Umgekehrt ist jede konforme Transformation $\psi : N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ von der Form $\psi = \hat{\varphi}$ mit einer konformen Transformation φ auf $\mathbb{R}^{p,q}$, denn es gibt offene nichtleere Mengen $U, V \subset \imath(\mathbb{R}^{p,q})$ mit $\psi(U) = V$ und die Abbildung

$$\varphi := \imath^{-1} \circ \psi \circ \imath : \imath^{-1}(U) \longrightarrow \imath^{-1}(V)$$

ist konform, d.h. φ hat die konforme Fortsetzung $\hat{\varphi}$, die gleich ψ sein muß. Da weiterhin $\hat{\varphi}$ durch die eindeutig bestimmte Menge $\{\Lambda, -\Lambda\}$ von Matrizen aus $O(p+1, q+1)$ beschrieben werden kann, ist die Gruppe aller konformen Transformationen $N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$ isomorph zu $O(p+1, q+1)/\{\pm 1\}$. Das gilt zunächst algebraisch, aber auch für die topologischen Strukturen. Schließlich ergibt sich daraus, daß die Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe aller konformen Transformationen $N^{p,q} \longrightarrow N^{p,q}$, also die konforme Gruppe Conf $(\mathbb{R}^{p,q})$, isomorph ist zu $SO(p+1, q+1)$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

2.3 Die konforme Gruppe von $\mathbb{R}^{2,0}$

Nach Satz 1.10 sind die orientierungstreuen konformen Transformationen $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ auf offenen Mengen $M \subset \mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ genau die holomorphen Funktionen mit nirgends verschwindender Ableitung. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß eine konforme Kompaktifizierung entsprechend Bemerkung 2.2 und Definition 2.5 nicht existieren kann, denn es gibt sehr viele nicht injektive konforme Transformationen, wie etwa

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^k, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\},$$

und es gibt sehr viele injektive holomorphe Funktionen ohne eine geeignete holomorphe Fortsetzung, wie zum Beispiel $z \mapsto z^2$, $z \in \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$, oder der Hauptzweig des Logarithmus auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{-x : x \in \mathbb{R}_+\}$. Es gibt aber eine sinnvolle Version des Ansatzes aus Abschnitt 2.2 auch für den Fall $p = 2, q = 0$, für die das Analogon des Satzes 2.6 seine Richtigkeit behält.

Definition 2.7 *Eine* globale *konforme Transformation auf* $\mathbb{R}^{2,0}$ *ist eine injektive konforme Transformation, die auf ganz* $\mathbb{C}$ *mit höchstens einem Ausnahmepunkt definiert ist.*

Die Analyse der konformen Killingfaktoren (vgl. Abschnitt 1.4.2) zeigt, daß die globalen Transformationen und alle diejenigen konformen Transformationen, die eine (im übrigen eindeutige) Fortsetzung zu einer globalen konformen Transformation zulassen, genau diejenigen Transformationen sind, die einen linearen konformen Killingfaktor haben oder die Komposition einer solchen Transformation mit linearem Killingfaktor und der Spiegelung $z \mapsto \overline{z}$ sind. Der entsprechende Satz läßt sich wie Satz 2.6 beweisen:

Satz 2.8 *Jede globale konforme Transformation* φ *auf* $M \subset \mathbb{C}$ *hat eine eindeutig bestimmte konforme Fortsetzung* $\hat{\varphi} : N^{2,0} \longrightarrow N^{2,0}$, *wobei* $\hat{\varphi} = \varphi_\Lambda$ *mit* $\Lambda \in O(3,1)$. *Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen* $\psi : N^{2,0} \longrightarrow N^{2,0}$ *ist isomorph zu* $O(3,1)/\{\pm 1\}$ *und die Zusammenhangskomponente der Eins ist isomorph zu* $SO(3,1)$.

In diesem Sinne ist es berechtigt, diese Zusammenhangskomponente der Eins als die konforme Gruppe $\operatorname{Conf}(\mathbb{R}^{2,0})$ von $\mathbb{R}^{2,0}$ zu bezeichnen. Eine weitere Begründung dafür liefert die unten geführte Diskussion über die Unmöglichkeit von Vergrößerungen dieser Gruppe durch zusätzliche konforme Transformationen.

Im Lichte eines Vergleichs von Satz 2.6 mit Satz 2.8 ist das besondere an der Situation $p+q > 2$, daß in diesem Falle alle konformen Transformationen injektiv sind und eine eindeutige Fortsetzung zu einer globalen konformen Transformation haben, wenn sie auf einer zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ definiert sind. Dabei ist unter einer globalen konformen Transformation eine konforme Transformation $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ zu verstehen, die auf ganz $\mathbb{R}^{p,q}$ oder außerhalb einer Hyperfläche definiert ist, so daß also $M = \mathbb{R}^{p,q}$ oder $M = M_1$.

Im übrigen ist $N^{2,0}$ isometrisch isomorph zur 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ (es gilt allgemein $N^{p,0} \cong \mathbb{S}^p$ wegen $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^p \times \{1, -1\}$) und daher auch konform isomorph zur Riemannschen Zahlenkugel

$\mathbb{P} := \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Unter einer *Möbiustransformation* verstehen wir eine holomorphe Funktion φ, zu der es eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ cz+d \neq 0,$$

gibt. Die Menge Mb dieser Möbiustransformationen ist gerade die Menge der orientierungstreuen, globalen konformen Transformationen. Bezüglich der Komposition bildet Mb eine Gruppe (wenn auch keine Untergruppe der Bijektionen; zur genauen Definition der Gruppenmultiplikation von φ und ψ benötigt man in der Regel eine Fortsetzung von $\varphi \circ \psi$, vgl. Lemma 2.9). Diese Gruppenoperation stimmt mit der Matrixmultiplikation in $SL(2,\mathbb{C})$ überein. Daher ist Mb als Gruppe isomorph zu $PSL(2,\mathbb{C}) := SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$. Nach Satz 2.8 ist Mb außerdem isomorph zur Gruppe der orientierungstreuen und konformen Diffeomorphismen von $N^{2,0} \cong \mathbb{P}$, also zur Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ der biholomorphen Abbildungen $\psi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$. Dieser Übergang von der Gruppe Mb zu $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ über die Kompaktifizierung $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}$ stand im übrigen Modell für die Kompaktifizierung $N^{p,q}$ von $\mathbb{R}^{p,q}$ mit dem entsprechenden Satz 2.6. Satz 2.8 sagt aber noch mehr, nämlich daß Mb auch zur eigentlichen Lorentz-Gruppe $SO(3,1)$ isomorph ist. Eine physikalische Interpretation der Isomorphie $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}) \cong SO(3,1)$ wurde von Penrose gegeben, vgl. z.B. [Sch95, S. 210]. Insgesamt gilt

$$\mathsf{Mb} \ \cong\ PSL(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) \ \cong\ SO(3,1) \ \cong \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{2,0}).$$

In der physikalischen Literatur über die zweidimensionale konforme Feldtheorie findet man durchgehend die Behauptung, daß die Gruppe $\mathcal{G}$ der konformen Transformationen bzgl. $\mathbb{R}^{2,0}$ unendlichdimensional sei. Zum Beispiel:

> [BPZ84, S. 335] "The situation is somewhat better in two dimensions. The main reason is that the conformal group is infinite-dimensional in this case; it consists of the conformal analytical transformations..." und kurz danach "...the conformal group of the two-dimensional space consists of all substitutions of the form
>
> $$z \mapsto \xi(z), \quad \overline{z} \mapsto \overline{\xi}(\overline{z}),$$
>
> where ξ and $\overline{\xi}$ are arbitrary analytic functions."

> [FQS84, S. 420] "Two dimensions is an especially promising place to apply notions of conformal field invariance, because there the group of conformal transformations is infinite dimensional. Any analytical function mapping the complex plane to itself is conformal."

> [GO89, S. 333] "The conformal group in 2-dimensional Euclidean space is infinite dimensional and has an algebra consisting of two commuting copies of the Virasoro algebras."

Auf den ersten Blick scheinen die Aussagen dieser Zitate ganz falsch zu sein. Zum Beispiel kann die Klasse aller holomorphen (also analytischen) Funktionen $z \mapsto \xi(z)$ im Widerspruch zum ersten Zitat keinesfalls eine Gruppe bilden, denn für zwei allgemeine holomorphe Funktionen $f : U \longrightarrow V$, $g : W \longrightarrow Z$ mit offenen Mengen $U, V, W, Z \subset \mathbb{C}$ ist die Komposition $g \circ f$ bestenfalls definierbar, wenn $f(U) \cap W \neq \emptyset$ und die nicht injektiven holomorphen f haben kein Inverses. Auch die Menge J aller injektiven holomorphen Funktionen kann keine Gruppe bezüglich der Komposition sein, weil im allgemeinen $f(U) \cap W = \emptyset$ sein kann. J enthält allerdings Gruppen, z.B. Mb und die biholomorphen $f : U \longrightarrow U$, für $U \subset \mathbb{C}$ offen. Diese Gruppen $\mathrm{Aut}(U)$ sind aber endlichdimensionale Lie-Gruppen. Will man die Schwierigkeiten von $f(U) \cap W = \emptyset$ vermeiden und verlangt, wie das im zweiten Zitat [FQS84] angedeutet zu sein scheint, daß die Transformationen global sind, dann handelt es sich um die endlichdimensionale Möbiusgruppe. Selbst wenn man mehr als einpunktige Singularitäten zuläßt, kommt man nicht über die Gruppe der Möbiustransformationen hinaus, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 2.9 *Sei $f : \mathbb{C}\backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv mit einer diskreten Singularitätenmenge $S \subset \mathbb{C}$. Dann ist f Restriktion einer Möbiustransformation, kann also auf $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, $p \in S$, holomorph fortgesetzt werden.*

Beweis. Aus der Injektivität von f ergibt sich nach dem Satz von Casorati-Weierstraß, daß alle Singularitäten Polstellen sind. Wiederum aus der Injektivität folgt nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, daß höchstens eine dieser Polstellen nicht hebbar ist und daß diese Polstelle von der Ordnung 1 ist. ∎

Werden vom Definitions- oder Wertebereich größere Mengen fortgelassen, so kommt man auch nicht zu einer unendlichdimensionalen Gruppe: Ohne Zweifel soll ja Mb zur konformen Gruppe $\mathcal{G}$ gehören. Ist $f : U \longrightarrow V$ holomorph, so daß $\mathbb{C} \setminus U$ die Kreisscheibe D und $\mathbb{C} \setminus V$ die Kreisscheibe D' enthält, so findet man eine Möbiustransformation h mit $h(V) \subset D'$ (Inversion an der Kreislinie $\partial D'$) und dann auch eine Möbiustransformation g mit $g(V) \subset D$. Dann aber läßt sich durch $\mathsf{Mb} \cup \{f\}$ keine Gruppe erzeugen, da f nicht mit $g \circ f$ verknüpft werden kann: $g \circ f(U) \cap U = \emptyset$. Analoges gilt für die übrigen $f \in J$.

Eine unendlichdimensionale konforme Gruppe $\mathcal{G}$ kann es im Falle der euklidischen Ebene also nicht geben. Was ist dann in der physikalischen Literatur gemeint, wenn von der unendlichdimensionalen konformen Gruppe gesprochen wird? Das Mißverständnis scheint darin zu liegen, daß in der Physik oft infinitesimal gerechnet und gedacht, aber global geschrieben und gesprochen wird. Wenn man in den entsprechenden Texten jeweils "Gruppe" durch "Lie-Algebra" und "Transformation" durch "infinitesimale Transformation" ersetzt, wird vieles verständlicher. Wenn man etwa in der Situation der euklidischen Ebene anstelle der konformen Transformationen die konformen Killingfelder betrachtet (vgl. 1.4.2), so finden sich in der Gesamtheit der konformen Killingfelder sofort viele unendlichdimensionale Lie-Algebren, insbesondere die *Witt-Algebra*: Die Witt-Algebra W ist in diesem Zusammenhang der $\mathbb{C}$-Vektorraum mit der Basis $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $L_n := -z^{n+1}\frac{d}{dz}$ oder $L_n := -z^{1-n}\frac{d}{dz}$ (vgl. Abschnitt 5.2), und der Lie-Klammer

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}$$

(vgl. Abschnitt 5). In der Literatur über die zweidimensionale konforme Feldtheorie wird im wesentlichen nur von der infinitesimalen konformen Invarianz des jeweiligen Systems Gebrauch gemacht. Diese bedeutet dann das Vorhandensein von unendlich vielen unabhängigen Zwangsbedingungen, die das besondere der zweidimensionalen konformen Feldtheorie ausmachen.

Eine andere Erklärung für die Aussage, daß die konforme Gruppe unendlichdimensional sei, läßt sich vielleicht finden, wenn man statt der euklidischen Ebene die Minkowski-Ebene betrachtet. Das steht zwar im Gegensatz zu den meisten Arbeiten in der konformen Feldtheorie, paßt aber zur konformen Invarianz, die in der Stringtheorie in natürlicher Weise auftritt (vgl. Abschnitt 8). Tatsächlich wurde in der Stringtheorie die konforme Invarianz lange vor den eigentlichen Arbeiten über konforme Feldtheorie beobachtet. Im Falle der Minkowski-Ebene liegt nun tatsächlich eine unendlichdimensionale konforme Gruppe vor, wie wir im nächsten Unterabschnitt darlegen werden, und die zugehörige komplexifizierte Lie-Algebra ist im wesentlichen wieder die Witt-Algebra W (vgl. Abschnitt 5.1).

Auf dem infinitesimalen Niveau scheinen sich die Fälle $(p,q) = (2,0)$ und $(p,q) = (1,1)$ also kaum zu unterscheiden. Für die Interpretation und die Darstellungstheorie gibt es aber doch Unterschiede, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Es sei nur erwähnt, daß zur euklidisch gegebenen Witt-Algebra u.a. die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ gehört (als die Lie-Algebra von Mb, erzeugt von L_{-1}, L_0, L_1) während sie im Falle der Minkowski-Ebene erst durch Komplexifizierung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ entsteht.

2.4 Die konforme Gruppe von $\mathbb{R}^{1,1}$

Die konformen Transformationen φ auf Gebieten $M \subset \mathbb{R}^{1,1}$ sind nach Satz 1.11 gerade die $\varphi = (u,v)$, die $u_x = v_y, u_y = v_x$ oder $u_x = -v_y, u_y = -v_x$ und dazu noch $u_x^2 > v_x^2$ erfüllen. Für $M = \mathbb{R}^{1,1}$ hat man die folgende Beschreibung der globalen orientierungstreuen konformen Transformationen:

Satz 2.10 *Für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ sei $f_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit $f_\pm(x,y) := f(x \pm y)$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \times C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \\ (f,g) & \longmapsto & \frac{1}{2}(f_+ + g_-, f_+ - g_-) \end{array}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\operatorname{im}\Phi = \{(u,v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) : u_x = v_y, u_y = v_x\}$.
2. $\Phi(f,g)$ *konform* $\iff f' > 0, g' > 0$ *oder* $f' < 0, g' < 0$.
3. $\Phi(f,g)$ *bijektiv* $\iff f$ *und* g *bijektiv.*
4. $\Phi(f \circ h, g \circ k) = \Phi(f,g) \circ \Phi(h,k)$ *für* $f,g,h,k \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Also ist die Gruppe der orientierungstreuen konformen Diffeomorphismen $\varphi : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{R}^{1,1}$ isomorph zur Gruppe

$$\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}) \ \cup\ \mathrm{Diff}_-(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}_-(\mathbb{R}).$$

Die Gruppe aller konformen Diffeomorphismen besteht aus vier Komponenten, die jeweils homöomorph zu $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R})$ sind. Dabei bezeichnet $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R})$ die Gruppe der orientierungstreuen Diffeomorphismen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Beweis.

1. Sei $(u,v) = \Phi(f,g)$. Aus
$$u_x = \tfrac{1}{2}(f'_+ + g'_-) \quad u_y = \tfrac{1}{2}(f'_+ - g'_-)$$
$$v_x = \tfrac{1}{2}(f'_+ - g'_-) \quad v_y = \tfrac{1}{2}(f'_+ + g'_-)$$
folgt sofort $u_x = v_y, u_y = v_x$. Sei umgekehrt $(u,v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $u_x = v_y, u_y = v_x$. Dann gilt $u_{xx} = v_{yx} = u_{yy}$. u hat daher als Lösung der eindimensionalen Wellengleichung die Form $u(x,y) = \frac{1}{2}(f_+(x,y) + g_-(x,y))$ mit $f,g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wegen $v_x = u_y = \frac{1}{2}(f'_+ - g'_-)$ und $v_y = u_x = \frac{1}{2}(f'_+ + g'_-)$ gilt $v = \frac{1}{2}(f_+ - g_-)$, wobei f und g eventuell noch um eine Konstante abgeändert werden müssen.

2. Für $(u,v) = \Phi(f,g)$ gilt $u_x^2 - v_x^2 = f'_+ g'_-$. Also:
$$u_x^2 - v_x^2 > 0 \iff f'_+ g'_- > 0 \iff f'g' > 0.$$

3. Seien f und g injektiv. Für $\varphi = \Phi(f,g)$ gilt dann: Aus $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$ folgt
$$\begin{aligned} f(x+y) + g(x-y) &= f(x'+y') + g(x'-y'), \\ f(x+y) - g(x-y) &= f(x'+y') - g(x'-y'), \end{aligned}$$
also $f(x+y) = f(x'+y')$ und $g(x-y) = g(x'-y')$, d.h. $x+y = x'+y'$ und ebenso $x-y = x'-y'$. Es folgt $x = x', y = y'$. Also ist φ injektiv, wenn f und g es sind. Aus dem Vorangehenden kann man ablesen: Wenn φ injektiv ist, dann sind auch f und g injektiv. Seien jetzt f und g surjektiv und $\varphi = \Phi(f,g)$. Zu $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ gibt es $s,t \in \mathbb{R}$ mit $f(s) = \xi + \eta$, $g(t) = \xi - \eta$. Also ist $\varphi(x,y) = (\xi,\eta)$ mit $x := \frac{1}{2}(s+t)$, $y := \frac{1}{2}(s-t)$. Entsprechend folgt die Surjektivität von f und g aus der von φ.

4. Mit $\varphi = \Phi(f,g)$, $\psi = \Phi(h,k)$ gilt $\varphi \circ \psi = \frac{1}{2}(f_+ \circ \psi + g_- \circ \psi, f_+ \circ \psi - g_- \circ \psi)$ und $f_+ \circ \psi = f(\frac{1}{2}(h_+ + k_-) + \frac{1}{2}(h_+ - k_-)) = f \circ h_+ = (f \circ h)_+$, etc. Daher
$$\varphi \circ \psi = \frac{1}{2}((f \circ h)_+ + (g \circ k)_-, (f \circ h)_+ - (g \circ k)_-) = \Phi(f \circ h, g \circ k).$$

■

Einen zu Satz 2.6 analogen Satz kann es wie im Falle $p = 2, q = 0$ wieder nicht geben (vgl. 2.3). Im Falle $p = q = 1$ benötigen die globalen konformen Transformationen keine Fortsetzung, insofern ist eine konforme Kompaktifizierung überflüssig. In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, unter der konformen Gruppe von $\mathbb{R}^{1,1}$ die Zusammenhangskomponente der Eins aller konformen Transformationen $\mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ zu verstehen. Diese Gruppe ist groß; sie ist nach Satz 2.10 isomorph zu $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R})$.

Aus verschiedenen Gründen möchte man aber doch mit einer Gruppe von Transformationen auf einem kompakten Raum arbeiten. Daher ersetzt man $\mathbb{R}^{1,1}$ durch $\mathbb{S}^{1,1}$ im Sinne der ganz zu Beginn beschriebenen konformen Kompaktifizierung der Minkowski-Ebene

$$\mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{S}^{1,1} = \mathbb{S} \times \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{2,0} \times \mathbb{R}^{0,2}.$$

Auf diese Weise erhält man die konforme Gruppe $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$ als die Zusammenhangskomponente der Eins der Gruppe aller konformen Diffeomorphismen $\mathbb{S}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{S}^{1,1}$. Diese Gruppe wird natürlich auch mit $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^{1,1})$ bezeichnet.

Analog zu Satz 2.10 lassen sich (zum Beispiel unter Verwendung von 2π-periodischen Funktionen) die orientierungstreuen konformen Diffeomorphismen $\mathbb{S}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{S}^{1,1}$ mit Hilfe von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ und $\mathrm{Diff}_-(\mathbb{S})$ beschreiben als

$$\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \ \cup \ \mathrm{Diff}_-(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_-(\mathbb{S})$$

Korollar 2.11 *Damit gilt:* $\quad \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$.

Daher interessiert man sich bei der Untersuchung klassischer Feldtheorien mit der konformen Symmetriegruppe $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$ für die Eigenschaften der Gruppe $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ und ihrer Lie-Algebra $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$, deren Komplexifizierung die zum Schluß von Abschnitt 2.3 erwähnte Witt-Algebra W als dichte Unteralgebra enthält. Mit Blick auf die Quantisierung von solchen klassischen Feldtheorien sind $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$, $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ und W noch zu ersetzen durch entsprechende zentrale Erweiterungen, wie in den beiden folgenden Abschnitten erläutert wird. Auf diese Weise wird die Virasoro-Algebra eingeführt (vgl. Abschnitt 5).

3 Zentrale Erweiterungen von Gruppen

3.1 Zentrale Erweiterungen

In diesem Abschnitt sei A eine abelsche Gruppe und G eine beliebige Gruppe.

Definition 3.1 *Eine* Erweiterung von G durch A *ist gegeben durch eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

Exakt bedeutet, daß der Kern jeder Abbildung gleich dem Bild der vorhergehenden Abbildung ist, d.h. ι ist injektiv, π ist surjektiv und $\ker \pi = \mathrm{im}\, \iota$ $(\cong A)$.

Die Erweiterung heißt zentral, *wenn $\iota(A)$ im Zentrum von E liegt, d.h. wenn*

$$a \in A, b \in E \Rightarrow \iota(a)b = b\iota(a).$$

- Eine *triviale* Erweiterung hat die Form

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \times G \xrightarrow{pr_2} G \longrightarrow 1.$$

- Ein Beispiel für eine nichttriviale Erweiterung ist die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_k \longrightarrow E = U(1) \xrightarrow{\pi} U(1) \longrightarrow 1$$

mit $\pi(z) := z^k$ für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, denn $E = U(1)$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{Z}_k \times U(1)$. Eine andere Begründung liefert die Feststellung, daß es keinen Homomorphismus $\tau : U(1) \longrightarrow E$ mit $\pi \circ \tau = id_{U(1)}$ gibt, weil es keine globale k-te Wurzel gibt.

- Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist

$$1 \longrightarrow K^\times \mathrm{id}_V \longrightarrow GL(V) \xrightarrow{\pi} PGL(V) \longrightarrow 1$$

eine zentrale Erweiterung durch die multiplikative Gruppe $K^\times$ der Einheiten von K. Dabei ist $PGL(V) = GL(V)/\,K^\times$.

- Hauptbeispiel: Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$ und sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{H})$ der projektive Raum der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{H}$, d.h.

$$\mathbb{P}(\mathbb{H}) := (\mathbb{H} \setminus \{0\})/\sim,$$

$$f \sim g :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times : f = \lambda g \qquad \text{für} \qquad f, g \in \mathbb{H}.$$

$\mathbb{P}$ ist der Raum der Zustände in der Quantenphysik. Mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von $\mathbb{H}$ definiert man die Menge der unitären Operatoren auf $\mathbb{H}$

$$U(\mathbb{H}) := \{U : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \,|\, U \;\text{ linear, bijektiv und }\; f, g \in \mathbb{H} \Rightarrow \langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle\}\,.$$

Sei $\gamma : \mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ die kanonische Abbildung und $\varphi = \gamma(f)$, $\psi = \gamma(g)$ mit $f, g \in \mathbb{H}$. Dann definieren wir

$$\delta(\varphi, \psi) := \left\langle \frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle^2 \qquad (\text{"Übergangswahrscheinlichkeit"}),$$

und als Gruppe der *projektiven Automorphismen*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}) := \{T : \mathbb{P} \to \mathbb{P} | T \text{ bijektiv und } \delta(T\varphi, T\psi) = \delta(\varphi, \psi) \text{ für } \varphi, \psi \in \mathbb{P}\}.$$

Zu jedem $U \in U(\mathbb{H})$ definieren wir eine Abbildung $\hat{\gamma}(U) : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ durch

$$\hat{\gamma}(U)(\varphi) := \gamma(U(f)) \quad \text{für alle } \varphi = \gamma(f) \in \mathbb{P} \text{ mit } f \in \mathbb{H}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß $\hat{\gamma}(U) : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ wohldefiniert ist und zu $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ gehört. Das gilt nicht nur für unitäre, sondern auch für antiunitäre Operatoren V, d.h. für $\mathbb{R}$-lineare bijektive Abbildungen $V : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ mit $\langle Vf, Vg \rangle = \langle f, g \rangle$ und $V(if) = -iV(f)$ für alle $f, g \in \mathbb{H}$. Zur vollständigen Beschreibung von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ dient der

Satz 3.2 (Wigner [Wig31], Kap. 20, Anhang). *Jede Transformation $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ hat die Form $T = \widehat{\gamma}(U)$ mit einem unitären oder antiunitären Operator U.*

Der elementare Beweis von Wigner wurde von Bargmann [Bar64] noch vereinfacht.

Wir setzen

$$U(\mathbb{P}) := \widehat{\gamma}\,(U(\mathbb{H})) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$$

und interessieren uns im folgenden für die zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow U(1)\mathrm{id}_{\mathbb{H}} \longrightarrow U(\mathbb{H}) \xrightarrow{\widehat{\gamma}} U(\mathbb{P}) \longrightarrow 1.$$

Übung 3.3 *Man zeige:* $\ker\widehat{\gamma} \;=\; \{U \in U(\mathbb{H}) : \widehat{\gamma}(U) \;=\; \mathrm{id}_{\mathbb{P}}\} = U(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}}.$

3.2 Quantisierung von Symmetrien

Beispiele für klassische Systeme mit einer Symmetriegruppe G:

- $G = SO(3)$ bei Zentralfeldern
- $G =$ Galilei-Gruppe bei freien Teilchen in der klassischen nichtrelativistischen Mechanik
- $G =$ Poincaré-Gruppe bei freien Teilchen in der speziellen Relativitätstheorie
- $G = \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ in der Stringtheorie und in der konformen Feldtheorie im $\mathbb{R}^{1,1}$
- $G =$ Eichgruppe $= \mathrm{Aut}(P)$ (P Prinzipalfaserbündel) bei Eichtheorien

Alle diese Gruppen sind in natürlicher Weise topologische Gruppen. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G mit einer Topologie, so daß die Gruppenoperation $G \times G \longrightarrow G$, $(g,h) \mapsto gh$, und die Inversenbildung $G \longrightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, stetig sind. Die ersten drei Beispiele sind endlichdimensionale Lie-Gruppen, während die letzten beiden unendlichdimensionale Lie-Gruppen (mit Modellen in Fréchetträumen) sind. Auf die Topologie von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ wird zu Beginn von Abschnitt 5 kurz eingegangen.

Nach der Quantisierung bleibt von der Symmetrie ein Homomorphismus

$$T : G \to U(\mathbb{P}),$$

wobei T ein in der starken Topologie stetiger Homomorphismus ist. Diese Eigenschaft läßt sich nicht beweisen, sie ist eine **Forderung** an die Quantisierungsprozedur.

Definition 3.4 *Starke Topologie auf $U(\mathbb{H})$: Typische Umgebungen von $U_0 \in U(\mathbb{H})$ sind die Mengen*

$$\{U \in U(\mathbb{H}) : \|U_0\,(f_0) - U\,(f_0)\| < \epsilon\} \qquad \textit{mit } f_0 \in \mathbb{H}\;,\; \epsilon > 0.$$

Diese Umgebungen bilden eine Subbasis der starken Topologie. Die starke Topologie auf $U\,(\mathbb{H})$ ist nicht metrisierbar. Auf $U\,(\mathbb{P})$ wird eine Topologie mit Hilfe der Abbildung $\widehat{\gamma} : U(\mathbb{H}) \to U(\mathbb{P})$ definiert:

$$B \subset U(\mathbb{P}) \;\; \textit{offen} \quad :\Longleftrightarrow \quad \widehat{\gamma}^{-1}\,(B) \subset U(\mathbb{H}) \;\; \textit{offen}.$$

Die starke Topologie kann auf jeder Teilmenge

$$M \subset \mathcal{B}(\mathbb{H}) := \{B : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \mid B \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und beschränkt}\}$$

von $\mathbb{R}$-linearen, stetigen Operatoren definiert werden, insbesondere also auf

$$M_u = \{U : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \mid U \text{ unitär oder antiunitär}\}\,.$$

Auf diese Weise wird durch $\widehat{\gamma} : M_u \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ (vgl. Satz 3.2 von Wigner) eine Topologie auf $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ wie oben induziert. Diese Topologie auf $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ (bzw. $U(\mathbb{P})$) wird ebenfalls die *starke Topologie* genannt.

Bei der Quantisierung einer klassischen Symmetriegruppe G ergibt sich die Frage: Gibt es zu dem stetigen Homomorphismus $T : G \longrightarrow U(\mathbb{P})$ einen stetigen Homomorphismus $S : G \to U(\mathbb{H})$, so daß das folgende Diagramm kommutiert ?

$$\begin{tikzcd}
 & & & G \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "T"] & \\
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] & U(\mathbb{H}) \arrow[r, "\widehat{\gamma}"'] & U(\mathbb{P}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Die Antwort ist: Nein, im allgemeinen nicht. Die quantenmechanische Symmetriegruppe ist eine zentrale Erweiterung der universellen Überlagerung der klassischen Symmetriegruppe, wohlbekannt bei der Rotationsgruppe $SO(3)$:

Beispiel 3.5 *Übergang von $SO(3)$ zur universellen 2-zu-1-Überlagerung $SU(2)$: Zu jedem stetigen Homomorphismus $SO(3) \longrightarrow U(\mathbb{P})$ hat man das folgende kommutative Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] & U(1) \times SU(2) \arrow[r] \arrow[dd] & SU(2) \arrow[rr] \arrow[ddl] \arrow[dd] \arrow[dr] & & 1 \\
 & & & & SO(3) \arrow[dl] & \\
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] & U(\mathbb{H}) \arrow[r, "\widehat{\gamma}"'] & U(\mathbb{P}) \arrow[rr] & & 1
\end{tikzcd}$$

$SU(2)$ ist die universelle Überlagerung von $SO(3)$. Die zentralen Erweiterungen von $SU(2)$ sind alle trivial (vgl. Satz 4.7 und Bemerkung 4.9).

Satz 3.6 *Sei G eine Gruppe und $T : G \to U(\mathbb{P})$ ein Homomorphismus. Dann gibt es eine zentrale Erweiterung E von G durch $U(1)$ und einen Homomorphismus $S : E \longrightarrow U(\mathbb{H})$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "S"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "T"] & 1 \\
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] & U(\mathbb{H}) \arrow[r, "\widehat{\gamma}"'] & U(\mathbb{P}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir wählen $E := \{(U,g) \in U(\mathbb{H}) \times G | \widehat{\gamma}(U) = Tg\}$, $S := \mathrm{pr}_1$ und $\pi := \mathrm{pr}_2$. E ist eine Untergruppe der Produktgruppe $U(\mathbb{H}) \times G$, weil $\widehat{\gamma}$ und T Homomorphismen sind. S und π sind Homomorphismen und es gilt offensichtlich $T \circ \pi = \widehat{\gamma} \circ S$. ■

Übung 3.7 *$U(\mathbb{H})$ ist eine topologische Gruppe.*

Dies steht in krassem Gegensatz zu Behauptungen in der einschlägigen Literatur über die Quantisierung von Symmetrien (siehe z.B. [Sim68]). Es ist aber ganz leicht zu zeigen (siehe [Sch95, S. 174]). Durch diese Eigenschaft vereinfacht sich der Beweis des Satzes 4.7 von Bargmann erheblich. Außerdem ist es sinnvoll, die in Frage kommenden Untersuchungen gleich für topologische Gruppen und stetige Homomorphismen durchzuführen. Zum Beispiel gelten u.a. die folgenden vier Eigenschaften

1. Wenn in der Situation von Satz 3.6 die Gruppe G eine topologische Gruppe ist und $T : G \longrightarrow U(\mathbb{P})$ ein stetiger Homomorphismus, dann ist die zentrale Erweiterung E auch eine topologische Gruppe mit stetiger Projektion $\pi : E \longrightarrow G$ und der Homomorphismus $S : E \longrightarrow U(\mathbb{H})$ mit $\widehat{\gamma} \circ S = T \circ \pi$ ist ebenfalls stetig.

2. $U(\mathbb{P})$ ist die Zusammenhangskomponente der Eins in $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$. (Auch $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ ist eine topologische Gruppe bezüglich der starken Topologie.)

3. Jeder stetige Homomorphismus $T : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ auf einer zusammenhängenden topologischen Gruppe G hat sein Bild in $U(\mathbb{P})$, ist also bereits ein stetiger Homomorphismus $T : G \longrightarrow U(\mathbb{P})$. Das begründet, warum man bei der Quantisierung von Symmetrien anstelle von stetigen Homomorphismen $T : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ gleich $T : G \longrightarrow U(\mathbb{P})$ fordert.

4. $\widehat{\gamma} : U(\mathbb{H}) \longrightarrow U(\mathbb{P})$ ist ein stetiger Homomorphismus und hat lokale stetige Schnitte (vgl. Lemma 4.8).

Definition 3.8 *Eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\imath} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

spaltet*, wenn es einen Homomorphismus $\sigma : G \to E$ gibt, so daß $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$.*

Wenn die Sequenz spaltet mit der Spaltung $\sigma : G \longrightarrow E$, so liefert

$$\psi : A \times G \longrightarrow E, \quad (a,g) \mapsto \imath(a)\sigma(g),$$

einen Gruppenisomorphismus, der zur trivialen Erweiterung

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \times G \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

führt. Diese ist zur Ausgangssequenz in folgendem Sinne äquivalent: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \times G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

kommutiert. Umgekehrt gilt: Wenn ein solches kommutatives Diagramm mit einem Gruppenisomorphismus ψ existiert, dann spaltet die Sequenz

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

mit der Spaltung $\sigma(g) := \psi(1_A, g)$.

3.3 Äquivalenz von zentralen Erweiterungen

Bemerkung 3.9 *Sei*

$$1 \longrightarrow A \stackrel{\imath}{\longrightarrow} E \stackrel{\pi}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$$

eine zentrale Erweiterung und sei $\tau : G \to E$ *(nicht notwendig ein Homomorphismus) mit* $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_G$ *und* $\tau(1) = 1$*. Wir setzen* $\tau_x := \tau(x)$ *für* $x \in G$ *und definieren zu* τ *eine Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \omega : & G \times G & \longrightarrow & A \cong \imath(A) \subset E \\ & (x,y) & \longmapsto & \tau_x \tau_y \tau_{xy}^{-1} \end{array},$$

da $\tau_x \tau_y \tau_{xy}^{-1} \in \ker \pi$*. Für die so definierte Abbildung* ω *gilt*

$$\omega(1,1) = 1 \quad \textit{und} \quad \omega(x,y)\,\omega(xy,z) = \omega(x,yz)\,\omega(y,z) \quad \textit{für } x,y,z \in G. \tag{1}$$

Beweis. Nach Definition von ω ist

$$\begin{aligned}
\omega(x,y)\,\omega(xy,z) &= \tau_x \tau_y \tau_{xy}^{-1}\, \tau_{xy} \tau_z \tau_{xyz}^{-1} \\
&= \tau_x \tau_y \tau_z \tau_{xyz}^{-1} \\
&= \tau_x \tau_y \tau_z\, \tau_{yz}^{-1} \tau_{yz}\, \tau_{xyz}^{-1} \\
&= \tau_x \omega(y,z)\, \tau_{yz} \tau_{xyz}^{-1} \\
&= \tau_x \tau_{yz} \tau_{xyz}^{-1}\, \omega(y,z) \quad (\text{da } A \text{ zentral}) \\
&= \omega(x,yz)\,\omega(y,z).
\end{aligned}$$

■

Definition 3.10 *Sei* $\omega : G \times G \longrightarrow A$ *eine Abbildung mit der Eigenschaft (1). Die zu* ω *gehörende zentrale Erweiterung von* G *durch* A *ist gegeben durch die exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \stackrel{\imath}{\longrightarrow} & A \times_\omega G & \stackrel{pr_2}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & a & \longmapsto & (a,1) & & & & \end{array}$$

Die Verknüpfung in $A \times_\omega G$ *ist definiert durch* $(a,x)(b,y) := (\omega(x,y)\,ab, xy)$*.*

Zu zeigen ist natürlich, daß $A \times_\omega G$ mit dieser Verknüpfung wirklich eine Gruppe ist und daß $\imath$ und pr_2 Homomorphismen sind. Entscheidend ist dabei die Assoziativität der Multiplikation, die gerade durch die Bedingung (1) garantiert wird:

$$\begin{aligned} ((a,x)(b,y))(c,z) &= (\omega(x,y)ab, xy)(c,z) \\ &= (\omega(xy,z)\omega(x,y)abc, xyz) \\ &= (\omega(x,yz)\omega(y,z)abc, xyz) \\ &= (a,x)(\omega(y,z)cz, yz) \\ &= (a,x)((b,y),(c,z)). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.11 *Auf diese Weise erhält man eine Korrespondenz zwischen den Abbildungen $\omega : G \times G \to A$ mit der Eigenschaft (1) und den zentralen Erweiterungen von G durch A.*

Im übrigen ist auch die Erweiterung E in Satz 3.6 von der Form $U(1) \times_\omega G$. Wie gewinnt man eine geeignete Abbildung $\omega : G \times G \longrightarrow U(1)$? Nach dem Satz 3.2 von Wigner gibt es zu jedem $g \in G$ ein Element $U_g \in U(\mathbb{H})$ mit $\widehat{\gamma}(U_g) = Tg$. Damit ist eine Abbildung $\tau_g := (U_g, g)$, $g \in G$, gegeben, welche ein $\omega : G \times G \longrightarrow U(1)$ mit (1) definiert:

$$\omega(g,h) := \tau_g \tau_h \tau_{gh}^{-1} = (U_g U_h U_{gh}^{-1}, 1_G).$$

Man beachte: $g \mapsto U_g$ ist im allgemeinen kein Homomorphismus und auch nicht stetig (wenn G topologische Gruppe und T stetig ist; siehe aber Satz 4.7 von Bargmann).

Sind G und A topologische Gruppen und ist $\omega : G \times G \longrightarrow A$ stetig mit (1), so ist $A \times_\omega G$ eine topologische Gruppe. Die Umkehrung ist nicht richtig, weil es im allgemeinen keine Abbildungen $\tau : G \longrightarrow E$ mit $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_G$ gibt, die auch noch stetig sind. $U(1) \longrightarrow U(1)$, $z \mapsto z^2$, ist ein Gegenbeispiel.

Lemma 3.12 *Die zu $\omega : G \times G \longrightarrow A$ gehörende zentrale Erweiterung spaltet genau dann, wenn es eine Abbildung $\lambda : G \to A$ gibt mit*

$$\lambda(xy) = \omega(x,y)\lambda(x)\lambda(y).$$

Beweis. Die zentrale Erweiterung spaltet genau dann, wenn es einen Homomorphismus $\sigma : G \to A \times_\omega G$ gibt mit $pr_2 \circ \sigma = \mathrm{id}_G$. Sei also $\sigma(x) := (\lambda(x), x)$ für $x \in G$ mit einer Abbildung $\lambda : G \to A$. Die Abbildung σ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn

$$\begin{aligned} \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) &\iff (\lambda(xy), xy) = (\lambda(x), x)(\lambda(y), y) \\ &\iff (\lambda(xy), xy) = ((\omega(x,y)\lambda(x)\lambda(y)), xy) \\ &\iff \lambda(xy) = \omega(x,y)\lambda(x)\lambda(y). \end{aligned}$$

■

Definition 3.13 $H^2(G,A) := \{\omega : G \times G \to A | \omega$ *erfüllt (1)*$\}/\sim$, *wobei*

$$\omega \sim \omega' \quad :\iff \quad \exists \lambda : G \to A \text{ mit } \lambda(xy) = \omega(x,y)\omega'(x,y)^{-1}\lambda(x)\lambda(y).$$

Für den Fall einer Feldtheorie mit konformer Symmetrie $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ ist man daher interessiert an $H^2(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}), U(1))$.

4 Zentrale Erweiterungen von Lie-Algebren und der Satz von Bargmann

In diesem Abschnitt werden einige Grundkenntnisse über Lie-Gruppen und Lie-Algebren benötigt, wie man sie z.B. in [HN91] findet. Beispielsweise gehört zu jeder endlichdimensionalen Lie-Gruppe G eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Lie-Algebra $\mathrm{Lie}\, G$ und jeder differenzierbare Homomorphismus $R : G \longrightarrow H$ von Lie-Gruppen induziert einen Lie-Algebra-Homomorphismus $\mathrm{Lie}\, R = \dot{R} : \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow \mathrm{Lie}\, H$. Wenn H einfach zusammenhängend ist, bestimmt umgekehrt bereits jeder Lie-Algebra-Homomorphismus $\rho : \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow \mathrm{Lie}\, H$ einen differenzierbaren Lie-Gruppen-Homomorphismus $R : G \longrightarrow H$ mit $\dot{R} = \rho$. Zum Beweis des Satzes von Bargmann benötigen wir das Ergebnis von Montgomory und Zippin, die Lösung eines der Hilbertschen Probleme : Ist G eine topologische Gruppe, so daß G auch eine topologische Mannigfaltigkeit ist (d.h. zu jedem Punkt $x \in G$ gibt es eine Umgebung U von x und eine topologische Abbildung $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$), so ist G bereits eine Lie-Gruppe (vgl. [MZ55]).

4.1 Zentrale Erweiterungen und Äquivalenz

Eine Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ heißt *abelsch*, wenn die Lie-Klammer von $\mathfrak{a}$ trivial ist, d.h. wenn $[X, Y] = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{a}$.

Definition 4.1 *Sei $\mathfrak{a}$ eine abelsche Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ ($\dim \mathfrak{g} = \infty$ ist zugelassen). Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

heißt zentrale Erweiterung *von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] = 0$, also $[X, Y] = 0$ für alle $X \in \mathfrak{a}$ und $Y \in \mathfrak{h}$. Dabei haben wir $\mathfrak{a}$ als Unteralgebra von $\mathfrak{h}$ aufgefaßt.*

Beispiele :

- Es sei
$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{I} E \xrightarrow{R} G \longrightarrow 1$$
eine zentrale Erweiterung von endlichdimensionalen Lie-Gruppen A,E und G mit differenzierbaren Homomorphismen I und R. Dann ist für $\dot{I} = \mathrm{Lie}\, I$ und $\dot{R} = \mathrm{Lie}\, R$ die Sequenz
$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}\, A \xrightarrow{\dot{I}} \mathrm{Lie}\, E \xrightarrow{\dot{R}} \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow 0$$
eine zentrale Erweiterung von Lie-Algebren.

- Insbesondere induziert jede zentrale Erweiterung E der Lie-Gruppe G durch $U(1)$
$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow E \xrightarrow{R} G \longrightarrow 1$$
mit einem differenzierbaren Homomorphismus R stets eine zentrale Erweiterung
$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E \xrightarrow{\dot{R}} \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow 0$$
der Lie-Algebra $\mathrm{Lie}\, G$ durch die abelsche Lie-Algebra $\mathbb{R} \cong i\mathbb{R} \cong \mathrm{Lie}\, U(1)$.

- Die Virasoro-Algebra ist eine zentrale Erweiterung der Witt-Algebra, wie im nächsten Abschnitt dargelegt wird.

Definition 4.2 *Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

spaltet, *wenn es einen Lie-Algebra-Homomorphismus* $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *mit* $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ *gibt. Der Homomorphismus* β *heißt dann* Spaltung. *Eine zentrale Erweiterung mit Spaltung heißt* trivial, *weil sie zur exakten Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

äquivalent ist.

Wenn in den vorangegangenen Beispielen die Lie-Gruppen-Sequenz spaltet (mit einem differenzierbaren Homomorphismus $S : G \longrightarrow E$ als Spaltung), so spaltet auch die zugehörige Lie-Algebra-Sequenz (im Sinne von Definition 4.2) mit der Spaltung $\dot{S}$. Die Umkehrung dieser Aussage gilt im allgemeinen nur für einfach zusammenhängende, endlichdimensionale Lie-Gruppen G: In diesem Fall spaltet die Lie-Gruppen-Sequenz immer schon dann, wenn die zugehörige Lie-Algebren-Sequenz spaltet.

Bemerkung 4.3 *Zu jeder zentralen Erweiterung von Lie-Algebren*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

existiert ein Vektorraum-Homomorphismus $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *mit* $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. *Setze*

$$\Theta(X, Y) := [\beta(X), \beta(Y)] - \beta([X, Y]) \quad \textit{für} \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

Dann gilt: $\quad \beta$ *ist Spaltung* $\iff \Theta = 0$.

Wie man leicht nachprüft hat die (von β *abhängige) Abbildung* $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ *allgemein die folgenden drei Eigenschaften:*

1° $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ *ist bilinear und alternierend.*

2° $\Theta(X, [Y, Z]) + \Theta(Y, [Z, X]) + \Theta(Z, [X, Y]) = 0.$

3° $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ *als Vektorraum vermöge des Vektorraum-Isomorphismus*

$$\psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h}, \quad X \oplus Z = (X, Z) \mapsto \beta(X) + Z,$$

mit der folgenden Lie-Klammer

$$[X + Z, Y + Z']_{\mathfrak{h}} = [X, Y]_{\mathfrak{g}} + \Theta(X, Y) \quad \textit{für} \quad X, Y \in \mathfrak{g}\,;\ Z, Z' \in \mathfrak{a}.$$

Das heißt genauer:

$$[\beta(X) + Z, \beta(Y) + Z'] = \beta([X, Y]) + \Theta(X, Y).$$

Dabei haben wir $\mathfrak{a}$ als Unteralgebra von $\mathfrak{h}$ aufgefaßt.

Lemma 4.4 :

1. *Jede zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$ kommt von einem $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ mit den Eigenschaften 1° und 2°.*
2. *Jedes $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ mit den Eigenschaften 1° und 2° erzeugt eine zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$ (gemäß 3°).*
3. *Eine solche zentrale Erweiterung spaltet (d.h. ist trivial) genau dann, wenn es ein $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ gibt mit*
$$\Theta(X, Y) = \mu([X, Y]).$$

Beweis. 1. ist nach den vorangehenden Überlegungen klar. Zu 2.: Der Vektorraum $\mathfrak{h} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ mit der Lie-Klammer
$$[X \oplus Z, Y \oplus Z'] := [X, Y]_{\mathfrak{g}} \oplus \Theta(X, Y)$$
für $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $Z, Z' \in \mathfrak{a}$ ist eine Lie-Algebra und liefert eine zentrale Erweiterung mit 3°. Zu 3.: Für $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ sei $\tilde{\mu}(X, Y) := \mu([X, Y])$. Dann erfüllt $\tilde{\mu} = \Theta$ die Bedingungen 1° und 2° der vorigen Bemerkung. Nun ist $\sigma := \beta + \mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ eine Spaltung, denn σ ist ein Vektorraum-Homomorphismus und es gilt

$$\pi \circ \sigma = \pi \circ \beta + \pi \circ \mu = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}};$$

außerdem ist σ ein Lie-Algebra-Homomorphismus, denn

$$\sigma([X, Y]) = \beta([X, Y]) + \mu([X, Y]) = [\beta(X), \beta(Y)] = [\sigma(X), \sigma(Y)].$$

■

Definition 4.5

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) &:= \{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \,|\, \Theta \ \text{ erfüllt } 1°\} \\
Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) &:= \left\{\Theta \in \mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \,|\, \Theta \ \text{ erfüllt } 2°\right\} \\
B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) &:= \{\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \,|\, \exists \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) : \Theta = \tilde{\mu}\} \\
H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) &:= Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) / B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})
\end{aligned}$$

Z^2 und B^2 sind Untervektorräume von Alt^2 mit $B^2 \subset Z^2$.

Bemerkung 4.6 *$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ ist isomorph zur Menge der Äquivalenzklassen von zentralen Erweiterungen von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$. $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ ist definitionsgemäß die zweite* Kohomologiegruppe *der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Werten in $\mathfrak{a}$.*

4.2 Satz von Bargmann

Satz 4.7 (Bargmann [Bar54]) *Sei G eine einfach zusammenhängende, endlichdimensionale Lie-Gruppe mit*

$$H^2(\mathrm{Lie}\, G, \mathbb{R}) = 0.$$

Dann hat jede projektive Darstellung $T : G \to U(\mathbb{P})$ eine Liftung *zu einer unitären Darstellung $S : G \to U(\mathbb{H})$, d.h. zu jedem stetigen Homomorphismus $T : G \longrightarrow U(\mathbb{P})$ gibt es einen stetigen Homomorphismus $S : G \longrightarrow U(\mathbb{H})$ mit $T = \widehat{\gamma} \circ S$.*

Beweis. Nach Satz 3.6 gibt es eine zentrale Erweiterung E von G und einen Homomorphismus $\widehat{T} : E \longrightarrow U(\mathbb{H})$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\widehat{T}"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "T"] & 1 \\
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] & U(\mathbb{H}) \arrow[r, "\widehat{\gamma}"'] & U(\mathbb{P}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $E = \{(U, g) \in U(\mathbb{H}) \times G | \, \widehat{\gamma}(U) = Tg\}$, $\pi = \mathrm{pr}_2$ und $\widehat{T} = \mathrm{pr}_1$. E ist als Untergruppe der topologischen Gruppe $U(\mathbb{H}) \times G$ (vgl. Übung 3.7) wieder eine topologische Gruppe, und $\widehat{T}$ ist ein stetiger Homomorphismus. Die untere exakte Sequenz hat lokale stetige Schnitte, wie in Lemma 4.8 gezeigt wird: Zu jedem $A \in U(\mathbb{P})$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset U(\mathbb{P})$ und eine stetige Abbildung $\nu : W \longrightarrow U(\mathbb{H})$ mit $\widehat{\gamma} \circ \nu = \mathrm{id}_W$. Sei jetzt $V := T^{-1}(W)$. Dann ist durch $\mu(g) := (\nu \circ T(g), g)$, $g \in V$, ein lokaler stetiger Schnitt $\mu : V \longrightarrow E$ der oberen Sequenz gegeben. Denn $\widehat{\gamma}(\nu \circ T(g)) = Tg$, also $(\nu \circ T(g), g) \in E$ für $g \in V$. μ ist stetig, weil ν und T stetig sind. Aus diesem Grunde ist

$$\psi : U(1) \times V \longrightarrow \pi^{-1}(V) \subset E, \quad (\lambda, g) \mapsto (\lambda\nu \circ T(g), g), \quad \text{für } (\lambda, g) \in U(1) \times V,$$

eine bijektive Abbildung mit einer stetigen Umkehrabbildung $\psi^{-1}(U, g) = (\lambda(U), g)$, wobei $\lambda(U) \in U(1)$ für $U \in \widehat{\gamma}^{-1}(W)$ durch die Gleichung $U = \lambda(U)\nu \circ \widehat{\gamma}(U)$ gegeben ist. Die Stetigkeit von ψ^{-1} ist also eine Folge der Stetigkeit der Multiplikation

$$U(1) \times U(\mathbb{H}) \to U(\mathbb{H}), \quad (\lambda, U) \mapsto \lambda U.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die offene Menge $\pi^{-1}(V) = (T \circ \pi)^{-1}(W) \subset E$ homöomorph zu $U(1) \times V$ ist. Insgesamt ist E also eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $1 + \dim G$. Nach dem oben erwähnten Satz von Montgomory und Zippin ist die topologische Gruppe E daher eine $(1 + \dim G)$-dimensionale Lie-Gruppe und die obere Sequenz

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

ist eine Sequenz von differenzierbaren Homomorphismen.

Die zugehörige exakte Sequenz von Lie-Algebren

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}\, U(1) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E \longrightarrow \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow 0$$

spaltet aufgrund der Voraussetzung $H^2(\mathrm{Lie}\, G, \mathbb{R}) = 0$. Da G außerdem einfach zusammenhängend ist, spaltet bereits die Ausgangssequenz

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

mit einem differenzierbaren Homomorphismus $\sigma : G \longrightarrow E$ als Spaltung: $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$. Deshalb liefert $S := \widehat{T} \circ \sigma$ schließlich die gewünschte Liftung. S ist ein stetiger Homomorphismus und wegen $\widehat{\gamma} \circ \widehat{T} = T \circ \pi$ ist $\widehat{\gamma} \circ S = \widehat{\gamma} \circ \widehat{T} \circ \sigma = T \circ \pi \circ \sigma = T \circ \mathrm{id}_G = T$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\widehat{T}"'] & G \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "T"] \arrow[dl, "S"'] \\ U(\mathbb{H}) \arrow[r, "\widehat{\gamma}"'] & U(\mathbb{P}). \end{tikzcd}$$

■

Lemma 4.8 *$\widehat{\gamma} : U(\mathbb{H}) \longrightarrow U(\mathbb{P})$ hat lokale stetige Schnitte und kann daher als Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe $U(1)$ aufgefaßt werden.*

Beweis. (vgl. [Sim68, S. 10]). Zu $f \in E$ sei

$$V_f := \{U \in U(\mathbb{H}) : \langle Uf, f\rangle \neq 0\}\,.$$

V_f ist offen in $U(\mathbb{H})$, da $U \mapsto Uf$ stetig in der starken Topologie ist und daher auch $U \mapsto \langle Uf, f\rangle$ stetig ist. (Die starke Topologie ist gerade so definiert, daß alle $U \mapsto Uf$ stetig sind.) Die Menge

$$W_f := \widehat{\gamma}(V_f) = \{T \in U(\mathbb{P}) : \delta(T\varphi, \varphi) \neq 0\}\ \ , \varphi = \widehat{\gamma}(f)\ ,$$

ist eine offene Menge in $U(\mathbb{P})$, weil $\widehat{\gamma}^{-1}(W_f) = V_f$ offen ist. (Die offenen Mengen in $U(\mathbb{P})$ sind ja nach Definition 3.4 genau diejenigen $W \subset U(\mathbb{P})$, für die $\widehat{\gamma}^{-1}(W) \subset U(\mathbb{H})$ offen ist.) Natürlich ist $(W_f)_{f\in\mathbb{H}}$ eine offene Überdeckung von $U(\mathbb{P})$. Setze

$$\beta_f : V_f \longrightarrow U(1), \quad U \mapsto \frac{|\langle Uf, f\rangle|}{\langle Uf, f\rangle}.$$

β_f ist stetig, da $U \mapsto \langle Uf, f\rangle$ stetig ist. Weiterhin gilt $\beta_f(e^{i\theta}U) = e^{-i\theta}\beta_f(U)$ für $U \in V_f$ und $\theta \in \mathbb{R}$, wie man unmittelbar sieht. Einen stetigen Schnitt von $\widehat{\gamma}$ über W_f erhält man jetzt durch

$$\nu_f : W_f \longrightarrow U(\mathbb{H}), \quad \widehat{\gamma}(U) \mapsto \beta_f(U)U.$$

ν_f ist wohldefiniert, denn für $U' \in V_f$ mit $\widehat{\gamma}(U') = \widehat{\gamma}(U)$, also $U' = e^{i\theta}U$, gilt

$$\beta_f(U')U' = \beta_f(e^{i\theta}U)e^{i\theta}U = \beta_f(U)U.$$

Es ist $\widehat{\gamma} \circ \nu_f = \mathrm{id}_{W_f}$ wegen

$$\widehat{\gamma} \circ \nu_f(\widehat{\gamma}(U)) = \widehat{\gamma}(\beta_f(U)U) = \widehat{\gamma}(U) \quad \text{für } U \in V_f.$$

Schließlich ist ν_f stetig : Sei $V_1 \in W_f$ und $U_1 = \nu_f(V_1) \in \nu_f(W_f)$. Dann ist $\beta_f(U_1) = 1$. Jede offene Umgebung von U_1 enthält eine offene Menge

$$B = \{U \in V_f : \|Ug_j - U_1 g_j\| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \dots, m\}$$

mit einem $\varepsilon > 0$ und mit $g_j \in \mathbb{H}$, $j = 1, \dots, m$. Wegen der Stetigkeit von β_f auf W_f gibt es weitere $g_{m+1}, \dots, g_n \in \mathbb{H}$, $\|g_j\| = 1$, so daß $|\beta_f(U) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ für

$$U \in B' := \left\{U \in V_f : \|Ug_j - U_1 g_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } j = 1, \dots, m, \dots, n\right\}.$$

Das Bild $D := \widehat{\gamma}(B')$ ist offen, denn

$$\widehat{\gamma}^{-1}(D) = \bigcup_{\lambda \in U(1)} \left\{U \in V_f : \|Ug_j - \lambda U_1 g_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } j = 1, \dots, n\right\}$$

ist offen. (Wir haben damit die Offenheit der Abbildung $\widehat{\gamma} : U(\mathbb{H}) \longrightarrow U(\mathbb{P})$ gezeigt.) Also ist D eine offene Umgebung von unserem Ausgangspunkt V_1. ν_f ist stetig, denn $\nu_f(D) \subset B$: Für $P \in D$ existiert $U \in B'$ mit $P = \widehat{\gamma}(U)$, also $\nu_f(P) = \beta_f(U)U$. Es folgt

$$\|\nu_f(P)g_j - U_1 g_j\| \leq \|\beta_f(U)Ug_j - \beta_f(U)U_1 g_j\| + \|(\beta_f(U) - 1)U_1 g_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

für $j = 1, \dots, m$, d.h. $\nu_f(P) \in B$. Also liegt das Bild $\nu_f(D)$ der Umgebung D von V_1 ganz in B. ■

Im übrigen ist E nach Konstruktion das Faserprodukt von $\widehat{\gamma}$ und T. Da $\widehat{\gamma}$ nach Lemma 4.8 lokal trivial ist mit allgemeiner Faser $U(1)$, muß das auch für $E \longrightarrow G$ gelten. Genau das wurde im Beweis zu Satz 4.7 benötigt, um zu zeigen, daß E überhaupt eine Lie-Gruppe ist.

Bemerkung 4.9 *Für jede endlichdimensionale, halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt: $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K}) = 0$. Insbesondere hat also jede Darstellung $T : SU(N) \longrightarrow U(\mathbb{P})$ oder $T : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow U(\mathbb{P})$ stets eine Liftung zu einer unitären Darstellung.*

($SL(2, \mathbb{C})$ ist die universelle Überlagerung der Lorentz-Gruppe $SO(3, 1)$.)

5 Die Virasoro-Algebra

In diesem Abschnitt wird dargestellt, auf welche Weise die Witt-Algebra und die Virasoro-Algebra als deren nichttriviale zentrale Erweiterung bei Symmetriebetrachtungen auftreten.

5.1 Witt-Algebra und infinitesimale konforme Transformationen der Minkowski-Ebene

Bei der Quantisierung von Systemen mit Symmetrien erhält man Darstellungen der klassischen Symmetriegruppe in $U(\mathbb{P})$ (mit $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{H})$, vgl. Abschnitt 3). Die konforme Gruppe von $\mathbb{R}^{1,1}$

ist isomorph zu $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ (hier und im folgenden ist $\mathbb{S} := \mathbb{S}^1$ die Kreislinie). Hat man eine Theorie mit dieser konformen Gruppe als Symmetriegruppe, so studiert man daher zunächst die Gruppe $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ und ihre Lie-Algebra. Nach der Quantisierung sind die unitären Darstellungen der zentralen Erweiterungen von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ und von $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}))$ von Interesse.

Die Gruppe $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ ist in natürlicher Weise eine Lie-Gruppe, die ihre lokalen Modelle (Koordinaten) in dem Vektorraum $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ der differenzierbaren Vektorfelder hat. ($\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ wird weiter unten ausführlicher beschrieben.) Dabei wird $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz der $\varphi : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ und aller ihrer Ableitungen versehen. Diese Topologie ist metrisierbar. $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ wird ebenfalls mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz der X und aller Ableitungen versehen. Mit dieser Topologie ist $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ ein Fréchetraum. Im übrigen ist $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ isomorph zu $C^\infty(\mathbb{S}, \mathbb{R})$, wie wir gleich sehen werden. Der Nachweis, daß $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ auf diese Weise tatsächlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Modellen in $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ ist und daß Gruppenoperation und Inversenbildung differenzierbar sind, ist elementar und läßt sich allgemein für orientierte, kompakte (endlichdimensionale) Mannigfaltigkeiten M anstelle von $\mathbb{S}$ führen (vgl. [Mil84]).

Da $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ die Koordinatenbereiche von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ enthält, ist jeder Tangentialraum

$$T_\varphi(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}))$$

an $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$, im Punkte $\varphi \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$, isomorph zum Vektorraum $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$. Daher ist $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ auch der unterliegende Vektorraum für die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}))$. Eine sorgfältige Analyse der beiden Lie-Klammern auf $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ — die eine von $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$, die andere von $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}))$ — zeigt, daß die eine gerade das Negative der anderen ist (vgl. [Mil84]). Diese Subtilität spielt aber für die Darstellungstheorie von $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}))$ keine Rolle und wird daher meistens nicht beachtet. Wir setzen also:

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})) := \mathrm{Vect}(\mathbb{S}).$$

Der Vektorraum $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ ist wie der Raum $\mathrm{Vect}(M)$ aller differenzierbaren Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in natürlicher Weise eine unendlichdimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{R}$: Ein differenzierbares Vektorfeld X auf M ist eine Derivation $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, d.h. eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit

$$X(fg) = X(f)g + fX(g) \quad \text{für } f, g \in C^\infty(M).$$

Die Lie-Klammer von solchen Vektorfeldern X und Y ist der *Kommutator*

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X.$$

Im Fall $M = \mathbb{S}$ kann $C^\infty(\mathbb{S})$ im übrigen als der Vektorraum $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ der 2π-periodischen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden. Ein allgemeines Vektorfeld $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ hat bezüglich dieser Beschreibung die Form $X = f\frac{d}{d\theta}$, mit $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ und θ als Variable von $\mathbb{R}$. Für $X = f\frac{d}{d\theta}$ und $Y = g\frac{d}{d\theta}$ ist dann

$$[X, Y] = (fg' - f'g)\frac{d}{d\theta} \quad \text{mit } g' = \frac{d}{d\theta}g \text{ und } f' = \frac{d}{d\theta}f.$$

Die Darstellung von f durch eine konvergente Fourierreihe

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

führt zu einem natürlichen (topologischen) Erzeugendensystem von Vect$(\mathbb{S})$:

$$\frac{d}{d\theta}, \quad \cos(n\theta)\frac{d}{d\theta}, \quad \sin(n\theta)\frac{d}{d\theta}.$$

Von besonderem Interesse ist die Komplexifizierung

$$\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}) := \mathrm{Vect}(\mathbb{S}) \otimes \mathbb{C}$$

von Vect$(\mathbb{S})$. Zunächst beschränken wir uns auf die Lie-Algebra der polynomialen Vektorfelder auf $\mathbb{S}$.

$$\begin{array}{rl} L_n := z^{1-n}\frac{d}{dz} = -iz^{-n}\frac{d}{d\theta} = -ie^{-in\theta}\frac{d}{d\theta} \in \mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}) & \\ L_n : \; C^\infty(\mathbb{S},\mathbb{C}) \;\to\; C^\infty(\mathbb{S},\mathbb{C}) & \\ f \;\mapsto\; z^{1-n}f' & \end{array}$$

Die lineare Hülle der L_n über $\mathbb{C}$ heißt *Witt-Algebra*:

$$\mathsf{W} := \mathbb{C}\{L_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Daß W bezüglich der Lie-Klammer in $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S})$ überhaupt eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ ist, muß natürlich erst noch gezeigt werden. Dazu bestimmen wir die Lie-Klammer der L_n, L_m, die man auch an der obigen Formel ablesen kann. Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^\infty(\mathbb{S},\mathbb{C})$ gilt :

$$L_nL_mf \;=\; z^{1-n}\tfrac{d}{dz}\left(z^{1-m}\tfrac{d}{dz}f\right) \;=\; (1-m)\,z^{1-n-m}\tfrac{d}{dz}f - z^{1-n}z^{1-m}\tfrac{d^2}{dz^2}f$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} [L_n, L_m]\,f &= L_nL_mf - L_mL_nf \\ &= ((1-m)-(1-n))\,z^{1-n-m}\tfrac{d}{dz}f \\ &= (n-m)\,L_{n+m}f. \end{aligned}$$

In einer Theorie mit konformer Symmetrie ist die Witt-Algebra W Teil der zur klassischen Symmetrie gehörenden Lie-Algebra. Damit stellt sich die Frage nach zentralen Erweiterungen von W durch $\mathbb{C}$.

5.2 Witt-Algebra und infinitesimale konforme Transformationen der euklidischen Ebene

Bevor wir in Satz 5.1 darauf eingehen, soll ein weiterer Zugang zur Witt-Algebra geschildert werden. Dieser Zugang steht im Zusammenhang mit Erörterungen in Abschnitt 2.3 über die konforme Gruppe im zweidimensionalen euklidischen Fall. Vor allem bei der Entwicklung der konformen Feldtheorie aus der Sicht der Statistischen Mechanik wird die euklidische Signatur vorausgesetzt und dieser Standpunkt wird in den wesentlichen Arbeiten über konforme Feldtheorie in zwei Dimensionen vertreten (siehe z.B. [BPZ84], [Gin89], [GO89], [Kak91]).

Die konformen Transformationen in Gebieten $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2,0}$ sind die holomorphen oder antiholomorphen Funktionen mit nirgends verschwindender Ableitung (vgl. Satz 1.10). Im folgenden wird zunächst nur der holomorphe Fall behandelt. Betrachtet man ungeachtet der Frage, inwiefern diese holomorphen Transformationen eine Gruppe bilden können (vgl. Abschnitt 2.3), entsprechende infinitesimale holomorphe Transformationen, so haben diese lokal die Form

$$z \mapsto z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n,$$

mit einer konvergenten Laurentreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$. Im Sinne der allgemeinen Beziehung zwischen $\mathrm{Diff}_+(M)$ und $\mathrm{Vect}(M)$, können die Vektorfelder, welche diese infinitesimalen Transformationen repräsentieren, in der fiktiven Beziehung zwischen der "konformen Gruppe" und den Vektorfeldern als

$$\sum a_n z^{n+1} \frac{d}{dz}$$

geschrieben werden. Zu all diesen Vektorfeldern (bei 0) gibt es die (topologische) Basis $L_n = z^{1-n} \frac{d}{dz}$ über $\mathbb{C}$ mit den oben hergeleiteten Lie-Klammern

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m}.$$

Damit gibt es auch im euklidischen Fall gute Gründe, die Witt-Algebra $\mathsf{W} = \mathbb{C}\{L_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit der gerade beschriebenen Lie-Klammer als konforme Symmetrie-Algebra einzuführen. Die Witt-Algebra ist eine dichte Unteralgebra der Lie-Algebra aller holomorphen Vektorfelder auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Das gilt ebenso für Kreisringe $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $0 \leq r < R \leq \infty$.

Ohne von einer konkreten "konformen Gruppe" sprechen zu müssen, kann — wie in der konformen Feldtheorie à la [BPZ84] üblich — von einer Feldtheorie verlangt werden, daß die Felder bzw. Feldoperatoren sich infinitesimal gemäß der L_n transformieren, und diese Forderung liefert dann eine unendliche Anzahl von Zwangsbedingungen. Damit erklärt sich das "infinite dimensional" in den Zitaten des Abschnitts 2.3.

Im übrigen gibt es keine komplexe Lie-Gruppe H mit $\mathrm{Lie}\, H = \mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S})$.

Die anti-holomorphen Transformationen/Vektorfelder führen zu einer Kopie $\overline{\mathsf{W}}$ von W mit Basis $\overline{L}_n$ mit

$$\left[\overline{L}_n, \overline{L}_m\right] = (n-m)\overline{L}_{n+m} \quad \text{und} \quad \left[L_n, \overline{L}_m\right] = 0.$$

Auch im Falle der Minkowski-Ebene hat man eine Kopie der Witt-Algebra, die in diesem Falle von dem zweiten Faktor $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ in der Beschreibung

$$\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) \;\cong\; \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$$

herrührt.

In beiden Fällen gibt es einen natürlichen Isomorphismus $t : \mathsf{W} \longrightarrow \mathsf{W}$ der Witt-Algebra, der auf der Basis durch $t(L_n) := -L_{-n}$ gegeben ist. t ist Vektorraumisomorphismus und respektiert die Lie-Klammer

$$[t(L_n), t(L_m)] = [L_{-n}, L_{-m}] = -(n-m)L_{-(n+m)} = (n-m)t(L_{n+m}).$$

Also ist t ein Lie-Algebra-Isomorphismus. Wegen $t^2 = \mathrm{id}_W$ ist t eine Involution. Häufig findet man in der einschlägigen Literatur auch, daß anstelle von $L_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz}$ das Basiselement

$$L_n = z^{1-n}\frac{d}{dz} = -ie^{-in\theta}\frac{d}{d\theta} = t\left(-z^{n+1}\frac{d}{dz}\right)$$

verwendet wird.

5.3 Die Virasoro-Algebra als zentrale Erweiterung der Witt-Algebra

Nach diesen zwei Zugängen zur Witt-Algebra W kommen wir zur Virasoro-Algebra als zentraler Erweiterung von W. Zur Existenz und Eindeutigkeit benötigen wir

Satz 5.1 [GF68] $H^2(\mathsf{W}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

Beweis. Wir zeigen: Die Abbildung $\omega : \mathsf{W} \times \mathsf{W} \to \mathbb{C}$ mit

$$\omega(L_n, L_m) := \delta_{n+m} \frac{n}{12} \left(n^2 - 1\right) \ , \ \delta_k := \begin{cases} 1 & \text{für} \ \ k = 0 \\ 0 & \text{für} \ \ k \neq 0 \end{cases}$$

definiert eine nichttriviale zentrale Erweiterung von W durch $\mathbb{C}$ und jede weitere zentrale Erweiterung von W durch $\mathbb{C}$ ist zu dieser äquivalent, d.h.

1. $\omega \in Z^2(\mathsf{W}, \mathbb{C})$.
2. $\omega \notin B^2(\mathsf{W}, \mathbb{C})$.
3. $\Theta \in Z^2(\mathsf{W}, \mathbb{C}) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \Theta \sim \lambda\omega$.

Die Wahl des (im Prinzip beliebigen) Faktors $\frac{1}{12}$ in der Definition von ω hat mit der Riemannschen Zetafunktion zu tun.

1. Damit $\omega \in Z^2(\mathsf{W}, \mathbb{C})$, muß für $k, m, n \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$\omega(L_k, [L_m, L_n]) + \omega(L_m, [L_n, L_k]) + \omega(L_n, [L_k, L_m]) = 0$$

Dies läßt sich einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} & 12\left(\omega(L_k, [L_m, L_n]) + \omega(L_m, [L_n, L_k]) + \omega(L_n, [L_k, L_m])\right) \\ = \ & \delta_{k+m+n}\left((m-n)\,k\left(k^2-1\right) + (n-k)\,m\left(m^2-1\right) + (k-m)\,n\left(n^2-1\right)\right) \\ = \ & -(m-n)(m+n)\left((m+n)^2-1\right) + (2n+m)\,m\left(m^2-1\right) - (2m+n)\,n\left(n^2-1\right) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

2. Sei $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathsf{W}, \mathbb{C})$. Angenommen $\omega = \tilde{\mu}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \omega(L_n, L_{-n}) &= \tilde{\mu}(L_n, L_{-n}) \\ \Rightarrow \quad \tfrac{n}{12}(n^2-1) &= \mu([L_n, L_{-n}]) \\ \Rightarrow \quad \tfrac{n}{12}(n^2-1) &= 2\,n\,\mu(L_0) \\ \Rightarrow \quad \mu(L_0) &= \tfrac{1}{24}(n^2-1) \ . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann aber nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Die Annahme $\omega = \tilde{\mu}$ war also falsch. Da $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathsf{W}, \mathbb{C})$ beliebig war, haben wir gezeigt, daß $\omega \notin B^2(\mathsf{W}, \mathbb{C})$.

3. Sei $\Theta \in Z^2(\mathsf{W}, \mathbb{C})$. Dann gilt für $k, m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta(L_k, [L_m, L_n]) + \Theta(L_m, [L_n, L_k]) + \Theta(L_n, [L_k, L_m]) \\ &= (m-n)\,\Theta(L_k, L_{m+n}) + (n-k)\,\Theta(L_m, L_{n+k}) + (k-m)\,\Theta(L_n, L_{k+m}). \end{aligned}$$

Also für $k = 0$:

$$(m-n)\,\Theta(L_0, L_{m+n}) + n\Theta(L_m, L_n) - m\Theta(L_n, L_m) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\Theta(L_n, L_m) = \frac{m-n}{m+n}\Theta(L_0, L_{m+n}) \text{ für } m, n \in \mathbb{Z};\ m \neq -n$$

Wir wählen einen Homomorphismus $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathsf{W}, \mathbb{C})$ mit

$$\mu(L_n) = \frac{1}{n}\Theta(L_0, L_n) \text{ für } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad \mu(L_0) = -\frac{1}{2}\Theta(L_1, L_{-1}),$$

und setzen $\Theta' := \Theta + \tilde{\mu}$. Dann ist $\Theta'(L_n, L_m) = 0$ für $m, n \in \mathbb{Z};\ m \neq -n$, denn

$$\begin{aligned} \Theta'(L_n, L_m) &= \Theta(L_n, L_m) + \mu([L_n, L_m]) \\ &= \frac{m-n}{m+n}\Theta(L_0, L_{n+m}) + \mu((n-m)\,L_{n+m}) \\ &= \frac{m-n}{m+n}\Theta(L_0, L_{n+m}) + \frac{n-m}{m+n}\Theta(L_0, L_{n+m}) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Es gibt daher eine Abbildung $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, so daß

$$\Theta'(L_n, L_m) = \delta_{n+m} h(n) \quad \text{für } n, m \in \mathbb{Z}$$

Da Θ' alternierend ist, folgt:

$$h(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad h(-k) = -h(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Nach Wahl von μ ist außerdem

$$\begin{aligned} h(1) &= \Theta'(L_1, L_{-1}) \\ &= \Theta(L_1, L_{-1}) + \mu([L_1, L_{-1}]) \\ &= \Theta(L_1, L_{-1}) + \mu(2L_0) \\ &= \Theta(L_1, L_{-1}) - \Theta(L_1, L_{-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so daß $\Theta' = \lambda\omega$, d.h.

$$h(n) = \frac{\lambda}{12} n\left(n^2 - 1\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Da $\Theta' \in Z^2(\mathsf{W}, \mathbb{C})$ haben wir für $k, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta'(L_k, [L_m, L_n]) + \Theta'(L_m, [L_n, L_k]) + \Theta'(L_n, [L_k, L_m]) \\ &= (m-n)\,\Theta'(L_k, L_{m+n}) + (n-k)\,\Theta'(L_m, L_{n+k}) + (k-m)\,\Theta'(L_n, L_{k+m}). \end{aligned}$$

Also für $k + m + n = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (m-n)\,h(k) + (n-k)\,h(m) + (k-m)\,h(n) \\ &= -(m-n)\,h(m+n) + (2n+m)\,h(m) - (2m+n)\,h(n). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile setzen wir $n = 1$ und erhalten so für $m \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$-(m-1)\,h(m+1) + (2+m)\,h(m) - (2m+1)\,h(1) = 0. \tag{3}$$

Wegen $h(1) = 0$ folgt aus (3) die Rekursionsformel

$$h(m+1) = \frac{m+2}{m-1}\,h(m) \text{ für } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Die Abbildung h ist also durch $h(2) \in \mathbb{C}$ vollständig bestimmt. Wir zeigen durch Induktion, daß für $\lambda := 2\,h(2)$ die Beziehung (2) erfüllt ist. Der Induktionsanfang ist klar. Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $h(m) = \frac{\lambda}{12} m (m^2 - 1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(m+1) &= \frac{m+2}{m-1}\,h(m) \\ &= \frac{m+2}{m-1}\,\frac{\lambda}{12} m \left(m^2 - 1\right) \\ &= \frac{\lambda}{12} m (m+1)(m+2) \\ &= \frac{\lambda}{12}(m+1)\left((m+1)^2 - 1\right). \end{aligned}$$

■

Definition 5.2 *Die* Virasoro-Algebra Vir *ist die zentrale Erweiterung der Witt-Algebra* W *durch* $\mathbb{C}$ *vermöge* ω, *d.h.*

$$\mathsf{Vir} = \mathsf{W} \oplus \mathbb{C}Z \quad \text{als } \mathbb{C}\text{-Vektorraum},$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)\,L_{n+m} + \delta_{n+m}\frac{n}{12}\left(n^2 - 1\right) Z,$$

$$[L_n, Z] = 0 \quad \text{für } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Teil II

Erste Schritte in die konforme Feldtheorie

In den folgenden fünf Abschnitten werden nur noch wenige Beweise bereitgestellt.

6 Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra

6.1 Unitäre Darstellungen und Höchstgewichtsdarstellungen

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Definition 6.1 *Eine Darstellung* $\rho : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ *(also ein* $\mathbb{C}$*-Vektorraumhomomorphismus* ρ*) heißt* unitär, *wenn es eine positiv semidefinite hermitesche Form* $H : V \times V \to \mathbb{C}$ *gibt, so daß für alle* $v, w \in V$ *und für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} H\left(\rho\left(L_n\right)v, w\right) &= H\left(v, \rho\left(L_{-n}\right)w\right) \\ H\left(\rho\left(Z\right)v, w\right) &= H\left(v, \rho\left(Z\right)w\right). \end{aligned}$$

Es wird verlangt, daß $\rho(L_n)$ formal adjungiert zu $\rho(L_{-n})$ ist, damit die Erzeuger $\frac{d}{d\theta}$, $\cos(n\theta)\frac{d}{d\theta}$, $\sin(n\theta)\frac{d}{d\theta}$ (vgl. Abschnitt 5) der reellen Lie-Algebra $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ durch ρ in schiefsymmetrische Operatoren überführt werden. Wegen

$$\frac{d}{d\theta} = iL_0, \quad \cos(n\theta)\frac{d}{d\theta} = -\frac{i}{2}(L_n + L_{-n}), \qquad \text{und} \qquad \sin(n\theta)\frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{2}(L_n - L_{-n})$$

folgt nämlich aus $H\left(\rho\left(L_n\right)v, w\right) = H\left(v, \rho\left(L_{-n}\right)w\right)$ für alle $D \in \left\{\frac{d}{d\theta}, \cos(n\theta)\frac{d}{d\theta}, \sin(n\theta)\frac{d}{d\theta}\right\}$ stets

$$H\left(\rho\left(D\right)v, w\right) + H\left(v, \rho\left(D\right)w\right) = 0.$$

Auf diese Weise besteht die prinzipielle Möglichkeit, solche unitären Darstellungen von Vir aufzuintegrieren zu projektiven Darstellungen $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \longrightarrow U(\mathbb{P}(\mathbb{H}))$ (vgl. Abschnitt 7) mit dem durch (V, H) gegebenen Hilbertraum $\mathbb{H}$.

Definition 6.2 *Ein Vektor* $v \in V$ *heißt* zyklisch *für eine Darstellung* $\rho : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}\,(V)$*, wenn die Menge* $\{\rho(L)v : L \in \mathsf{Vir}\}$ *den Vektorraum* V *erzeugt.*

Definition 6.3 *Eine Darstellung* $\rho : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}\,(V)$ *heißt* Höchstgewichtsdarstellung, *wenn es* $h, c \in \mathbb{C}$ *und einen zyklischen Vektor* $v_0 \in V$ *gibt, so daß*

$$\rho\left(Z\right)v_0 = cv_0, \quad \rho\left(L_0\right)v_0 = hv_0 \quad \text{und } \rho\left(L_n\right)v_0 = 0 \text{ für } n \in \mathbb{Z}, n \geq 1.$$

Der Vektor v_0 *heißt dann* Höchstgewichtsvektor *(oder auch* Vakuumvektor*). Man nennt* V *auch einen* Virasoro-Modul *(vermöge* ρ*) mit höchstem Gewicht* (c, h)*, oder einfach Virasoro-Modul zu* (c, h)*.*

In der physikalischen Literatur wird v_0 auch mit $|h\rangle$ bezeichnet und $\rho(L_n)v_0$ mit $\rho(L_n)\,|h\rangle$ oder einfacher mit $L_n\,|h\rangle$.

6.2 Verma-Moduln

Definition 6.4 *Ein* Verma-Modul *zu $c, h \in \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum $M(c,h)$ mit einer Höchstgewichtsdarstellung $\rho : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M(c,h))$ und einem Höchstgewichtsvektor $v_0 \in M(c,h)$, so daß*

$$\{\rho(L_{-n_1})\ldots\rho(L_{-n_k})\,v_0 : n_1 \geq \ldots \geq n_k > 0\ ,\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_0\}$$

eine Vektorraumbasis von $M(c,h)$ ist.

Jeder Verma-Modul $M(c,h)$ liefert eine Höchstgewichtsdarstellung mit höchstem Gewicht (c,h). Für feste $c, h \in \mathbb{C}$ ist $M(c,h)$ eindeutig bis auf Isomorphie. Zu jedem Virasoro-Modul V mit höchstem Gewicht (c,h) gibt es einen surjektiven Homomorphismus $M(c,h) \longrightarrow V$, der die Darstellungen respektiert. Dies gilt wegen:

Lemma 6.5 *Zu $h, c \in \mathbb{C}$ existiert ein Verma-Modul $M(c,h)$.*

Beweis. Sei $M(c,h) := \bigoplus \mathbb{C}\{v_{n_1\ldots n_k} : n_1 \geq \ldots \geq n_k > 0\ ,\ k \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{C}\{v_0\}$ der von v_0 und $v_{n_1,\ldots,n_k}$, $n_1 \geq \ldots \geq n_k > 0$, aufgespannte Vektorraum über $\mathbb{C}$. Wir definieren eine Darstellung $\rho : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M(c,h))$ durch

$$\rho(Z) := c\,\mathrm{id}_{M(c,h)}, \quad \rho(L_0)\,v_0 := h\,v_0, \quad \rho(L_n)\,v_0 := 0 \text{ für } n \in \mathbb{Z}, n \geq 1,$$

$$\begin{array}{lcll} \rho(L_0)\,v_{n_1\ldots n_k} & := & \left(\sum_{j=1}^{k} n_j + h\right) v_{n_1\ldots n_k}, & \\ \rho(L_{-n})\,v_0 & := & v_n & \text{für } n \in \mathbb{Z}, n \geq 1, \\ \rho(L_{-n})\,v_{n_1\ldots n_k} & := & v_{n\,n_1\ldots n_k} & \text{für } n \geq n_1. \end{array}$$

Für die übrigen $v_{n_1\ldots n_k}$ mit $1 \leq n < n_1$ ergibt sich $\rho(L_{-n})v_{n\,n_1\ldots n_k}$ durch Umordnen unter Berücksichtigung der Vertauschungsrelation $[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}$ für $n \neq m$. Zum Beispiel für $n_1 > n \geq n_2$:

$$\begin{array}{rcl} \rho(L_{-n})v_{n_1\ldots n_k} & = & \rho(L_{-n})\rho(L_{-n_1})v_{n_2\ldots n_k} \\ & = & \left(\rho(L_{-n_1})\rho(L_{-n}) + (-n+n_1)\rho(L_{-(n+n_1)})\right) v_{n_2\ldots n_k} \\ & = & v_{n_1 n\, n_2\ldots n_k} + (n_1 - n)v_{(n_1+n)n_2\ldots n_k}. \end{array}$$

Also

$$\rho(L_{-n})v_{n_1\ldots n_k} := v_{n_1 n\, n_2\ldots n_k} + (n_1 - n)v_{(n_1+n)n_2\ldots n_k}.$$

Entsprechend definiert man $\rho(L_n)v_{n_1\ldots n_k}$ für $n \in \mathbb{N}$ unter Berücksichtigung der Vertauschungsrelation. Zum Beispiel

$$\rho(L_n)v_{n_1} := \begin{cases} 0 & \text{für } n > n_1 \\ \left(2nh + \frac{n}{12}(n^2-1)c\right) v_0 & \text{für } n = n_1 \\ (n+n_1)v_{n_1-n} & \text{für } 0 < n < n_1. \end{cases}$$

Damit ist ρ wohldefiniert und $\mathbb{C}$-linear. Zu zeigen: ρ ist eine Darstellung, d.h.

$$[\rho(L_n), \rho(L_m)] = \rho([L_n, L_m]).$$

Zum Beispiel gilt für $n \geq n_1$:

$$\begin{aligned}
[\rho(L_0), \rho(L_{-n})]\, v_{n_1 \dots n_k} &= \rho(L_0) v_{n\, n_1 \dots n_k} - \rho(L_{-n}) \left(\sum n_j + h\right) v_{n_1 \dots n_k} \\
&= \left(\sum n_j + n + h\right) v_{n\, n_1 \dots n_k} - \left(\sum n_j + h\right) v_{n\, n_1 \dots n_k} \\
&= n v_{n\, n_1 \dots n_k} \\
&= n \rho(L_{-n}) v_{n_1 \dots n_k} \\
&= \rho([L_0, L_{-n}]) v_{n_1 \dots n_k}
\end{aligned}$$

und für $n \geq m \geq n_1$:

$$\begin{aligned}
[\rho(L_{-m}), \rho(L_{-n})]\, v_{n_1 \dots n_k} &= \rho(L_{-m}) v_{n\, n_1 \dots n_k} - v_{n\, m\, n_1 \dots n_k} \\
&= v_{n\, m\, n_1 \dots n_k} + (n-m) v_{(n+m) n_1 \dots n_k} - v_{n\, m\, n_1 \dots n_k} \quad \text{(s. oben)} \\
&= (n-m) v_{(n+m) n_1 \dots n_k} \\
&= (n-m) \rho\left(L_{-(m+n)}\right) v_{n_1 \dots n_k} \\
&= \rho([L_{-m}, L_{-n}]) v_{n_1 \dots n_k}.
\end{aligned}$$

Analog ergeben sich die anderen Identitäten gerade aus den entsprechenden Definitionen. ■

Im übrigen läßt sich $M(c,h)$ auch als eine geeignete induzierte Darstellung beschreiben. Dazu betrachte man $B^+ := \mathbb{C}\{L_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\} \oplus \mathbb{C}Z$. B^+ ist eine Lie-Unteralgebra von Vir. Sei $\sigma : B^+ \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ die eindimensionale Darstellung mit $\sigma(Z) := c$, $\sigma(L_0) := h$ und $\sigma(L_n) = 0$ für $n \geq 1$. Dann ist die oben explizit beschriebene Darstellung ρ die durch σ auf Vir induzierte Darstellung mit Darstellungsmodul $U(\mathsf{Vir}) \otimes_{B^+} \mathbb{C} \cong M(c,h)$. ($U(\mathsf{Vir})$ ist die universelle Einhüllende von Vir.)

Bemerkung 6.6 *Sei V ein Virasoro-Modul zu $c, h \in \mathbb{C}$. Dann haben wir die direkte Summenzerlegung $V = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} V_N$ mit $V_0 := \mathbb{C} v_0$ und*

$$V_N := \mathbb{C}\left\{\rho\left(L_{-n_1}\right) \dots \rho\left(L_{-n_k}\right) v_0 : n_1 \geq \dots \geq n_k > 0\ ,\ \sum_{j=1}^{k} n_j = N\ ,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Die V_N sind die Eigenräume von $\rho(L_0)$ zum Eigenwert $(N+h)$, d.h. es gilt

$$\rho\left(L_0\right)|_{V_N} = (N+h)\, \mathrm{id}_{V_N}.$$

Dies folgt aus der Definition eines Virasoro-Moduls und den Vertauschungsrelationen der L_m.

Lemma 6.7 *Sei V ein Virasoro-Modul zu $c, h \in \mathbb{C}$ und U ein Untermodul von V. Dann gilt:*

$$U = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \left(V_N \cap U\right).$$

Ein Untermodul von V ist ein *invarianter Untervektorraum* von V, also ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum U von V mit $\rho(D)U \subset U$ für alle $D \in \mathsf{Vir}$.

Beweis. Sei $w = w_0 \oplus ... \oplus w_s \in U$, wobei $w_j \in V_j$ für $j \in \{1, ..., s\}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcccccc} w & = & w_0 & + & \dots & + & w_s \\ \rho(L_0)\, w & = & h w_0 & + & \dots & + & (s+h)\, w_s \\ & \vdots & & & & & \\ \rho(L_0)^{s-1} w & = & h^{s-1} w_0 & + & \dots & + & (s+h)^{s-1} w_s \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die $w_0, \dots, w_s$ mit regulärer Koeffizientenmatrix. Also sind die $w_0, \dots, w_s$ Linearkombinationen der $w, \dots, \rho(L_0)^{s-1} w \in U$. Damit ist $w_j \in V_j \cap U$. ■

6.3 Die Kac-Determinante

Wir sind vor allem an unitären Darstellungen der Virasoro-Algebra interessiert, da die in der konformen Feldtheorie auftretenden Darstellungen von Vir unitär sein sollen. Um auf einem Verma-Modul $M(c,h)$ eine geeignete hermitesche Form zu bestimmen, benötigen wir den Erwartungswert $\langle w \rangle$ eines Vektors $w \in M(c,h)$: In Bezug auf die Zerlegung $M(c,h) = \bigoplus V_N$ nach Lemma 6.7 hat w eine eindeutig bestimmte Komponente $w' \in V_0$, und $\langle w \rangle$ ist einfach der Koeffizient $\langle w \rangle \in \mathbb{C}$ dieser Komponente w' zur Basis $\{v_0\}$, d.h. $w' = \langle w \rangle\, v_0$. ($\langle w \rangle$ gibt auch Sinn für Virasoro-Moduln.)

Seien $c, h \in \mathbb{R}$, $M = M(c,h)$ der Verma-Modul mit Höchstgewichtsdarstellung $\rho : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M(c,h))$ und v_0 der zugehörige Höchstgewichtsvektor. Statt $\rho(L_n)$ schreiben wir im folgenden meist L_n. Wir definieren eine hermitesche Form $H : M \times M \to \mathbb{C}$ durch Festlegung auf der Basis $\{v_{n_1 \dots n_k}\} \cup \{v_0\}$:

$$H\left(v_{n_1 \dots n_k}, v_{m_1 \dots m_j}\right) := \left\langle L_{n_k} \dots L_{n_1} v_{m_1 \dots m_j} \right\rangle = \left\langle L_{n_k} \dots L_{n_1} L_{-m_1} \dots L_{-m_j} v_0 \right\rangle.$$

Diese Definition ist insbesondere so zu verstehen, daß

$$H(v_0, v_0) := 1 \quad \text{und} \quad H(v_0, v_{n_1 \dots n_k}) := 0 =: H(v_{n_1 \dots n_k}, v_0).$$

Die Bedingung $c, h \in \mathbb{R}$ garantiert, daß für alle Basisvektoren

$$v, v' \in B := \{v_{n_1 \dots n_k} : n_1 \geq \dots \geq n_k > 0\} \cup \{v_0\}$$

stets $H(v, v') = H(v', v)$ gilt. Der elementare, aber mühsame Beweis dieser Aussage läuft auf eine wiederholte Ausnutzung der Vertauschungsrelationen der L_n hinaus. $H : B \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ hat jetzt eine $\mathbb{R}$-bilineare Fortsetzung auf $M \times M$, die in der ersten Variablen $\mathbb{C}$-linear und in der zweiten Variablen $\mathbb{C}$-antilinear ist: Für $w, w' \in M$ mit eindeutigen Darstellungen $w = \sum \lambda_j w_j$, $w' = \sum \mu_k w'_k$ bezüglich Basiselementen $w_j, w'_k \in B$ setzt man

$$H(w, w') := \sum \sum \lambda_j \overline{\mu}_k H(w_j, w'_k).$$

Damit ist $H : M \times M \longrightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, die aber im allgemeinen nicht positiv definit oder positiv semi-definit ist. Gerade um dies zu entscheiden, wird die Kac-Determinante verwendet. H hat aber die folgenden Eigenschaften:

Satz 6.8 *Seien $h, c \in \mathbb{R}$ und $M = M(c, h)$.*

1. *$H : M \times M \longrightarrow \mathbb{C}$ ist die eindeutig bestimmte hermitesche Form mit $H(v_0, v_0) = 1$, sowie $H(L_n v, w) = H(v, L_{-n} w)$ und $H(Zv, w) = H(v, Zw)$ für alle $v, w \in M$ und $n \in \mathbb{Z}$.*
2. *$H(v, w) = 0$ für $v \in V_N$, $w \in V_M$ mit $N \neq M$, d.h. die Eigenräume von L_0 sind paarweise orthogonal zueinander.*
3. *$\ker H$ ist der maximale echte Untermodul von M.*

Beweis.

1. Daß die gerade eingeführte hermitesche Form die Bedingungen
$$H(L_n v, w) = H(v, L_{-n} w)$$
erfüllt, sieht man wieder an den Vertauschungsrelationen. Daß eine solche hermitesche Form eindeutig ist, folgt unmittelbar aus
$$H\left(v_{n_1 \ldots n_k}, v_{m_1 \ldots m_j}\right) = H(v_0, L_{n_k} \ldots L_{n_1} v_{m_1 \ldots m_j}).$$
2. Für $n_1 + \ldots + n_k > m_1 + \ldots + m_j$ folgt aus den Vertauschungsrelationen der L_n, daß $L_{n_k} \ldots L_{n_1} L_{-m_1} \ldots L_{-m_j} v_0$ sich als Summe $\sum P_l v_0$ schreiben läßt, wobei der Operator P_l mit einem L_s, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 1$, beginnt, d.h. von der Form $P_l = Q_l L_s$ ist. Es folgt $H\left(v_{n_1 \ldots n_k}, v_{m_1 \ldots m_j}\right) = 0$.
3. $\ker H := \{v \in M : H(w, v) = 0 \; \forall w \in M\}$ ist ein Untermodul, denn mit $v \in \ker H$ gilt auch $L_n v \in \ker H$ wegen $H(w, L_n v) = H(L_{-n} w, v) = 0$. Es ist natürlich $M \neq \ker H$ wegen $v_0 \notin \ker H$. Sei $U \subset M$ irgendein echter Untermodul. Um $U \subset \ker H$ zu zeigen, sei $w \in U$. Für $n_1 \geq \ldots \geq n_k > 0$ gilt $H(v_{n_1 \ldots n_k}, w) = H(v_0, L_{n_k} \ldots L_{n_1} w)$. Wäre $H(v_{n_1 \ldots n_k}, w) \neq 0$, so auch $\langle L_{n_k} \ldots L_{n_1} w \rangle \neq 0$. Nach Lemma 6.7 wäre dann $v_0 \in U$ (wegen $L_{n_k} \ldots L_{n_1} w \in U$), also auch $v_{m_1 \ldots m_j} \in U$, im Widerspruch zu $M \neq U$. Ebenso folgt $H(v_0, w) = 0$, also gilt $w \in \ker H$.

■

Bemerkung 6.9 *$M(c, h)/\ker H$ ist ein Virasoro-Modul mit einer nicht ausgearteten hermiteschen Form H. Allerdings ist H im allgemeinen nicht definit.*

Korollar 6.10 *Wenn H positiv semi-definit ist, muß $c \geq 0$ und $h \geq 0$ gelten.*

Beweis. Es ist $H(v_n, v_n) = H(v_0, L_n L_{-n} v_0) = H(v_0, \rho([L_n, L_{-n}]) v_0) = 2nh + \frac{n}{12}(n^2 - 1)c$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus $H(v_1, v_1) \geq 0$ folgt $h \geq 0$ und aus $H(v_n, v_n) \geq 0$ dann $2nh + \frac{n}{12}(n^2 - 1)c \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $c \geq 0$. ■

Definition 6.11 *Sei $P(N) := \dim_{\mathbb{C}} V_N$ und $\left\{b_1, ..., b_{P(N)}\right\}$ eine Basis von V_N. Wir definieren Matrizen A^N durch $A^N_{ij} := H(b_i, b_j)$ für $i, j \in \{1, ..., P(N)\}$.*

Offensichtlich ist H positiv semidefinit, wenn alle diese Matrizen A^N positiv semidefinit sind. Für $N = 0$ und $N = 1$ hat man $A^0 = (1)$ und $A^1 = (h)$ bezüglich der Basen $\{v_0\}$ bzw. $\{v_1\}$. V_2 hat $\{v_2, v_{1,1}\}$ ($v_2 = L_{-2}v_0$ und $v_{1,1} = L_{-1}L_{-1}v_0$) als Basis. Es ist z.B.

$$\begin{aligned}
H(v_2, v_2) &= \langle L_2 L_{-2} v_0 \rangle = \left\langle L_{-2}L_2 v_0 + 4L_0 v_0 + \tfrac{2}{12} 3\, c\, v_0 \right\rangle = 4h + \tfrac{1}{2}c, \\
H(v_{1,1}, v_{1,1}) &= 8h^2 + 4h, \\
H(v_2, v_{1,1}) &= 6h.
\end{aligned}$$

Die Matrix A^2 in Bezug auf $\{v_2, v_{1,1}\}$ ist also

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4h + \frac{1}{2}c & 6h \\ 6h & 8h^2 + 4h \end{pmatrix}.$$

A^2 ist (unter der Voraussetzung $c \geq 0$, $h \geq 0$) genau dann positiv semidefinit, wenn

$$\det A^2 = 2h(16h^2 - 10h + 2hc + c) \geq 0$$

gilt. Diese Bedingung schränkt die Wahl der $h \geq 0$, $c \geq 0$ weiter ein, wenn H positiv semidefinit sein soll. Im Falle $c = \frac{1}{2}$ beispielsweise muß h außerhalb des Intervalls $\left]\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right[$ liegen. (Unter Berücksichtigung der anderen A^N kann h nur die Werte 0, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{2}$ annehmen und für diese ist H tatsächlich unitär, s.u.)

Satz 6.12 [Kac80] *Die sogenannte* Kac-Determinante $\det A^N$ *hat in Abhängigkeit von (c, h) die Form:*

$$\det A^N(c, h) = K_N \prod_{\substack{p, q \in \mathbb{N} \\ pq \leq N}} (h - h_{p,q}(c))^{P(N-pq)},$$

wobei $K_N \geq 0$ eine von c und h unabhängige Konstante ist und

$$h_{p,q}(c) := \frac{1}{48}\left((13 - c)(p^2 + q^2) + \sqrt{(c-1)(c-25)}(p^2 - q^2) - 24pq - 2 + 2c\right).$$

Der Beweis läßt sich z.B. in [KR87] oder [CdG94] nachlesen.

Um $\det A^N(c, h) > 0$ für alle $c > 1$ und $h > 0$ aus Satz 6.12 herleiten zu können, ist es sinnvoll, die folgenden Terme einzuführen:

$$\begin{aligned}
\varphi_{q,q} &:= h - h_{q,q}(c) \\
\varphi_{p,q} &:= (h - h_{p,q}(c))\,(h - h_{q,p}(c)), \quad p \neq q.
\end{aligned}$$

Dann gilt nach Satz 6.12

$$\det A^N(c, h) = K_N \prod_{\substack{p, q \in \mathbb{N} \\ pq \leq N, p \leq q}} (\varphi_{p,q})^{P(N-pq)}.$$

Für $1 \leq p, q \leq N$ und $c > 1,\ h > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_{q,q}(c) &= h + \frac{1}{24}(c-1)(q^2-1) \ > \ 0, \\
\varphi_{p,q}(c) &= \left(h - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{24}h(p^2+q^2-2)(c-1) \\
&+ \frac{1}{576}(p^2-1)(q^2-1)(c-1)^2 + \frac{1}{48}(c-1)(p-q)^2(pq+1) \ > \ 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\det A^N(c,h) > 0$ für alle $c > 1,\ h > 0$.

Daher ist die hermitesche Form H bereits für den ganzen Bereich $c > 1,\ h > 0$ positiv definit, wenn es nur ein Beispiel $M(c,h)$ mit $c > 1,\ h > 0$ gibt, für das H positiv definit ist. Ein solches Beispiel ergibt sich im Rahmen der Stringtheorie (vgl. Satz 8.9).

Der Bereich $0 \leq c < 1,\ h \geq 0$ ist wesentlich schwieriger zu untersuchen. Eine vollständige Beschreibung wird durch den folgenden Satz geliefert.

Satz 6.13 *Sei $c, h \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *Für $c > 1, h > 0$ ist $M(c,h)$ unitär (positiv definit).*

1a. *Für $c \geq 1, h \geq 0$ ist $M(c,h)$ unitär (positiv semidefinit).*

2. *Für $0 \leq c < 1, h > 0$ ist $M(c,h)$ genau dann unitär, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $c = c(m)$ und $h = h_{p,q}(m)$ für $1 \leq p \leq q < m$ mit*

$$\begin{aligned}
h_{p,q}(m) &:= \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \ m \in \mathbb{N}, \\
c(m) &:= 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \ m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

Zum Beweis von 2.: Friedan, Qiu und Shenker haben mit Hilfe der Kac-Determinante in [FQS86] gezeigt, daß im Bereich $0 \leq c < 1,\ h > 0$ nur für die in 2. aufgeführten Werte von $c = c(m)$ und $h = h_{p,q}(m)$ die hermitesche Form H unitär sein kann. Goddard, Kent und Olive haben dann in [GKO86] für diese Werte mit Hilfe von Kac-Moody-Algebren nachgewiesen, daß $M(c,h)$ tatsächlich eine unitäre Darstellung liefert.

Ist $M(c,h)$ unitär und positiv semidefinit, aber nicht positiv definit, so setzen wir

$$W(c,h) \ := \ M(c,h)/\ker H.$$

Dann ist $W(c,h)$ eine unitäre Höchstgewichtsdarstellung (positiv definit).

Bemerkung 6.14 *Es gibt bis auf Isomorphie höchstens eine positiv definite unitäre Höchstgewichtsdarstellung, und zwar $W(c,h)$. Ist nämlich $\rho : \mathsf{Vir} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eine positiv definite* *unitäre Höchstgewichtsdarstellung mit Vakuumvektor $v_0' \in V$ und hermitescher Form H', so definiert die Zuordnung*

$$v_0 \mapsto v_0', \quad v_{n_1 \dots n_k} \mapsto \rho(L_{-n_1} \dots L_{-n_k}) v_0,$$

einen surjektiven Vektorraumhomomorphismus $\varphi : M(c,h) \longrightarrow V$, der die hermiteschen Formen H und H' respektiert:

$$H'(\varphi(v), \varphi(w)) = H(v,w).$$

Deshalb ist H positiv semidefinit und φ faktorisiert über $W(c,h)$ zu einem Homomorphismus $\overline{\varphi} : W(c,h) \longrightarrow V$.

6.4 Unzerlegbarkeit und Irreduzibilität von Darstellungen

Definition 6.15 *M heißt* unzerlegbar*, wenn es keine invarianten echten Unterräume V, W von M gibt, so daß $M = V \oplus W$. Andernfalls heißt M* zerlegbar.

Definition 6.16 *M heißt* irreduzibel*, wenn es keinen invarianten echten Unterraum V von M gibt. Andernfalls heißt M* reduzibel.

Satz 6.17 *1. Jeder Verma-Modul $M(c,h)$ ist unzerlegbar.*

2. Ist $M(c,h)$ reduzibel, dann gibt es einen maximalen invarianten Unterraum $I(c,h)$, so daß $M(c,h)/I(c,h)$ eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung ist.

3. Eine positiv definite unitäre Höchstgewichtsdarstellung (also W(c,h), s.o.) ist irreduzibel.

Beweis.

1. Seien V, W invariante Unterräume von $M = M(c,h)$, und $M = V \oplus W$. Nach Bemerkung 6.7 haben wir die direkten Summenzerlegungen $V = \bigoplus (M_j \cap V)$ und $W = \bigoplus (M_j \cap W)$. Da $\dim M_0 = 1$ ist, haben wir $(M_0 \cap V) = 0$ oder $(M_j \cap W) = 0$. Der Höchstgewichtsvektor v_0 liegt also in V oder in W. Da V und W invariant sind, folgt $V = M$ oder $W = M$.

2. Sei $I(c,h)$ die Summe der invarianten echten Unterräume von M. Dann ist $I(c,h)$ ein invarianter echter Unterraum von M und $M(c,h)/I(c,h)$ eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung.

3. Sei V positiv definite unitäre Höchstgewichtsdarstellung und $U \subsetneq V$ invarianter Unterraum. Dann ist auch $U^\perp = \{v \in V : H(u,v) = 0 \; \forall u \in U\}$ invarianter Unterraum, denn $H(u, L_n v) = H(L_{-n}u, v) = 0$ und es gilt $U \oplus U^\perp = V$. Die Behauptung folgt daher aus 1.

∎

7 Projektive Darstellungen von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ und mehr

Wir kennen unitäre Darstellungen $\rho_{c,h} : \mathsf{Vir} \to \mathrm{End}(W_{c,h})$ für $c \geq 1, h \geq 0$ oder $c = c(m)$, $h = h_{p,q}(m)$ aus der diskreten Serie. Sei $\mathbb{H} := \widehat{W}_{c,h}$ die Vervollständigung von $W_{c,h}$. Es kann gezeigt werden, daß es einen Untervektorraum $\widetilde{W}_{c,h} \subset \mathbb{H}, W_{c,h} \subset \widetilde{W}_{c,h}$ gibt, so daß $\rho_{c,h}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathsf{Vir} \cap (\mathrm{Vect}(\mathbb{S}))$ eine lineare Fortsetzung $\overline{\rho}_{c,h}(\xi)$ auf $\widetilde{W}_{c,h}$ hat, wobei $\overline{\rho}_{c,h}(\xi)$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator ist. Die Darstellung $\rho_{c,h}$ ist in folgendem Sinne integrabel:

Satz 7.1 [GW85] *Es gibt eine projektive unitäre Darstellung $U_{c,h} : \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \to U(\mathbb{P}(\mathbb{H}))$, so daß*

$$\hat{\gamma}\left(\exp\left(\overline{\rho}_{c,h}(\xi)\right)\right) = U_{c,h}(\exp(\xi))$$

für alle $\xi \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S})$, also ξ reell. Außerdem gilt für $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}) \otimes \mathbb{C}$ und $\varphi \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$:

$$U_{c,h}(\varphi)\rho_{c,h}(X) = (\rho_{c,h}(T\varphi X) + c\alpha(X,\varphi))\, U_{c,h}(\varphi)$$

mit einer Abbildung α auf $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$. Dabei stellen die $U_{c,h}(\varphi)$ in der vorangegangenen Zeile bereits geeignete Liftungen der ursprünglichen $U_{c,h}(\varphi)$ nach $\mathbb{H}$ dar (vgl. Abschnitt 3).

Weitergehende Untersuchungen im Rahmen der konformen Feldtheorie führen zu Darstellungen von

- "chiralen" Algebren $\mathcal{A} \times \overline{\mathcal{A}}$ mit $\mathsf{Vir} \subset \mathcal{A}$, $\overline{\mathsf{Vir}} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (hier ist $\overline{\mathsf{Vir}}$ eine isomorphe Kopie von Vir und $\mathcal{A}$ sowie $\overline{\mathcal{A}}$ sind weitere Algebren), z.B. $\mathcal{A} = U(\hat{\mathfrak{g}})$ (universelle Einhüllende einer Kac-Moody-Algebra), aber auch Algebren, die weder Lie-Algebren noch Einhüllende von Lie-Algebren sind. (Siehe z.B. [BPZ84], [MS89], [FFK89], [Gin89], [GO89].)
- Halbgruppen $\mathcal{E} \times \overline{\mathcal{E}}$ mit $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \subset \mathcal{E}$, $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \subset \overline{\mathcal{E}}$. Man betrachtet Halbgruppenerweiterungen von $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$, weil es keine komplexe Lie-Gruppe gibt, die $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S})$ als Lie-Algebra hat.

Wir stellen hier nur ein erstes Beispiel einer solchen Halbgruppe vor:

Beispiel 7.2 *Sei $q \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{C}$, $q = \exp(2\pi i\tau)$, $|q| < 1$ und $\Sigma_q = \{z \in \mathbb{C} \mid |q| \leq |z| \leq 1\}$ der abgeschlossene Kreisring mit äußerem Radius 1 und innerem Radius $|q|$. Seien $g_1, g_2 \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ reell analytische Diffeomorphismen der Kreislinie $\mathbb{S}$. Dann ergeben sich die folgenden Parametrisierungen der Randkurven von Σ_q:*

$$p_1\left(e^{i\theta}\right) := q\, g_1\left(e^{i\theta}\right), \qquad p_2\left(e^{i\theta}\right) := g_2\left(e^{i\theta}\right)$$

Die angesprochene Halbgruppe $\mathcal{E}$ ist Quotient von $\mathcal{E}_0$, wobei $\mathcal{E}_0$ die Menge der Paare (Σ, p') von Riemannschen Flächen Σ mit genau zwei durch $p' = (p'_1, p'_2)$ parametrisierten Randkurven ist, zu denen es ein $q \in \mathbb{C}$ und eine biholomorphe Abbildung $\varphi : \Sigma_q \longrightarrow \Sigma$ (mit p_1, p_2 Parametrisierung von $\partial\Sigma_q$ wie oben), so daß $\varphi \circ p_j = p'_j$ gilt. Als Menge gilt $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0/\sim$, wobei $\sim$ biholomorphe Äquivalenz unter Wahrung der Parametrisierung bedeutet. Das Produkt von zwei Äquivalenzklassen $[(\Sigma, p')]$, $[(\Sigma', p'')] \in \mathcal{E}$ ist definiert durch das "Zusammenkleben" von

Σ und Σ' unter Identifikation der äußeren Randkurve von Σ mit der inneren von Σ' unter Berücksichtigung der Parametrisierungen.

Der Ansatz

$$A_{c,h}([\Sigma_q, p]) := const.\ U_{c,h}\left(g_2^{-1}\right) q \exp\left(\overline{\rho}_{c,h}(L_0)\right) U_{c,h}(g_1)$$

führt dann mit Hilfe von Satz 7.1 zu einer projektiven Darstellung von $\mathcal{E}$.

Allgemeinere Halbgruppen ergeben sich durch die Betrachtung von allgemeineren Riemannschen Flächen, nämlich von kompakten Riemannschen Flächen mit endlich vielen Randkurven, die parametrisiert sind und in einlaufende ("in") und auslaufende ("out") Randkurven eingeteilt werden. Auch die auf diese Weise entstehende Halbgruppe hat unitäre Darstellungen (vgl. [Seg91], [Seg88b], [GW85]). Aufbauend auf diesen Ergebnissen hat Segal versucht, eine brauchbare Definition für die konforme Feldtheorie zu geben (cf. [Seg91]).

8 Stringtheorie als konforme Feldtheorie

Für die bosonische Stringtheorie als eine klassische Feldtheorie haben wir die flache Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit

$$\left(\mathbb{R}^D, \eta\right) \text{ mit } \eta = \operatorname{diag}(-1, 1, ..., 1)$$

als Hintergrundraum und ein *Weltblatt* in diesem Raum, d.h. eine C^∞-Parametrisierung

$$x : Q \to \mathbb{R}^D$$

eines Flächenstücks $x(Q) \subset \mathbb{R}^D$. Dabei ist $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein offener oder abgeschlossener Quader. Dahinter steht die Vorstellung eines eindimensionalen Objekts, des *Strings*, das sich durch den Raum $\mathbb{R}^D$ bewegt und dabei das zweidimensionale Flächenstück $x(Q)$ überstreicht. Die klassischen Felder (d.h. die kinetischen Variablen der Theorie) sind die Komponenten x^μ der Parametrisierung $x : Q \longrightarrow \mathbb{R}^D$.

8.1 Wirkungen und Bewegungsgleichungen für Strings

In der klassischen Stringtheorie sind die erlaubten Bewegungen diejenigen Parametrisierungen, für die eine vorgegebene Wirkung stationär wird. Als Wirkung verwendet man zunächst den "Flächeninhalt" des Weltblatts (*Nambu-Goto-Wirkung*):

$$S_{NG}(x) := -\kappa \int_Q \sqrt{-\det g}\, dq^0 dq^1,$$

mit einer Konstanten $\kappa \in \mathbb{R}$ ("Stringspannung", vgl. [GSW87]). Hier ist $g := x^*\eta$ die von $x : Q \longrightarrow \mathbb{R}^D$ auf Q induzierte Metrik und es wird nur über solche x variiert, für die g (zumindest im Innern von Q) eine *Lorentz-Metrik* ist, d.h. für die

$$\det(g_{\mu\nu}) < 0$$

gilt. Daher ist (Q, g) eine zweidimensionale *Lorentz-Mannigfaltigkeit*, d.h. eine zweidimensionale Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Lorentz-Metrik g.

Aus der Forderung

$$\frac{d}{d\varepsilon} S_{NG}(x + \varepsilon y)|_{\varepsilon=0} = 0$$

erhält man die Bewegungsgleichungen unter geeigneten Randbedingungen. Da mit der Wirkung S_{NG} nur schwer zu rechnen ist, verwendet man eine andere Wirkung, die auf dieselben Bewegungsgleichungen führt. Die *Polyakov-Wirkung*

$$S_P(x, h) := -\frac{\kappa}{2} \int_Q \sqrt{-\det h}\, h^{ij} g_{ij} dq^0 dq^1$$

hängt zusätzlich von einer (Lorentz-)Metrik h auf Q ab. Die Forderung, daß die Variation von S_P bezüglich h verschwindet, führt auf die Bedingung $g = \lambda h$ (wobei $\lambda : x(Q) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ differenzierbar), so daß man bei unabhängiger Variation von x und h die ursprüngliche Wirkung S_{NG} zurückerhält.

Invarianz der Wirkung. Wie man leicht zeigt, ist die Wirkung S_P invariant gegenüber

- Poincaré-Transformationen,
- Reparametrisierungen des Flächenstücks und
- Weyl-Reskalierungen : $h \mapsto h' := \Omega^2 h$.

S_{NG} ist nur invariant gegenüber Poincaré-Transformationen und Reparametrisierungen.

Wegen der Invarianz gegenüber Reparametrisierungen kann die Wirkung S_P durch eine geeignete Wahl der Parametrisierung vereinfacht werden. Dazu wird der folgende Satz benötigt:

Satz 8.1 *Zweidimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeiten (M, g) sind* konform flach*, d.h. man kann durch Reparametrisierung (lokal) immer erreichen, daß die Metrik g bezüglich geeigneter Koordinaten ψ die Form*

$$\psi^* g = \Omega^2 \eta = \Omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

hat mit einer differenzierbaren Funktion Ω. Koordinaten, für die der metrische Tensor diese Form hat, heißen isotherme Koordinaten*.*

Die Existenz isothermer Koordinaten wird im Falle einer positiv definiten Metrik g auf die Lösung der Beltrami-Gleichung zurückgeführt (vgl. [DFN84, S. 110]). Im Lorentz-Fall läßt sich die Existenz viel einfacher zeigen. Weil in der einschlägigen Literatur die Existenz isothermer Koordinaten vernachlässigt wird, soll hier ein Beweis bereitgestellt werden.

Beweis.* Sei $x \in M$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow M$ eine Karte von M mit $x \in \psi(U)$. Die Komponenten der zu $\psi^* g$ gehörenden Matrix bezeichnen wir mit $g_{\mu\nu} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Indem wir eine geeignete

*von A. Jochens

lineare Abbildung $A \in GL(\mathbb{R}^2)$ wählen und ψ durch $\psi \circ A : A^{-1}(U) \longrightarrow M$ ersetzen, können wir annehmen, daß für $\xi := \psi^{-1}(x)$ gilt:

$$(g_{\mu\nu}(\xi)) = \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil g eine Lorentz-Metrik ist, gilt außerdem $\det(g_{\mu\nu}) = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2 < 0$. Wir definieren

$$a \ := \ \sqrt{g_{12}^2 - g_{11}\, g_{22}} \ \in C^\infty(U, \mathbb{R}).$$

Nach Wahl der Karte ψ ist $g_{22}(\xi) = 1$. Weil g_{22} stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von ξ mit $g_{22}(\xi') > 0$ für $\xi' \in V$.

Nun gibt es eine offene Umgebung $V' \subset V$ von ξ, positive integrierende Faktoren $\lambda, \mu \in C^\infty(V', \mathbb{R}^+)$ und Funktionen $F, G \in C^\infty(V', \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} \partial_1 F &= \lambda \sqrt{g_{22}}, & \partial_2 F &= \lambda \frac{g_{12} + a}{\sqrt{g_{22}}} \\ \partial_1 G &= \mu \sqrt{g_{22}}, & \partial_2 G &= \mu \frac{g_{12} - a}{\sqrt{g_{22}}}. \end{aligned}$$

Die Existenz von F und λ läßt sich wie folgt zeigen: Sei zunächst $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ definiert durch $(t, x) \mapsto (g_{12}(x, t) + a(x, t))/g_{22}(x, t)$. Wir wenden auf f einen Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen an, der die Existenz einer differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängenden Lösungsschar garantiert (vgl. [Die69, 10.8.1 und 10.8.2]). Danach gibt es ein offenes Intervall J und offene Mengen U_0, U mit $\xi \in U_0 \times J \subset U \times J \subset V$, sowie eine Abbildung $\phi \in C^\infty(J \times J \times U_0, U)$, so daß für alle $t, s \in J$ und $x \in U_0$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\phi(t, s, x) = f(t, \phi(t, s, x)) \qquad \text{und} \qquad \phi(t, t, x) = x. \tag{5}$$

Mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man zeigen, daß $\partial_3 \phi$ positiv ist und daß außerdem für $t, s, \tau \in J$ und $x \in U_0$ gilt:

$$\phi(\tau, t, x) \in U_0 \ \Rightarrow \ \phi(s, \tau, \phi(\tau, t, x)) = \phi(s, t, x).$$

Mit den Definitionen

$$F(x, t) \ := \ \phi(t_0, t, x) \qquad \text{und} \qquad \lambda(x, t) \ := \ \frac{\partial_1 F(x, t)}{\sqrt{g_{22}(x, t)}}$$

für $(x, t) \in U_0 \times J$ und ein fest gewähltes $t_0 \in J$ erhalten wir Funktionen $F, \lambda \in C^\infty(U_0 \times J, \mathbb{R})$ mit den gesuchten Eigenschaften. Entsprechend erhalten wir auch die Funktionen G und μ. Die gesuchte offene Menge $V' \subset V$ ist die Schnittmenge der Definitionsbereiche von F und G.

Für die Abbildung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F - G \\ F + G \end{pmatrix} \in C^\infty(V', \mathbb{R}^2)$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi^1 &= (\lambda - \mu)\sqrt{g_{22}}\,, & \partial_2 \varphi^1 &= \lambda \frac{g_{12} + a}{\sqrt{g_{22}}} - \mu \frac{g_{12} - a}{\sqrt{g_{22}}}, \\ \partial_1 \varphi^2 &= (\lambda + \mu)\sqrt{g_{22}}\,, & \partial_2 \varphi^2 &= \lambda \frac{g_{12} + a}{\sqrt{g_{22}}} + \mu \frac{g_{12} - a}{\sqrt{g_{22}}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir daraus nach einer kurzen Rechnung

$$\partial_\mu \varphi^\rho \, \partial_\nu \varphi^\sigma \, \eta_{\rho\sigma} \;=\; \partial_\mu \varphi^1 \, \partial_\nu \varphi^1 - \partial_\mu \varphi^2 \, \partial_\nu \varphi^2 \;=\; 4\,\lambda\,\mu\, g_{\mu\nu},$$

d.h. $\varphi^* \eta = 4\,\lambda\,\mu\,\psi^* g$. Außerdem ist

$$\det D\varphi \;=\; \partial_1 \varphi^1 \, \partial_2 \varphi^2 \;-\; \partial_1 \varphi^2 \, \partial_2 \varphi^1 \;=\; -4\,\lambda\,\mu\, a \;\neq\; 0.$$

Also gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung $W \subset V'$ von ξ, so daß $\tilde{\varphi} := \varphi|_W : W \longrightarrow \varphi(W)$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Wegen $\varphi^* \eta = 4\,\lambda\,\mu\,\psi^* g$ folgt

$$\eta \;=\; (\tilde{\varphi}^{-1})^* \varphi^* \eta \;=\; 4\,\lambda\,\mu\,(\tilde{\varphi}^{-1})^* \psi^* g \;=\; 4\,\lambda\,\mu\,(\psi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* g.$$

Daher ist $\tilde{\psi} := \psi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(W) \longrightarrow M$ die gesuchte Karte für M mit $x \in \tilde{\psi}(\varphi(W))$ und

$$\tilde{\psi}^* g \;=\; \Omega^2 \eta, \qquad \Omega := \frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}.$$

■

Wegen Satz 8.1 kann man die Weltblatt-Parametrisierung so wählen, daß

$$h = \Omega^2 \eta = \Omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Man nennt diese Art der Fixierung von h *konforme Eichung*. Auch nach der konformen Eichung bleibt eine Restsymmetrie: $S_P(x)$ in konformer Eichung ist invariant gegenüber konformen Transformationen auf dem Weltblatt. Auf diese Weise erweist sich die konforme Gruppe $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S})$ als Symmetriegruppe des Systems, wenn auch nur in der Form von "constraints".

Aufgrund der Invarianz der Wirkung läßt sich außerdem durch eine Weyl-Reskalierung erreichen, daß

$$h = \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der konformen Eichung erhalten wir als Bewegungsgleichung aus der Variation von S_{NG} oder S_P die zweidimensionale Wellengleichung:

$$\partial_0^2 x - \partial_1^2 x = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_{\tau\tau} - x_{\sigma\sigma} = 0,$$

mit den durch die konforme Eichung gegebenen Zwangsbedingungen ("constraints")

$$\langle x_\sigma, x_\tau \rangle = 0 = \langle x_\sigma, x_\sigma \rangle + \langle x_\tau, x_\tau \rangle\,, \quad \langle x_\tau, x_\tau \rangle < 0.$$

Dabei ist x_σ die partielle Ableitung von $x = x(\tau, \sigma)$ nach σ und $\langle v, w \rangle$ ist das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle = v^\mu w^\nu \eta_{\mu\nu}$ für $v, w \in \mathbb{R}^D$.

Diese Eichbedingungen ergeben sich aus der Beschreibung der Metrik h durch

$$\lambda h = \lambda(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\tau, x_\tau \rangle & \langle x_\sigma, x_\tau \rangle \\ \langle x_\tau, x_\sigma \rangle & \langle x_\tau, x_\tau \rangle \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0,$$

für die Lösungen x der Bewegungsgleichungen. Sie sind offensichtlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden des *Energie-Impuls-Tensors* T, der wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle - \frac{1}{2} h_{ij} h^{kl} \langle x_k, x_l \rangle , \quad i, j, k, l \in \{\tau, \sigma\} .$$

(vgl. [GSW87, S. 62ff]).

Die Lösungen der zweidimensionalen Wellengleichung haben die Form

$$x(\tau, \sigma) = x_R(\tau - \sigma) + x_L(\tau + \sigma)$$

mit zwei beliebigen differenzierbaren Funktionen x_R und x_L. Im Falle des geschlossenen Strings und der Wahl von $Q := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, also $x(\tau, \sigma) = x(\tau, \sigma + 2\pi)$, erhalten wir die folgende Fourierentwicklung:

$$\begin{aligned} x_R^\mu(\tau - \sigma) &= \tfrac{1}{2} x_0^\mu + \tfrac{1}{4\pi\kappa} p_0^\mu (\tau - \sigma) + \tfrac{i}{\sqrt{4\pi\kappa}} \textstyle\sum_{n \neq 0} \tfrac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \\ x_L^\mu(\tau + \sigma) &= \tfrac{1}{2} x_0^\mu + \tfrac{1}{4\pi\kappa} p_0^\mu (\tau + \sigma) + \tfrac{i}{\sqrt{4\pi\kappa}} \textstyle\sum_{n \neq 0} \tfrac{1}{n} \overline{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)} . \end{aligned} \tag{6}$$

x_0 und p_0 können als "Ortsschwerpunkt" und als "Impulsschwerpunkt" interpretiert werden, während α_n^μ, $\overline{\alpha}_n^\nu$ die Oszillatormoden des Strings sind. Es sind $x_0^\mu, p_0^\mu \in \mathbb{R}$, aber $\alpha_n^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu \in \mathbb{C}$. $\overline{\alpha}_m^\nu$ ist nicht die Konjugation der komplexen Zahl α_m^ν, sondern völlig unabhängig von α_m^ν. Damit die x_R und x_L überhaupt reellwertig sind, muß noch

$$(\alpha_n^\mu)^* = (\alpha_{-n}^\mu) \quad \text{und} \quad (\overline{\alpha}_n^\mu)^* = (\overline{\alpha}_{-n}^\mu) \tag{7}$$

gelten für alle $\mu \in \{0, \ldots, D-1\}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, wobei c^* die komplex Konjugierte von $c \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Wir setzen noch $\alpha_0^\mu := \overline{\alpha}_0^\mu := \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}} p_0^\mu$. Dann hat $x = x_L + x_R$ mit (6) die Form

$$x(\sigma, \tau) = x_0 + \frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa}} \alpha_0 \tau + \frac{i}{\sqrt{4\pi\kappa}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n e^{-in(\tau - \sigma)} + \overline{\alpha}_n e^{-in(\tau + \sigma)} \right) .$$

Beliebige $\alpha_n, \overline{\alpha}_n, x_0, p_0$ mit (7) liefern damit Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung, aber nicht immer Lösungen der Bewegungsgleichung zu S_{NG} oder S_P. Dazu muß noch die konforme Eichung respektiert werden. Unter Verwendung von

$$L_n := \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \alpha_k, \alpha_{n-k} \rangle \quad \text{und} \quad \overline{L}_n := \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \overline{\alpha}_k, \overline{\alpha}_{n-k} \rangle \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

hat die Eichbedingung folgende Form:

Lemma 8.2 *Eine Parametrisierung $x(\tau, \sigma) = x_L(\tau - \sigma) + x_R(\tau + \sigma)$ des Weltblatts mit x_R, x_L wie in (6) und (7) liefert genau dann isotherme Koordinaten, wenn $L_n = \overline{L}_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Es liegen genau dann isotherme Koordinaten vor, wenn

$$\langle x_\tau + x_\sigma, x_\tau + x_\sigma \rangle = \langle x_\tau - x_\sigma, x_\tau - x_\sigma \rangle = 0.$$

Es ist $x_\tau - x_\sigma = \frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in(\tau-\sigma)}$ und $x_\tau + x_\sigma = \frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha}_n e^{-in(\tau+\sigma)}$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\langle x_\tau - x_\sigma, x_\tau - x_\sigma \rangle = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad 0 = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in(\tau-\sigma)}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in(\tau-\sigma)} \right\rangle \\
& \Longleftrightarrow \quad 0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-i(n+k)(\tau-\sigma)} \langle \alpha_n, \alpha_k \rangle \\
& \Longleftrightarrow \quad 0 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n+k=m} e^{-im(\tau-\sigma)} \langle \alpha_n, \alpha_k \rangle \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{Z} : \sum_{n+k=m} \langle \alpha_n, \alpha_k \rangle = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{Z} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \alpha_{n-k}, \alpha_k \rangle = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{Z} : L_m = 0.
\end{aligned}$$

Ebenso mit $x_\tau + x_\sigma$ und $\overline{L}_m$. ■

Zusammengefaßt:

Satz 8.3 *Die Lösungen der String-Bewegungsgleichungen sind die Funktionen*

$$x(\tau,\sigma) = x_0 + \frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa}}\alpha_0\tau + \frac{i}{\sqrt{4\pi\kappa}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n e^{-in(\tau-\sigma)} + \overline{\alpha}_n e^{-in(\tau+\sigma)} \right),$$

für die die Bedingungen (7) und $L_n = \overline{L}_n = 0$ erfüllt sind.

Für einen Zusammenhang zwischen dem Energie-Impuls-Tensor einer konformen Feldtheorie und den Größen L_n und $\overline{L}_n$ sei auf Abschnitt 9.2 verwiesen.

Die Oszillatormoden α_n^μ und $\overline{\alpha}_m^\nu$ sind Observable des klassischen Systems. Sie sind offensichtlich Bewegungskonstanten. Bei einer Quantisierung sollte man daher versuchen, die $\alpha_n^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu$ zu quantisieren.

Zur Quantisierung benötigt man die Poissonklammern des klassischen Systems. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} &= im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n} = \{\overline{\alpha}_m^\mu, \overline{\alpha}_n^\nu\}, \\
\{\alpha_m^\mu, \overline{\alpha}_n^\nu\} &= 0, \\
\{p_0^\mu, x_0^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}, \\
\{x_0^\mu, x_0^\nu\} &= \{x_0^\mu, \alpha_m^\nu\} = \{x_0^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu\} = 0,
\end{aligned}$$

für alle $\mu, \nu \in \{0, \ldots, D-1\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ (wenn $4\pi\kappa = 1$).

Lemma 8.4 *Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\{L_m, L_n\} = i(n-m)L_{m+n}, \quad \left\{\overline{L}_m, \overline{L}_n\right\} = i(n-m)\overline{L}_{m+n}, \quad \textit{und} \quad \left\{\overline{L}_m, L_n\right\} = 0.$$

Das folgt aus der allgemeinen Formel $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\} B$ für die Poissonklammer.

8.2 Quantisierung

Die (α_m^μ) erfüllen die Poissonklammern eines unendlichdimensionalen harmonischen Oszillators. Bei der Quantisierung ersetzt man Poissonklammern durch Kommutatoren:

$$\{\cdot,\cdot\} \longmapsto -i\,[\cdot,\cdot]\,,$$

während die Observablen f durch $\widehat{f}$ ersetzt werden: $\left[\widehat{f},\widehat{g}\right] = -i\widehat{\{f,g\}}$. Zur Abkürzung schreiben wir im folgenden f statt $\widehat{f}$. Nach der Quantisierung haben wir also:

$$[\alpha_m^\mu,\alpha_n^\nu] = m\,\delta_{n+m}\,\eta^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad [x_0^\mu, p_0^\nu] = i\eta^{\mu\nu}.$$

Im folgenden betrachten wir zunächst einen festen Raumindex $\mu_0 > 0$ und konzentrieren uns auf die Vertauschungsrelation $[\alpha_m^{\mu_0},\alpha_n^{\mu_0}] = m\delta_{n+m}$. Zur Vereinfachung lassen wir μ_0 weg und erhalten so die Oszillatoralgebra:

$$[\alpha_m,\alpha_n] = m\delta_{n+m}.$$

Fockraumdarstellung. Als Fockraum wählen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum der Polynome in unendlich vielen Variablen

$$\mathcal{F} := \mathbb{C}[T_1, T_2, \ldots]\,.$$

Es gilt, die Lie-Algebra $\mathcal{A} = \mathbb{C}\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $[\alpha_n,\alpha_m] = n\delta_{n+m}$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ darzustellen. Dazu sei:

$$\begin{array}{rcll} \rho(\alpha_n) & := & \frac{\partial}{\partial T_n} & \text{für } n>0, \\ \rho(\alpha_0) & := & \mu\,\mathrm{id}_{\mathcal{F}} & \text{wobei } \mu \in \mathbb{C}, \\ \rho(\alpha_{-n}) & := & nT_n & \text{für } n>0. \end{array}$$

Dann sind die Vertauschungsrelationen offensichtlich erfüllt und die Darstellung ist irreduzibel. Darüber hinaus handelt es sich um eine unitäre Darstellung in folgendem Sinne:

Satz 8.5 *Im Falle $\mu \in \mathbb{R}$ hat $\mathcal{F}$ eine eindeutig bestimmte positiv definite hermitesche Form H mit der Normierung $H(1,1) = 1$ (1 spielt die Rolle des Vakuumvektors) und*

$$H\left(\rho(\alpha_n)f, g\right) = H\left(f, \rho(\alpha_{-n})g\right)$$

für alle $f, g \in \mathcal{F}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis als Übung.

Die $L_n = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\alpha_{n-k} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_{n-k}\alpha_k$ sind nicht unmittelbar wohldefiniert auf $\mathcal{F}$, weil ja im allgemeinen $\rho(\alpha_k)\rho(\alpha_{n-k}) \neq \rho(\alpha_{n-k})\rho(\alpha_k)$. Vermöge der *Normalordnung*

$$:\rho(\alpha_i)\,\rho(\alpha_j): \;\; := \;\; \begin{cases} \rho(\alpha_i)\,\rho(\alpha_j) & \text{für } i \le j \\ \rho(\alpha_j)\,\rho(\alpha_i) & \text{für } i > j \end{cases}$$

erhalten wir die Operatoren

$$\rho(L_n) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad \rho(L_n) := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} :\rho(\alpha_k)\rho(\alpha_{n-k}): \,.$$

Die $\rho(L_m)$ sind wohldefinierte Operatoren, da in der auftretenden unendlichen Summe bei Anwendung auf ein beliebiges Polynom $P \in \mathbb{C}[T_1, T_2, \ldots]$ nur endlich viele Summanden auftreten.

Satz 8.6 *In der Fockraumdarstellung ist (mit L_n anstelle von $\rho(L_n)$ als Abkürzung):*

$$[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{n}{12}\left(n^2-1\right)\delta_{n+m}\mathrm{id}\ .$$

Sie liefert daher eine Darstellung der Virasoro-Algebra.

Der Beweis findet sich z.B. in [KR87, S. 15ff].

Korollar 8.7 *Die Darstellung aus Satz 8.6 liefert eine positiv definite unitäre Höchstgewichtsdarstellung der Virasoro-Algebra zum Gewicht $c = 1, h = \frac{1}{2}\mu^2$ (vgl. Abschnitt 6).*

Beweis. Mit dem Höchstgewichtsvektor $v_0 := 1$ setze man $V := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_n v_0 : n \in \mathbb{Z}\}$. $V \subset \mathcal{F}$ liefert das Gewünschte. ■

Bemerkung 8.8 *In der Regel gilt $\mathcal{F} = V$, nicht aber für $\mu = 0$.*

Weitere unitäre Höchstgewichtsdarstellungen erhält man durch Tensorierung: Für $f \otimes g \in V \otimes V$ sei

$$(\rho\otimes\rho)(L_n)(f\otimes g) := (\rho(L_n)f)\otimes g + f\otimes(\rho(L_n)g).$$

Als einfache Folgerung erhält man:

Satz 8.9 *$\rho\otimes\rho : \mathsf{Vir} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V\otimes V)$ ist positiv definite unitäre Höchstgewichtsdarstellung zum Gewicht $c = 2, h = \mu^2$. Durch Iteration dieser Prozedur erhält man positiv definite unitäre Höchstgewichtsdarstellungen für jedes Gewicht (c, h) mit $c \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathbb{R}_+$.*

Für die Physik der Strings sind die beschriebenen Darstellungen kaum interessant, denn es wird nur ein Teil der wichtigen Observablen dargestellt. Es kam uns erst einmal darauf an, einen unitären Verma-Modul mit $c > 1$ und $h \geq 0$ für die Betrachtungen in Abschnitt 6 bereitzustellen.

In der Stringtheorie gilt es, die *String-Algebra*

$$\mathcal{L} := \mathbb{C}1 \oplus \bigoplus_{\mu=0}^{D-1}(\mathbb{C}x_0^\mu \oplus \mathbb{C}p_0^\mu) \oplus \bigoplus_{\mu=0}^{D-1}\bigoplus_{m\neq 0}(\mathbb{C}\alpha_m^\mu)$$

mit den durch die Quantisierungsregeln gegebenen Vertauschungsrelationen darzustellen. Der entsprechende Fockraum ist

$$\mathcal{F} := \mathbb{C}[T_n^\mu : n \in \mathbb{N}_0, \mu = 0, \ldots, D-1]$$

und die analoge Darstellung wird folgendermaßen gegeben:

$$\begin{array}{rclcll}
 & & \rho(\alpha_m) & := & \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial T_m^\nu} & \text{für } m > 0, \\
P^\mu & := & \rho(\alpha_0^\mu) & := & i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial T_0^\mu} & (\alpha_0^\mu = p_0 \text{ bei } 4\pi\kappa = 1), \\
 & & \rho(\alpha_{-m}^\mu) & := & mT_m^\mu & \text{für } m > 0, \\
Q^\mu & := & \rho(x_0^\mu) & := & T_0^\mu. &
\end{array}$$

Die natürliche hermitesche Form auf $\mathcal{F}$, die $H(1,1) = 1$ und

$$H\left(\rho(\alpha^\mu_m)f, g\right) = H\left(f, \rho(\alpha^\mu_{-m})g\right)$$

garantiert, ist nicht mehr positiv semidefinit, denn es ist z.B.

$$H\left(T^0_1, T^0_1\right) = H\left(\alpha^0_{-1}1, \alpha^0_{-1}1\right) = H\left(1, \alpha^0_1\alpha^0_{-1}1\right) = H\left(1, \left[\alpha^0_1, \alpha^0_{-1}\right]1\right) = H(1,-1) = -1.$$

Außerdem sind bei dieser Darstellung die Eichbedingungen $L_n = 0$ noch nicht berücksichtigt. Eine Lösung von beiden Problemen liefert auf einen Schlag das "No-Ghost-Theorem" (vgl. [GSW87]). Es besagt im wesentlichen, daß bei Berücksichtigung der Bedingungen $L_n = 0$, $n > 0$, für die Dimension $D = 26$ die Darstellung unitär wird. Das soll heißen, daß die Restriktion der hermiteschen Form auf den Raum der "physikalischen Zustände"

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{F} : L_n f = 0 \text{ für alle } n > 0, L_0 f = hf\}$$

positiv semi-definit ist ($D = 26$). Ein Beweis des No-Ghost-Theorems, der auf der Kac-Determinante beruht, wird in [Tho84] gegeben.

9 Grundzüge einer zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie

In diesem Abschnitt werden einige der grundlegenden Konzepte und Forderungen einer zweidimensionalen konformen Feldtheorie skizziert. Dabei wird im folgenden die euklidische Signatur $(+,+)$ auf $\mathbb{R}^2$ (bzw. auf Flächen) zugrundegelegt, wie dies in der einschlägigen Literatur wegen der engen Beziehung der konformen Feldtheorie zur Statistischen Mechanik üblich ist (vgl. [BPZ84] und [Gin89]).

Eine konforme Feldtheorie ist zunächst einmal eine Quantenfeldtheorie.

9.1 Axiome einer zweidimensionalen euklidischen Quantenfeldtheorie

Zu einer zweidimensionalen Quantenfeldtheorie (vgl. z.B. [IZ80], [Kak91], [NS65], [FFK89]) gehört eine Familie $(\Phi_i)_{i\in B_0}$ von Feldern mit einer Reihe von Eigenschaften. Diese Felder werden auch Feldoperatoren bzw. Operatoren genannt und sind definiert als Abbildungen auf offenen Mengen M der komplexen Ebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2,0}$ (oder allgemeiner auf Riemannschen Flächen M). Sie haben ihre Werte in der Menge $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{H})$ der (i.a. unbeschränkten) linearen Operatoren auf einem fest vorgegebenen Hilbertraum $\mathbb{H}$. Genau genommen sind die Feldoperatoren in der Regel nur auf Räumen von Testfunktionen auf M definiert, z.B. auf $\mathcal{S}(M)$ (siehe unten).

Die *Matrix-Koeffizienten* $\langle v|\,\Phi_i(z)\,|w\rangle$ der Feldoperatoren sind in jedem Falle wohldefiniert. Dabei bezeichnet $\langle v, w\rangle$, $v, w \in \mathbb{H}$, das Skalarprodukt von $\mathbb{H}$ und $\langle v|\,\Phi_i(z)\,|w\rangle$ steht für $\langle v, \Phi_i(z)w\rangle$.

Die entscheidenden Größen der Theorie, die auch für mögliche Experimente ihre Bedeutung haben, sind die *Korrelationsfunktionen*

$$G_{i_1\ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n) := \langle\Omega|\,\Phi_{i_1}(z_1)\ldots\Phi_{i_n}(z_n)\,|\Omega\rangle\,,$$

die auch *n-Punktfunktionen* oder *Greensche Funktionen* genannt werden. Dabei ist $\Omega \in \mathbb{H}$ der Vakuumvektor. Diese Korrelationsfunktionen sind zunächst zu interpretieren als *Vakuumerwartungswerte* von zeitgeordneten Produkten $\Phi_{i_1}(z_1)\dots\Phi_{i_n}(z_n)$ der Feldoperatoren (*zeitgeordnet* bedeutet $\operatorname{Re} z_n > \dots > \operatorname{Re} z_1$, oder im Falle der radialen Quantisierung $|z_n| > \dots > |z_1|$). Sie lassen sich in der Regel fortsetzen auf

$$M_n := \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j \text{ für } i \neq j\}\,.$$

(Genau genommen haben sie eine Fortsetzung auf die universelle Überlagerung $\widetilde{M}_n$ von M_n. Auf diese Weise kommt die reine Zopfgruppe P_n ins Spiel, die ja die Fundamentalgruppe $\pi_1(M_n)$ von M_n ist.) Zur Vereinfachung der Darstellung wird in der Formulierung der nachfolgenden Axiome angenommen, daß die $G_{i_1\dots i_n}$ auf M_n definiert sind.

Die Positivität der hermiteschen Form, also des Skalarprodukts von $\mathbb{H}$, läßt sich durch die sogenannte *Reflexionspositivität* der Korrelationsfunktionen ausdrücken. Diese Eigenschaft bedeutet die Festlegung einer Spiegelungsachse — typischerweise der imaginären Achse im Falle der Zeitspiegelung — und die Forderung, daß die Korrelation von Operatorprodukten von Feldern auf einer Seite der Geraden mit der Spiegelung auf der anderen Seite nicht negativ ist (siehe unten, Axiom 3).

Die zweidimensionale Quantenfeldtheorie läßt sich nun ganz und gar durch die Eigenschaften der Korrelationsfunktionen axiomatisch beschreiben, ohne a priori die Feldoperatoren oder den Hilbertraum anzugeben. Zur Formulierung der Axiome benötigen wir noch einige Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
M_n^+ &:= \{(z_1,\dots,z_n) \in M_n : \operatorname{Re} z_j > 0 \text{ für } j = 1,\dots,n\} \\
\mathcal{S}_0^+ &:= \mathbb{C} \\
\mathcal{S}_n^+ &:= \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{\,n}) : \operatorname{Supp}(f) \subset M_n^+ \right\}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}^{\,n}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{C}^{\,n}) \,|\, \forall p,k \in \mathbb{N} : \sup_{|\alpha|\le p}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha f(x)|\,(1+|x|^2)^k < \infty \right\}$$

der *Schwartzsche Raum* der schnell fallenden glatten Funktionen. Dabei identifizieren wir $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ mit $x = (x_1,\dots,x_{2n})$ als Variablen und ∂^α ist die partielle Ableitung zum Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$.

Es ist sinnvoll, $z \in \mathbb{C}$ als $z = t + iy$ mit $t, y \in \mathbb{R}$ zu schreiben und dazu $\overline{z} = t - iy$ als im Prinzip von z unabhängige Größe aufzufassen. In diesem Sinne wird gelegentlich $G(z,\overline{z})$ anstelle von $G(z)$ geschrieben, wenn ausgedrückt werden soll, daß $G(z)$ nicht notwendig holomorph ist. In der Notation $z = t+iy$ steht y für die "Raumkoordinate" und t für die (imaginäre) "Zeitkoordinate".

Die Gruppe $E = E_2$ der euklidischen Bewegungen (die hier der Poincaré-Gruppe entspricht) wird erzeugt von den Rotationen

$$r_\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{i\alpha} z, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

und den Translationen

$$t_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z + a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Weitere Möbiustransformationen sind die Dilatationen

$$d_\tau : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^\tau z, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

und die Inversion

$$i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Diese konformen Transformationen erzeugen die Möbiusgruppe Mb (vgl. Abschnitt 2.3). Die weiteren globalen konformen Transformationen (vgl. Definition 2.7) werden erzeugt von Mb und der *Zeitspiegelung*

$$\Theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z = t + iy \mapsto -t + iy = -\overline{z}.$$

Die Osterwalder-Schrader-Axiome ([OS73], [OS75])

Gegeben ist eine abzählbare Indexmenge B_0. Die Multiindices $(i_1, \ldots, i_n) \in B_0^n$ werden auch $i = i_1 \ldots i_n = (i_1, \ldots, i_n)$ geschrieben. Sei $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B_0^n$. Die Quantenfeldtheorie wird beschrieben durch eine Familie $(G_i)_{i \in B}$ von Korrelationsfunktionen

$$G_{i_1 \ldots i_n} : M_n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad G_\emptyset = 1,$$

die stetig und polynomial beschränkt sind und den folgenden Axiomen genügen:

Axiom 1 (Lokalität) *Für alle* $(i_1, \ldots, i_n) \in B_0^n, (z_1, \ldots, z_n) \in M_n$ *und jede Permutation* $\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ *gilt*

$$G_{i_1, \ldots, i_n}(z_1, \ldots, z_n) = G_{i_{\pi(1)} \ldots i_{\pi(n)}}(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}).$$

Axiom 2 (Poincaré-Kovarianz) *Zu jedem* $i \in B_0$ *gehören* konforme Gewichte $h_i, \overline{h}_i \in \mathbb{R}$ *($\overline{h}_i$ ist nicht komplex konjugiert zu h_i, sondern völlig unabhängig), so daß für alle $w \in E$ und $n \geq 2$ gilt:*

$$G_{i_1 \ldots i_n}(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{dw}{dz}(z_j) \right)^{h_j} \left(\overline{\frac{dw}{dz}(z_j)} \right)^{\overline{h}_j} G_{i_1 \ldots i_n}(w_1, \overline{w}_1, \ldots, w_n, \overline{w}_n), \tag{8}$$

mit $w_j := w(z_j)$, $\overline{w}_j := \overline{w(z_j)}$, $h_j := h_{i_j}$.

Dabei ist $s_i := h_i - \overline{h}_i$ der *konforme Spin* zum Index i und $d_i := h_i + \overline{h}_i$ die *Skalendimension.*

Die Kovarianz entspricht dem Transformationsverhalten von Tensoren. Sie bedeutet für 2-Punktfunktionen und 3-Punktfunktionen eine starke Einschränkung. Alle Korrelationsfunktionen $G_{i_1 \ldots i_n}$ für $n \geq 2$ hängen wegen der Kovarianz bezüglich Translationen nur von den Differenzen $z_{ij} := z_i - z_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ab. Typische 2-Punktfunktionen $G_{i_1 i_1} = G$, die Axiom 2 erfüllen, sind

$$\begin{aligned} G &= \text{const.} \quad \text{mit } h = \overline{h} = 0 \\ G(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) &= C z_{12}^{-2} \overline{z}_{12}^{-2} \quad \text{mit } h = \overline{h} = 1 \\ G(z_1, z_2) &= C z_{12}^{-4} \quad \text{mit } h = 2, \overline{h} = 0 \end{aligned}$$

und allgemein

$$G(z_1, z_2) = C z_{12}^{-2h} \overline{z}_{12}^{-2\overline{h}} \quad \text{mit } h, \overline{h} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Im Falle $h = \overline{h}$ also

$$G(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = C\, |z_{12}|^{-4h} = C\, |z_{12}|^{-2d}.$$

Typische 2-Punktfunktionen $G = G_{i_1 i_2}$ mit $i_1 \neq i_2$, die Axiom 2 erfüllen, sind die

$$G(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = C\, z_{12}^{-h_1}\, z_{12}^{-h_2}\, \overline{z}_{12}^{-\overline{h}_1}\, \overline{z}_{12}^{-\overline{h}_2}.$$

Alle diese Beispiele sind zugleich auch Möbius-kovariant.

Die Funktion $F = G_{i_1 i_1}$ mit

$$F(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = -\log |z_{12}|^2$$

erfüllt ebenfalls die Axiome 1 und 2 (mit beliebigen $h, \overline{h}$, $h = \overline{h}$), aber diese Funktion ist nicht Möbius-kovariant, denn es gilt z.B. mit $w(z) = e^\tau z$, $\tau \neq 0$:

$$\prod_{j=1}^{2} \left(\frac{dw}{dz}(z_j)\right)^h \left(\overline{\frac{dw}{dz}(z_j)}\right)^{\overline{h}} F(w_1, w_2) = (e^\tau)^{2h+2\overline{h}} (-\log e^{2\tau} |z_{12}|^2) \neq -\log |z_{12}|^2.$$

Eine typische Dreipunktfunktion ist zum Beispiel

$$G(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, z_3, \overline{z}_3) = C z_{12}^{-h_1-h_2+h_3} z_{23}^{-h_2-h_3+h_1} z_{13}^{-h_3-h_1+h_2} \overline{z}_{12}^{-\overline{h}_1-\overline{h}_2+\overline{h}_3} \overline{z}_{23}^{-\overline{h}_2-\overline{h}_3+\overline{h}_1} \overline{z}_{13}^{-\overline{h}_3-\overline{h}_1+\overline{h}_2}. \tag{9}$$

(Beweis als Übung.)

Axiom 3 (Reflexionspositivität) *Es gibt eine Abbildung* $* : B_0 \longrightarrow B_0$ *mit* $*^2 = \mathrm{id}_{B_0}$ *mit Fortsetzung* $* : B \longrightarrow B$, $i \mapsto i^*$, *so daß*

1. $G_i(z) = G_{i^*}(\Theta(z)) = G_{i^*}(-z^*)$ *für* $i \in B$ *(dabei ist* z^* *komplex konjugiert zu* z*).*
2. *Für alle* $\underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}^+ = \{(f_i)_{i \in B} : f_i \in \mathcal{S}^+$ *für* $i \in B_0^n, f_i \neq 0$ *nur für endlich viele* $i \in B\}$ *gilt:*

$$\left\langle \underline{f}, \underline{f} \right\rangle := \sum_{i,j \in B} \sum_{n,m} \int_{M_{n+m}} G_{i^*j}\left(\Theta(z_1), \ldots, \Theta(z_n), w_1, \ldots, w_m\right) f_i(z)^* f_j(w) d^n z d^m w \geq 0.$$

Lemma 9.1 (Rekonstruktion des Hilbertraums) *Axiom 3 liefert eine positiv semidefinite hermitesche Form* H *auf* $\underline{\mathcal{S}}^+$ *und daher den Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *als Vervollständigung von* $\underline{\mathcal{S}}/\ker H$ *mit Skalarprodukt* $\langle\, ,\, \rangle$*.*

Die Feldoperatoren erhält man jetzt durch Multiplikation. Φ_i für $i \in B_0$ soll auf einem geeignet großen Unterraum $D_i \subset \mathcal{S}_1^+$ definiert werden. Dazu muß $\Phi_i(f)$ für $f \in D_i$ als Operator auf $\mathbb{H}$ bestimmt werden. Für $f \in D_i \subset \mathcal{S}_1^+$ und $\underline{g} \in \underline{\mathcal{S}}^+$, $\underline{g} = (g_i)_{i \in B}$, sei das Element $f \times \underline{g}$ gegeben durch

$$(f \times \underline{g})_{j\, i_1 \ldots i_n}(z_1, \ldots, z_{n+1}) := f(z_1) \delta_{ji} g_{i_1 \ldots i_n}(z_2, \ldots, z_{n+1}).$$

Es läßt sich zeigen (vgl. [OS73],[OS75]), daß die Zuordnung $\Phi_i(f) : \underline{g} \mapsto f \times \underline{g}$ für genügend viele $\underline{g} \in \underline{\mathcal{S}}^+$ definiert ist. Außerdem existiert $\Omega \in \mathbb{H}$ ($\Omega = \underline{f}$, mit $f_\emptyset = 1$ und $f_i = 0$ für $i \neq \emptyset$) mit den folgenden Eigenschaften:

Satz 9.2 (Rekonstruktion der Feldoperatoren) :

1. *$\Phi_i(f) : \underline{g} \mapsto f \times \underline{g}$ ist linearer Operator auf $\mathbb{H}$ und $\Phi_i : D_i \longrightarrow \mathcal{O}$ ist ein Feld.*

2. *Für konvergente Folgen $f_k \longrightarrow \delta_z$, $f_k \in D_i$, $z \in \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ ist $\Phi_i(z)\underline{g} := \lim_{k \longrightarrow \infty} \Phi_i(f)\underline{g}$, $\Phi_i(z) \in \mathcal{O}$, und*

$$\langle \Omega | \, \Phi_i(z) \, | \Omega \rangle := \lim_{k \longrightarrow \infty} \langle \Omega | \, \Phi_i(f_k) \, | \Omega \rangle$$

   ist eine wohldefinierte stetige und polynomial beschränkte Funktion auf

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\} .$$

3. *Für $\operatorname{Re} z_n > \ldots > \operatorname{Re} z_1$ gilt*

$$\langle \Omega | \, \Phi_i(z_1) \ldots \Phi_i(z_n) \, | \Omega \rangle = G_{i_1 \ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n).$$

4. *Aus Axiom 2 läßt sich eine Darstellung von E in $\mathbb{H}$ bezüglich selbstadjungierter Operatoren bestimmen. Ω ist invariant bezüglich dieser Darstellung.*

Weiterhin sind die $G_{i_1 \ldots i_n}(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n)$ holomorph in $M_n^> \times M_n^>$, wobei

$$M_n^> := \left\{ z \in M_n^+ : \operatorname{Re} z_n > \ldots > \operatorname{Re} z_1 > 0 \right\},$$

und lassen sich analytisch auf einen großen Bereich $N \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ fortsetzen.

Ähnliche Ergebnisse gelten für andere Gebiete in $\mathbb{C}$ anstelle der rechten Halbebene

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\} ,$$

z.B. für die Kreisscheibe (radiale Quantisierung). Punkte $z \in \mathbb{C}$ werden in diesem Falle als $z = e^{\tau + i\alpha}$ parametrisiert mit der Zeit τ und der Raumvariablen α, die zyklisch ist. Die Zeitordnung wird zu $|z_n| > \ldots > |z_1|$.

9.2 Konforme Felder und der Energie-Impuls-Tensor

Eine zweidimensionale Quantenfeldtheorie mit Feldoperatoren $(\Phi_i)_{i \in B_0}$, die den Axiomen 1 bis 3 genügt, ist eine *konforme Feldtheorie*, wenn sie zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Theorie ist kovariant gegenüber Dilatationen (Axiom 4),
- sie hat einen divergenzfreien Energie-Impuls-Tensor (Axiom 5) und
- sie hat eine assoziative Operatorproduktentwicklung für die Primärfelder (Axiom 6).

Axiom 4 (Skalierungskovarianz) *Die Korrelationsfunktionen G_i, $i \in B \setminus B_1$, erfüllen (8) auch für die Dilatationen $w(z) = e^\tau z$. Also*

$$G_i(z_1, \dots, z_n) = (e^\tau)^{h_1+\dots+h_n+\overline{h}_1+\dots+\overline{h}_n}\, G_i(e^\tau z_1, \dots, e^\tau z_n)$$

für $(z_1, \dots, z_n) \in M$, $i = (i_1, \dots, i_n)$ und $h_j = h_{i_j}$.

Lemma 9.3 *In einer Quantenfeldtheorie, die die Axiome 1 bis 4 erfüllt, gilt für die 2-Punktfunktionen G_{ij}:*

$$G_{ij}(z_1, z_2) = C z_{12}^{-(h_i+h_j)} \overline{z}_{12}^{-(\overline{h}_i+\overline{h}_j)}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{C}$. Im Falle $i = j$ also

$$G_{ii}(z_1, z_2) = z_{12}^{-2h} \overline{z}_{12}^{-2\overline{h}} \qquad (z_{12} = z_1 - z_2).$$

Beweis. Aufgrund der Translationsinvarianz hängt $G := G_{ij}$ nur von $z_{12} = z_1 - z_2$ ab. Also $G(z_1, z_2) = G_{ij}(z_1 - z_2, 0)$. Für $z = re^{i\alpha} = e^\tau e^{i\alpha}$ gilt $G(z, 0) = G(e^{\tau+i\alpha}1, 0)$. Nach Axiom 3 und 4 gilt:

$$G(1, 0) = \left(e^{\tau+i\alpha}\right)^{h_i} \left(e^{\tau-i\alpha}\right)^{\overline{h}_i} \left(e^{\tau+i\alpha}\right)^{h_j} \left(e^{\tau-i\alpha}\right)^{\overline{h}_j} G(e^{\tau+i\alpha}1, 0).$$

Es folgt: $G(z, 0) = z^{-(h_i+h_j)} \overline{z}^{-(\overline{h}_i+\overline{h}_j)} G(1, 0)$, $C := G(1, 0)$. ∎

Ein analoges einschränkendes Resultat gilt für die 3-Punktfunktionen, die wie in (9) aussehen müssen. Die 4-Punktfunktionen dagegen sind nicht so eingeschränkt, sie haben die Form

$$G(z_1, z_2, z_3, z_4) = F\left(r(z), \overline{r(z)}\right) \prod_{i<j} z_{ij}^{-(h_i+h_j)+\frac{1}{3}h} \prod_{i<j} \overline{z}_{ij}^{-(\overline{h}_i+\overline{h}_j)+\frac{1}{3}\overline{h}},$$

wobei $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ und entsprechend $\overline{h}$ und wobei F eine holomorphe Funktion in dem Doppelverhältnis $r(z) := (z_{12} z_{34})/(z_{13} z_{24})$ und $\overline{r(z)}$ ist.

Ähnliches gilt für die n-Punktfunktionen, $n \geq 5$. Wesentlich: Die n-Punktfunktionen lassen sich mit Hilfe der konformen Symmetrie bestimmen!

Axiom 5 (Existenz des Energie-Impuls-Tensors) *Unter den Feldern $(\Phi_i)_{i \in B_0}$ gibt es die vier Felder $T_{\mu\nu}$, $\mu, \nu \in \{0, 1\}$, mit*

- $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $T_{\mu\nu}(z)^* = T_{\nu\mu}(\Theta(z))$,
- $\partial_0 T_{\mu 0} - \partial_1 T_{\mu 1} = 0$ *mit* $\partial_0 := \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_1 := \frac{\partial}{\partial y}$,
- $d\,(T_{\mu\nu}) = h_{\mu\nu} + \overline{h}_{\mu\nu} = 2$, $s(T_{00} - T_{11} \pm 2iT_{01}) = \pm 2$.

Satz 9.4 [LM76] *Aus den Axiomen 1 bis 5 folgt:*

- $\mathrm{tr}(T_{\mu\nu}) = T^\mu_\mu = T_{00} + T_{11} = 0$. *Deshalb ist* $T := T_{00} + iT_{01} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{11} + 2iT_{01})$ *unabhängig von* $\overline{z}$, *d.h.* $\overline{\partial} T = 0$, *und damit holomorph; ebenso ist* $\overline{T} := T_{00} - iT_{01}$ *unabhängig von* z. *Für die konformen Gewichte gilt* $h(T) = \overline{h}(\overline{T}) = 2$, $\overline{h}(T) = h(\overline{T}) = 0$.

- *Durch*

$$L_{-n} := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{T(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \quad \overline{L}_{-n} := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{T}(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

werden Operatoren auf $\mathbb{H}$ *definiert, die den Vertauschungsrelationen von zwei kommutierenden Virasoro-Algebren mit gemeinsamer zentraler Ladung genügen:*

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m} \\ \left[\overline{L}_n, \overline{L}_m\right] &= (n-m)\overline{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m} \\ \left[L_n, \overline{L}_m\right] &= 0 \end{aligned}$$

- *Die durch* L_n *bzw.* $\overline{L}_n$ *gegebene Darstellung der Virasoro-Algebra ist unitär:* $L_n^* = L_{-n}$.

Der Beweis in [LM76] geht übrigens von der Minkowski-Signatur aus !

Die L_n, $\overline{L}_n$ lassen sich als die Fourierkoeffizienten von T, $\overline{T}$ auffassen, es gilt nämlich

$$T(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z^{-(n+2)}L_n, \quad \overline{T}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{z}^{-(n+2)}\overline{L}_n.$$

$T(z_1)T(z_2)$ hat die Operatorproduktentwicklung

$$T(z_1)T(z_2) \sim \frac{c}{2}(z_1-z_2)^{-4} + 2(z_1-z_2)^{-2}T(z_2) + (z_1-z_2)^{-1}\frac{d}{dz_2}T(z_2) \tag{10}$$

("$\sim$" für asymptotisch, also "=" modulo einer regulären Funktion $R(z_1, z_2)$). Die Gültigkeit von (10) erweist sich als äquivalent zu den Vertauschungsrelationen der L_n, $\overline{L}_n$ (siehe Satz 9.4).

Auf diese Weise kommt also die konforme Symmetrie ins Spiel. Die L_n, $\overline{L}_n$ geben eine unitäre Höchstgewichtsdarstellung mit den Gewichten (c,2), zusammen also eine unitäre Darstellung

$$\mathsf{Vir} \times \overline{\mathsf{Vir}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_{c,2} \otimes \overline{W}_{c,2}).$$

9.3 Primärfelder, Operatorproduktentwicklung und Fusion

Vielfach wird behauptet, daß zumindest die Primärfelder ein Transformationsverhalten wie in Axiom 2 auch für beliebige holomorphe $w = w(z)$ haben und dadurch die konforme Symmetrie zum Ausdruck kommt. Diese Aussage scheint mir nicht zu stimmen. Axiom 2 kann für allgemeine w höchstens "infinitesimal" gelten, das ist aber gerade das Konzept des Primärfeldes.

Definition 9.5 *Ein konformes Feld* Φ_i, $i \in B_0$, *heißt* Primärfeld, *wenn für alle* $n \in \mathbb{Z}$

$$[L_n, \Phi_i(z)] = z^{n+1}\partial\Phi_i(z) + h_i(n+1)z^n\Phi_i(z) \tag{11}$$

gilt mit $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ *(und analog für die* $\overline{z}$*-Abhängigkeit, die wir im folgenden meist fortlassen).*

Charakterisieren läßt sich die Primärfeldeigenschaft durch folgende Tatsache: Die Primärfelder sind genau die $\Phi_i \in B_0$, die die folgende *Operatorproduktentwicklung* (OPE) mit T haben:

$$T(z_1)\Phi_i(z_2) \sim \frac{h_i}{(z_1 - z_2)^2}\Phi_i(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\Phi_i(z_2) \tag{12}$$

Sie läßt sich aber auch verstehen als formale infinitesimale Version von (8) in Axiom 2 für $w = w(z) = z + z^{n+1}$: Gäbe es zu Vir eine Lie-Gruppe und hätte man diese Symmetriegruppe (oder eine zentrale Erweiterung nach den Überlegungen von Abschnitt 3) unitär dargestellt durch U, so hätte man formal die Identität

$$U(e^{tL_n})\Phi_i(z)U(e^{-tL_n}) = \left(\frac{dw_t}{dz}\right)^{h_i} \Phi_i(w_t(z))$$

für $w_t(z) = z + tz^{n+1}$. (Wir nehmen hier die Version $L_n = -(z^{n+1})\frac{d}{dz}$, vgl. Abschnitt 5.2.) Für die Matrixkoeffizienten ist

$$\langle\Omega|\, U(e^{tL_n})\Phi_i(z)U(e^{-tL_n})\,|\Omega\rangle = \langle\Omega|\,\Phi_i(z)\,|\Omega\rangle\,,$$

d.h. die obige Identität bedeutet gerade (8) für w_t:

$$G_i(z) = \left(\frac{dw_t}{dz}\right)^{h_i} G_i(w_t(z)).$$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ angewendet auf dieselbe formale Identität bringt auf der linken Seite $[L_n, \Phi_i(z)]$ und auf der rechten Seite

$$\frac{d}{dt}\left(1 + t(n+1)z^n\right)^{h_i} \Phi_i(z)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\Phi_i(w_t(z))\Big|_{t=0} = h_i(n+1)z^n\Phi_i(z) + z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\Phi_i(z).$$

Soweit zur Motivation von (11).

Im übrigen ist T kein Primärfeld, wie man im Vergleich der Entwicklungen (10) und (12) sieht, es sei denn es gilt $c = 0$ und $h = 2$.

Aus geometrischer Sicht entspricht ein Primärfeld mit $h = 1$, $\overline{h} = 0$ gerade einer meromorphen Differentialform.

Definition 9.6 *In einer Quantenfeldtheorie mit den Axiomen 1 bis 5 sei*

$$B_1 := \{i \in B_0 : \Phi_i \textit{ ist ein Primärfeld}\}\,.$$

Die zugehörige konforme Familie $[\Phi_i]$ für $i \in B_1$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum, der von den Vektoren

$$\Phi_i^\alpha(z) := L_{-\alpha_1}(z)\ldots L_{-\alpha_N}(z)\Phi_i(z) \tag{13}$$

für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_N > 0$, aufgespannt wird. Dabei ist

$$L_{-n}(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{T(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

für $z \in \mathbb{C}$ in Verallgemeinerung von

$$L_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{T(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = L_{-n}(0).$$

Die konforme Familie $[\Phi_i]$ definiert für festes $z \in \mathbb{C}$ eine Höchstgewichtsdarstellung vom Gewicht (c_i, h_i) (vgl. Abschnitt 6).

Die Primärfelder haben die folgende Operatorproduktentwicklung (OPE)

$$\Phi_i(z)\Phi_j(0) = \sum_{k \in B_1} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_>^m} c_{i,j,\alpha}^k(z)\Phi_k^\alpha(0) \tag{14}$$

mit rationalen Funktionen $c_{i,j,\alpha}^k(z)$ und $\mathbb{N}_>^m := \{\alpha \in \mathbb{N}^m : \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_m > 0\}$.

Die **wesentliche Aufgabe der konformen Feldtheorie** ist die Bestimmung

- der Skalendimension $d_i = h_i + \overline{h}_i$,
- der zentralen Ladung c_i zur Familie $[\Phi_i]$
- und der Koeffizienten $c_{i,j,\alpha}^k$

aus der Operatorproduktentwicklung (14) mit Hilfe der konformen Symmetrie.

Diese Aufgabe kann allgemein durchgeführt werden, wenn die OPE (14) assoziativ ist. Diese zusätzliche Eigenschaft erlaubt es, alle 4-Punktfunktionen $G_{i_1 i_2 i_3 i_4}(z, \overline{z})$, $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in B_1^4$ zu bestimmen und mit Hilfe sogenannter "konformer Blöcke" $\mathcal{F}^r$, $\overline{\mathcal{F}}^s$ (holomorph bzw. antiholomorph) darzustellen:

$$G_i(z, \overline{z}) = \sum \mathcal{F}^r(z) h_{rs,i} \overline{\mathcal{F}}^s(\overline{z}), \quad i \in B_1^4, h_{rs,i} \in \mathbb{C}.$$

Statt auf $\mathbb{C}$ kann eine konforme Feldtheorie auch auf beliebigen Riemannschen Flächen definiert werden. Die $\mathcal{F}^r$, $\overline{\mathcal{F}}^s$ hängen dann natürlich noch von der jeweils gewählten komplexen Struktur der Fläche ab. Sie können schließlich als holomorphe Schnitte in geeigneten Geradenbündeln über den passenden Modulräumen definiert werden (cf. [FS87], [KNR94],[TUY89]).

In jedem Falle soll eine konforme Feldtheorie schließlich noch das folgende Axiom erfüllen:

Axiom 6 (Operatorproduktentwicklung) *Für die Primärfelder gilt die OPE (14). Diese OPE ist assoziativ.*

Bemerkung 9.7 :

1. *Aus G_i für alle $i \in B_1^4$ lassen sich alle weiteren n-Punktfunktionen der Primärfelder ableiten.*

2. *Die Entwicklungen (14) sind die Fusionsregeln, die formal auch als*

$$[\Phi_i] \times [\Phi_j] = \sum_{l \in B_1} [\Phi_l]$$

geschrieben werden, oder mit mehr Information als

$$\Phi_i \times \Phi_j = \sum_l N_{ij}^l \Phi_l,$$

wobei $N_{ij}^l \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl des Auftretens von Elementen der Familie $[\Phi]_l$ in der OPE von $\Phi_i(z)\Phi_j(0)$ ist.

3. *Eine konforme Feldtheorie heißt* rationale konforme Feldtheorie, *wenn B_1 endlich ist und alle $c_i \in \mathbb{Q}$ sind.*

4. *Während der Darstellung sind wir gelegentlich zur radialen Quantisierung übergegangen, beispielsweise bei der Verwendung der Cauchy-Integrale in Abschnitt 9.2, z.B. bei*

$$L_{-n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{T(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

9.4 Andere Ansätze zur Axiomatisierung

Als eine Festschreibung der von [BPZ84] eingeführten Grundlagen der konformen Feldtheorie geben Moore und Seiberg in [MS89] die folgenden Axiome für eine konforme Feldtheorie an:

Eine konforme Feldtheorie ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \bigoplus_{i \in B_1} W(c_i, h_i) \otimes W(\overline{c}_i, \overline{h}_i)$ mit den unitären Höchstgewichtsdarstellungen $W(c_i, h_i)$, $W(\overline{c}_i, \overline{h}_i)$ (vgl. Abschnitt 6), so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

P 1. Es gibt einen eindeutig bestimmten *Vakuumvektor* $\Omega = |0\rangle \in V$ mit $\Omega \in W(c_{i_0}, h_{i_0}) \times W(\overline{c}_{i_0}, \overline{h}_{i_0})$, $h_{i_0} = \overline{h}_{i_0} = 0$. Ω ist $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$-invariant.

P 2. Jedes *Vakuum* $v_i \otimes \overline{v}_i \in W(c_i, h_i) \times W(\overline{c}_i, \overline{h}_i)$ bestimmt Felder Φ_i^α, $\alpha \in \mathbb{N}_>^N$, vermöge (13) mit Primärfeldern Φ_i.

P 3. $G_i(z) = \langle \Omega | \, \Phi_{i_1}(z_1) \ldots \Phi_{i_n}(z_n) \, | \Omega \rangle$, $|z_1| > \ldots > |z_n|$, hat stets eine analytische Fortsetzung nach M_n.

P 4. Die Theorie ist "modular invariant" (vgl. [MS89]).

Eine andere Art von Axiomen wurde von Segal in [Seg91], [Seg88b] vorgeschlagen. Basisobjekt ist in diesem Ansatz die Klasse aller Riemannschen Flächen mit Rändern, die zu einer Halbgruppe wird, in der das Produkt ein festgelegtes Verschmelzen von zwei solchen Flächen ist (vgl. Abschnitt 7).

Eine weitere interessante Axiomatik, in der ebenfalls die Gesamtheit aller Riemannschen Flächen zum Ausgangspunkt gemacht wird, ist von Friedan und Shenker in [FS87] eingeführt worden.

10 Die Verlinde-Formel aus mathematischer Sicht

Die Verlinde-Formel beschreibt die Dimension von Räumen holomorpher Blöcke (vgl. Abschnitt 9.3) in gewissen rationalen konformen Feldtheorien [Ver88]. Angewandt auf die entsprechende Situation liefert die Verlinde-Formel die Dimension von Räumen verallgemeinerter Thetafunktionen (siehe Abschnitt 10.1). Diese Dimensionen und ihr polynomiales Verhalten (vgl. Satz 10.5) sind von großem Interesse in der Mathematik. Vor dem Auftreten der Verlinde-Formel waren diese Dimensionen nur in ganz speziellen Fällen bekannt, z.B. für die klassischen Thetafunktionen (Satz 10.4).

Die Richtigkeit der Verlinde-Formel folgt aus allgemeinen physikalischen Einsichten. Das kann aber nicht als Beweis gelten, sondern höchstens als Hinweis, wie man bei einem Beweis vorgehen könnte. Aus diesem Grunde haben sich viele Mathematiker mit dem Problem einer Beweisführung befaßt, angefangen mit [TUY89] und zu einem gewissen Abschluß gekommen durch [Fal94]. Die Beweise sind sämtlich sehr schwer zu verstehen.

In diesem Abschnitt soll lediglich erklärt werden, was die Verlinde-Formel in dem Kontext stabiler Vektorbündel ist, und es soll eine Beweisstragie vorgestellt werden, in der eine Fusion von kompakten Riemannschen Flächen vorkommt.

10.1 Der Modulraum der Darstellungen und Thetafunktionen

Im folgenden ist S stets eine orientierte, kompakte Fläche vom Geschlecht $g = g(S) \in \mathbb{N}_0$. Der *Modulraum der Darstellungen* zur Gruppe G ist

$$\mathcal{M}^G := \operatorname{Hom}(\pi_1(S), G)\,/G\,.$$

Dabei ist die durch "$/G$" angesprochene Äquivalenzrelation die Konjugation

$$g \sim g' \iff \exists h \in G : g = hgh^{-1}.$$

Satz 10.1 *Im Falle $G = SU(r)$ hat $\mathcal{M}^{SU(r)}$ eine Reihe von verschiedenen Interpretaionen:*

1. $\mathcal{M}^{SU(r)} = \operatorname{Hom}(\pi_1(S), G)\,/G$. Topologische *Interpretation als eine Invariante zwischen der Fundamentalgruppe $\pi_1(S)$ und ihrem abelschen Anteil*

$$H_1(S) = \pi_1(S)\,/[\pi_1(S), \pi_1(S)] \cong \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}.$$

2. $\mathcal{M}^{SU(r)} \cong$ *{Isomorphieklassen von flachen $SU(r)$-Bündeln}.* Geometrische *Interpretation. Dabei stehen noch zwei verwandte Interpretationen von "flach" zur Auswahl: "flach" im Sinne eines Vektorbündels mit konstanten Übergangsfunktionen und "flach" im Sinne eines Vektorbündels mit flachem Zusammenhang (jeweils bezogen auf $SU(r)$).*

3. $\mathcal{M}^{SU(r)} \cong \check{H}^1(S, SU(r)) \cong H^1(\pi_1(S), SU(r))$. Kohomologische *Interpretation. Dabei steht $\check{H}^1$ für die erste Čechsche Kohomologiemenge (keine Gruppe im nichtabelschen Fall) und H^1 für Gruppenkohomologie.*

4. $\mathcal{M}^{SU(r)} \cong \mathcal{A}_0\,/\mathcal{G}$, *wobei $\mathcal{A}_0$ der Raum der flachen Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel $S \times SU(r) \longrightarrow S$ ist und $\mathcal{G}$ die zugehörige Eichgruppe der Bündelautomorphismen, also hier: $\mathcal{G} \cong C^\infty(S, SU(r))$. $\mathcal{A}_0\,/\mathcal{G}$ hat die Interpretation als Phasenraum einer dreidimensionalen Chern-Simons-Theorie mit einer internen Symmetriegruppe $SU(r)$ in Bezug auf eine geeignete Eichung (vgl. [Wit89]).*

5. $\mathcal{M}^{SU(r)} \cong$ *Modulraum der semistabilen holomorphen Vektorbündel E auf S vom Rang r mit* $\det E = \mathcal{O}_S$. Komplex-analytische *Interpretation, wenn auf S eine komplexe Struktur J fixiert wird. Zur Verdeutlichung schreiben wir $\mathcal{M}_J^{SU(r)}$ für diesen Modulraum, um die Abhängigkeit von der komplexen Struktur J auf S zu betonen.*

Der Beweis ist in den Fällen 2. bis 4. eine elementare Übung zu den jeweiligen Begriffen. Fall 5. dagegen ist ein klassischer Satz von Narasimhan und Seshadri [NS65].

"$\cong$" ist jeweils nur eine mengentheoretische Bijektion. Aber die verschiedenen Interpretationen liefern auf $\mathcal{M}^{SU(r)}$ eine Reihe von Strukturen. In 1. zum Beispiel erhält $\mathcal{M}^{SU(r)}$ die Struktur einer Untervarietät von $SU(r)^{2g}/SU(r)$, in 4. die Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit und in 5. die Struktur einer Kählermannigfaltigkeit außerhalb der singulären Punkte von $\mathcal{M}^{SU(r)}$.

Zu Satz 10.1 gibt es unter anderem die folgenden drei wichtigen Verallgemeinerungen:

- auf andere Lie-Gruppen G anstelle von $SU(r)$,
- auf Kählermannigfaltigkeiten M statt S und
- auf $S \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ statt S mit Punkten $P_1, \ldots, P_n \in S$ (vgl. Abschnitt 10.3).

Ohne auf diese allgemeinen Gesichtspunkte zunächst einzugehen, läßt sich über $\mathcal{M}^{SU(r)}$ folgendes feststellen:

- $\mathcal{M}^{SU(r)}$ hat eine natürliche symplektische Struktur, die durch die folgende 2-Form ω auf dem affinen Raum $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^1(S, \mathfrak{su}(2))$ aller Zusammenhänge induziert wird:

  $$\omega(\alpha, \beta) = c \int_S \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta)$$

  für $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(S, \mathfrak{su}(2))$ mit einer geeigneten Konstanten $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dabei ist

  $$\mathrm{tr} : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

  die Spur auf den komplexen 2×2-Matrizen. Diese symplektische Struktur steht in Zusammenhang mit der Chern-Simons-Theorie (vgl. [Wit89]). $\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$ ist der Phasenraum der klassischen Felder.

- Außerdem hat $\mathcal{M}^{SU(r)}$ ein bis auf Isomorphie eindeutiges Geradenbündel $\mathcal{L}$ (das Determinantenbündel) und darauf einen Zusammenhang ∇, dessen Krümmung $2\pi i\omega$ ist. Bei Fixierung einer komplexen Struktur J hat $\mathcal{L}$ zum Beispiel die folgende Beschreibung:

  $$\Theta := \left\{ E \in \mathcal{M}^{SU(r)} : \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, E) \geq 1 \right\}$$

  ist ein Cartier-Divisor (der "Theta-Divisor") auf $\mathcal{M}^{SU(r)}$, für den die Garbe

  $$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Theta = \mathcal{O}(\Theta) = \text{ Garbe der meromorphen Funktionen } f \text{ auf } \mathcal{M}^{SU(r)} \text{ mit } (f) + \Theta \geq 0$$

  eine lokal freie Garbe vom Rang 1 ist. Deshalb kann $\mathcal{L}$ auch als komplexes Geradenbündel aufgefaßt werden, das automatisch ein holomorphes Geradenbündel ist. ($H^0(S, E)$ ist der Vektorraum der holomorphen Schnitte auf S mit Werten in dem Vektorbündel E.)

Definition 10.2 *Der Raum der holomorphen Schnitte in $\mathcal{L}^k$, also $H^0(\mathcal{M}_J^{SU(r)}, \mathcal{L}^k)$, ist der Raum der* verallgemeinerten Thetafunktionen *vom Niveau $k \in \mathbb{N}$.*

Dabei ist $\mathcal{L}^k$ das k-fache Tensorprodukt von $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}^k = \mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}$ (k-fach).

Der Bezug zur konformen Feldtheorie wird dadurch hergestellt, daß $H^0(\mathcal{M}_J^{SU(r)}, \mathcal{L}^k)$ isomorph zu dem Raum der holomorphen Blöcke einer geeigneten konformen Feldtheorie mit Eichsymmetrie ist (vgl. Abschnitt 9.3). Das wird in [KNR94] für den Fall einer kompakten Lie-Gruppe G bewiesen.

Im übrigen kann im Sinne des Programms der geometrischen Quantisierung der Raum

$$H^0(\mathcal{M}_J^{SU(r)}, \mathcal{L})$$

als der quantisierte Zustandsraum zum Phasenraum $(\mathcal{M}^{SU(r)}, \omega)$, Quantisierungsbündel $\mathcal{L}$ und holomorpher Polarisation aufgefaßt werden.

Wir behandeln zum Abschluß dieses Unterabschnitts ein Beispiel, das nicht ganz in das Schema der Gruppen $SU(r)$ hineinpaßt, aber den Vorteil hat, relativ einfach und übersichtlich zu sein, und das erklärt, wieso die Elemente von $H^0(\mathcal{M}_J^{U(1)}, \mathcal{L}^k)$ als Thetafunktionen bezeichnet werden:

Beispiel 10.3 (z.B. in [Bot91]) Es sei G die abelsche Gruppe $U(1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_J^{U(1)} &\cong \text{Modulraum der holomorphen Geradenbündel auf } S = S_J \text{ vom Grad } 0\\
&\cong \{\text{Isomorphieklassen von hol. VB-Strukturen auf dem trivialen } C^\infty\text{-Vektorb. } S_J \times \mathbb{C} \longrightarrow S_J\}\\
&\cong \operatorname{Hom}(\pi_1(S), U(1)) \cong \check{H}^1(S, U(1)) \cong H^1(S_J, \mathcal{O}) \big/ H^1(S, \mathbb{Z})\\
&\cong \mathbb{C}^g / \Gamma \cong \text{ Jacobi-Varietät.}
\end{aligned}$$

Es sei $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}_J^{U(1)}$ das Thetabündel, gegeben durch den Theta-Divisor auf der Jacobi-Varietät. Dann ist

- $H^0(\mathcal{M}_J^{U(1)}, \mathcal{L}) \cong \mathbb{C}$ der Raum der klassischen Thetafunktionen und
- $H^0(\mathcal{M}_J^{U(1)}, \mathcal{L}^k)$ der Raum der klassischen Thetafunktionen vom Niveau k.

Satz 10.4 *Es gilt:* $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{M}_J^{U(1)}, \mathcal{L}^k) = k^g$ *(unabhängig von der komplexen Struktur).*

Die Verlinde-Formel ist nun eine Verallgemeinerung dieser Dimensionsformel auf andere Lie-Gruppen G anstelle von $U(1)$.

10.2 Die Verlinde-Formel

Satz 10.5 (Verlinde-Formel) *Sei* $z_k^{SU(r)}(g) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{M}_J^{U(1)}, \mathcal{L}^k)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
z_k^{SU(2)}(g) &= \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1} \sum_{j=1}^{k+1} \left(\sin^2 \frac{j\pi}{k+2}\right)^{1-g} \qquad \textit{und}\\
z_k^{SU(r)}(g) &= \left(\frac{r}{r+k}\right)^{g} \sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,r+k\}\\ |S|=r}} \prod_{\substack{s\in S, t\notin S\\ 1\le t\le r+k}} \left|2 \sin \pi \frac{s-t}{r+k}\right|^{g-1} \qquad \textit{für } r \geq 2.
\end{aligned}$$

Der Satz (vgl. [Ver88], [TUY89], [Fal94], [Sze94], [Bea94a], [Bea94b], [BT93], [MS89], [Ram94], [Sor95]) hat eine Verallgemeinerung auf einfache komplexe Lie-Gruppen $G_{\mathbb{C}}$ vom Typ A, B, C, D oder G mit reeller Form G ([BT93], [Fal94]).

An der Verlinde-Formel ist bemerkenswert, daß

- die rechte Seite der Gleichung überhaupt eine natürliche Zahl definiert,
- sie polynomial in k ist und
- die Dimension unabhängig von der komplexen Struktur J ist.

Selbst die Umrechung der zweiten Formel für $r = 2$ in die erste erfordert ein wenig Rechnerei. Zur Unabhängigkeit von J: Von der rationalen konformen Feldtheorie weiß man aufgrund physikalischer Überlegungen, daß der Raum der konformen Blöcke unabhängig von der komplexen Struktur J auf S ist. Das macht die Unabhängigkeit der Dimensionsformel von J plausibel, erfordert jedoch noch einen mathematischen Beweis.

Die Verlinde-Formel ist aus physikalischer Sicht eine Folge der Fusionsregeln bei der Operatorproduktentwicklung von Primärfeldern (vgl. Abschnitt 9.3). Auf die Fusion aus mathematischer Sicht kommen wir im nächsten Unterabschnitt zu sprechen. Mit Hilfe der dort formulierten Fusionsregeln wird die Verlinde-Formel auf ein kombinatorisches Problem reduziert, das in Abschnitt 10.4 behandelt wird.

10.3 Fusionsregeln für Flächen mit markierten Punkten

Wir beschränken uns auf den Fall $G = SU(2)$.

Sei S_J wie zuvor eine Fläche S vom Geschlecht g, die mit einer komplexen Struktur J versehen ist, und $k \in \mathbb{N}$. $n \in \mathbb{N}$ sei die (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte irreduzible Darstellung $n : SU(2) \longrightarrow GL(V_n)$ mit $\dim_{\mathbb{C}} V_n = n + 1$.

$P = (P_1, \dots, P_m) \in S^m$ seien Punkte (ohne Wiederholung) und $R = (n_1, \dots, n_m) \in \{0, \dots, k\}^m$ sei ein Satz von zugehörigen Markierungen (hier sind Wiederholungen erlaubt). Der Punkt P_j hat dann die Markierung n_j, $j = 1, \dots, m$.

Satz 10.6 *Sei $\mathcal{M}_J^{SU(2)}(P,R)$ der zu (P,R) gehörige Modulraum der semistabilen parabolischen Vektorbündel vom Rang 2 mit Paragrad 0 und Paradeterminante $\mathcal{O}_S$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{orb}}(S), SU(2))\,/SU(2) \quad \cong \quad \mathcal{M}_J^{SU(2)}(P,R) \quad \cong$$

$\cong$ *Menge der Isomorphieklassen von singulären $SU(2)$-Zusammenhängen, flach auf $S \setminus P$ mit durch R_j festgelegter Holonomie um P_j, $j = 1, \dots, m$.*

Erläuterungen zum Satz: Der klassische Phasenraum $\mathcal{A}_0/\mathcal{G}$ (vgl. 4. in Satz 10.1) wird jetzt ersetzt durch den Quotienten

$$\mathcal{M} := \mathcal{A}_{\mathcal{O}}/\mathcal{G}.$$

Dabei ist $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ der Raum der *singulären unitären Zusammenhänge* A auf dem trivialen Vektorbündel vom Rang r über der Fläche S, deren Krümmung bei den markierten Punkten x_i (bis auf Konjugation) lokal von der Form

$$m(A) = \sum R_i \, \delta(x_i - x)$$

ist (mit dem Dirac δ-Funktional $\delta(x_i - x)$ in x_i) und die flach in $X \setminus P$ sind. Deshalb kann $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ verstanden werden als Urbild $m^{-1}(\mathcal{O})$ eines geeigneten koadjungierten Orbits $\mathcal{O}$ des Duals der Lie-Algebra zur Eichgruppe $\mathcal{G}$ bezüglich der Momentenabbildung m auf der Gesamtheit der singulären Zusammenhänge.

Eine andere Interpretation von $\mathcal{M}$ ist die folgende: Die Konjugationsklassen der Darstellungen R_i bestimmen gewisse Ordnungen $N_i \in \mathbb{N}$, die das Niveau k teilen. Deshalb kann $\mathcal{M}$ mittels der Holonomie zu den Zusammenhängen A längs geschlossener Kurven in $S \setminus P$ mit dem Darstellungsraum der Orbifold-Fundamentalgruppe $\pi_1^{\mathrm{orb}}(S)$ identifiziert werden:

$$\mathcal{M} \cong \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{orb}}(S), SU(r)) \, / \, SU(r) \, .$$

Die Orbifold-Fundamentalgruppe $\pi_1^{\mathrm{orb}}(S)$ (zum Geschlecht g und zu R) ist die von

$$a_1, \ldots, a_g, \; b_1, \ldots, b_g, \; c_1, \ldots, c_m$$

erzeugte Gruppe mit den Relationen

$$\prod_{j=1}^{g} a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} \prod_{i=1}^{m} c_i = 1 \quad \text{und} \quad c_i^{N_i} = 1$$

für $i = 1, \ldots, m$, wobei N_j von k und n_j abhängt. Die Wahl von π_1^{orb} mit diesen Relationen (also insbesondere der Wert von N_j) erklärt sich aus der Beschreibung der irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ mittels der koadjungierten Orbits maximaler Dimension in $\mathfrak{su}(2)^*$ nach Kirillov.

Damit ist zunächst einmal die zweite Bijektion "$\cong$" des Satzes erklärt. Zum Verständnis der ersten Bijektion, die von Mehta und Seshadri [MS80] als Verallgemeinerung des Satzes von Narasimhan und Seshadri [NS65] bewiesen wurde, benötigen wir noch die folgenden Begriffe:

Eine *parabolische Struktur* auf einem holomorphen Vektorbündel E vom Rang r über einer punktierten Riemannschen Fläche (Σ, R) mit den Punkten $x_1, \ldots, x_p \in \Sigma$ wird gegeben durch die folgenden Daten:

- eine *Fahne* von echten Unterräumen in jeder Faser E_i von E über x_i:

  $$E_i = F_i^{(0)} \subset \cdots \subset F_i^{(r_i)} \subset \{0\}$$

  mit $k_i^{(s)} := \dim F_i^{(s)} \big/ F_i^{(s+1)}$ als Vielfachheiten

- und eine Folge von *Gewichten* $\alpha_i^{(s)}$, die jeder Fahne zugeordnet ist, mit

  $$0 \leq \alpha_i^{(0)} \leq \ldots \leq \alpha_i^{(r_i)} \leq 1.$$

Der *Paragrad* eines solchen parabolischen Bündels E ist

$$\operatorname{paradeg} E := \deg(E) + \sum_i d_i \qquad \text{mit } d_i := \sum_s \alpha_i^{(s)} k_i^{(s)}.$$

Ein parabolisches Bündel E ist *semi-stabil*, wenn für alle parabolischen Unterbündel F von E gilt:

$$(\operatorname{rg}(F))^{-1} \operatorname{paradeg} F \;\leq\; (\operatorname{rg}(E))^{-1} \operatorname{paradeg} E.$$

E ist *stabil*, wenn dabei "$\leq$" durch "$<$" ersetzt werden kann.

Die *Paradeterminante* zu dieser parabolischen Struktur (bzw. zu diesen Gewichten) ist die übliche Determinante $\det E = \Lambda^r E$ tensoriert mit dem holomorphen Geradenbündel $\mathcal{O}_\Sigma(-\sum d_i x_i)$ zum Divisor $-\sum d_i x_i$, wenn d_i ganzzahlig ist. Andernfalls ist die Paradeterminante nicht definiert.

Die erste Bijektion "$\cong$" in dem Satz 10.6 ist folgendermaßen zu verstehen: Man fasse diejenigen Äquivalenzklassen von parabolischen Vektorbündeln über $\Sigma = S_J$ zusammen, deren Gewichte $\alpha_i^{(s)}$ rational sind und für die sämtliche $d_j := \sum_s \alpha_j^{(s)} k_j^{(s)}$ ganzzahlig sind. Der Raum

$$\mathcal{M}_J^{SU(r)}(P, R)$$

besteht nun aus Äquivalenzklassen von solchen parabolischen Vektorbündeln, die ausserdem noch semistabil sind mit Paragrad 0 und trivialer Paradeterminante.

Dieser Modulraum $\mathcal{M}_J^{SU(r)}(P, R)$ steht nach [MS80] in bijektiver Beziehung zu

$$\operatorname{Hom}(\pi_1^{\text{orb}}(S), SU(r)) \,/\, SU(r)\,.$$

Dabei ist im Falle $r = 2$ die zu $[E] \in \mathcal{M}_J^{SU(2)}(P, R)$ gehörige Darstellung ρ auf den c_j durch

$$\rho(c_j) \;=\; \begin{cases} \exp 2\pi i \operatorname{diag}\left(\alpha_j^{(0)}, \alpha_j^{(0)}\right) & \text{für } k_j^{(0)} = 2 \\[2ex] \exp 2\pi i \operatorname{diag}\left(\alpha_j^{(0)}, \alpha_j^{(1)}\right) & \text{für } k_j^{(0)} = 1 = k_j^{(1)} \end{cases}$$

gegeben. Außerdem erhält $\mathcal{M}_J^{SU(2)}(P, R)$ die (von J abhängige) Struktur einer projektiven Varietät über $\mathbb{C}$, in der die stabilen parabolischen Vektorbündel regulären Punkten entsprechen. Ein analoger Satz gilt für parabolische Vektorbündel vom Rang r (vgl. [MS80]).

Im Falle von $P = \emptyset$ hat man den in Abschnitt 10.1 beschriebenen Modulraum $\mathcal{M}_{J,g}^{SU(2)}$. Ähnlich wie dort hat man auch auf $\mathcal{M}_{J,g}^{SU(2)}(P, R)$ ein holomorphes Geradenbündel $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}_{J,g}^{SU(2)}(P, R)$, das Thetabündel, und erhält die endlichdimensionalen Schnitträume

$$H^0(\mathcal{M}_{J,g}^{SU(2)}(P, R), \mathcal{L}^k)$$

als die Räume der verallgemeinerten Thetafunktionen vom Niveau k (und zu (P, R)).

Satz 10.7 (Fusionsregeln) : *0.* $z_k(g; n_1, \ldots, n_m) \;:=\; \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{M}_{J,g}^{SU(2)}(P, R), \mathcal{L}^k)$ *ist unabhängig von* J *und der Lage der Punkte* $P_1, \ldots, P_m \in S$. *Dabei ist* $R = (n_1, \ldots, n_m)$. *Sei*

$\mathcal{M}_{g,m}$ der Modulraum der punktierten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g mit m Punkten und sei $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ die Deligne-Mumford-Kompaktifizierung von $\mathcal{M}_{g,m}$. Dann hat das Bündel $\pi : Z_{g,k}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{g,m}$ mit der Faser $\pi^{-1}(J,P) = H^0(\mathcal{M}_{J,g}^{SU(2)}(P,R), \mathcal{L}^k)$ eine Fortsetzung als Vektorbündel $\overline{Z}_{g,k}(R) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ vom Rang $z_k(g; n_1, \ldots, n_m)$.

1. $z_k(g; n_1, \ldots, n_m) = \sum_{n=0}^{k} z_k(g-1; n_1, \ldots, n_m, n, n)$.

2. $z_k(g' + g''; n_1, \ldots, n_m) = \sum_{n=0}^{k} z_k(g'; n_1, \ldots, n_s, n) z_k(g''; n, n_{s+1}, \ldots, n_m)$ für $1 \leq s \leq m$.

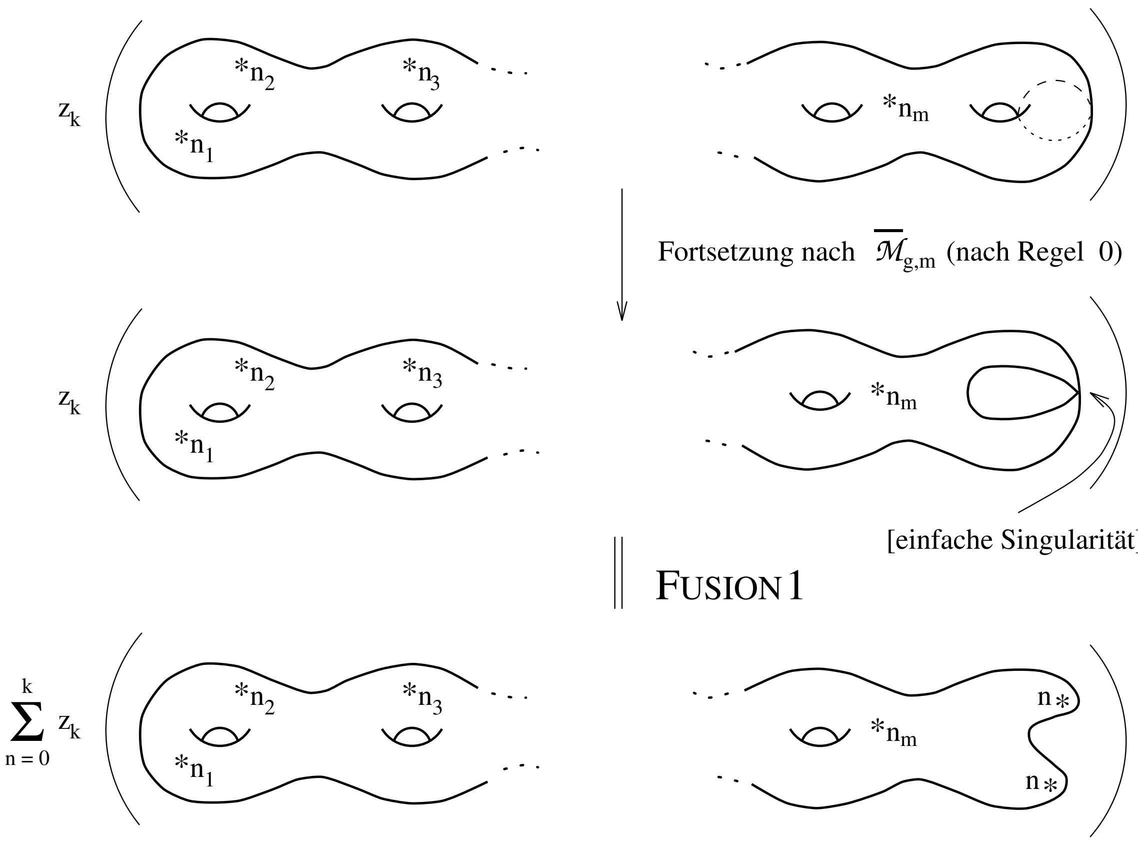

Abbildung 1: Fusionsregel 1

Die Formulierung der Fusionsregeln für $SU(2)$ in Satz 10.7 ist insofern speziell, daß jede Darstellung ρ der Gruppe $SU(2)$ äquivalent zur konjugierten Darstellung ρ^* ist. Im Falle von allgemeineren Gruppen muß beim Auftreten von n, n in den Fusionsregeln eine Darstellung durch die konjugierte ersetzt werden.

Ein Beweis für die Fusionsregeln 1 und 2 in etwa dieser Form findet sich in [NR93] zusammen mit [Ram94].

Selbst in der Situation $P = \emptyset$ ist allein der Beweis der Unabhängigkeit von J in der Regel 0 umfangreich (vgl. [Hit90], [APW91]). Hitchins Methoden übertragen sich mit Hilfe einiger Ergebnisse aus der nichtabelschen Hodge-Theorie auf den Fall $P \neq \emptyset$ ([Sch92], [ScSc95]). Wesentlich dabei ist die Konstruktion eines projektiv flachen Zusammenhangs auf dem Vektorbündel $Z_{g,k}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{g,m}$, dessen Existenz wieder durch Überlegungen aus der konformen Feldtheorie motiviert ist.

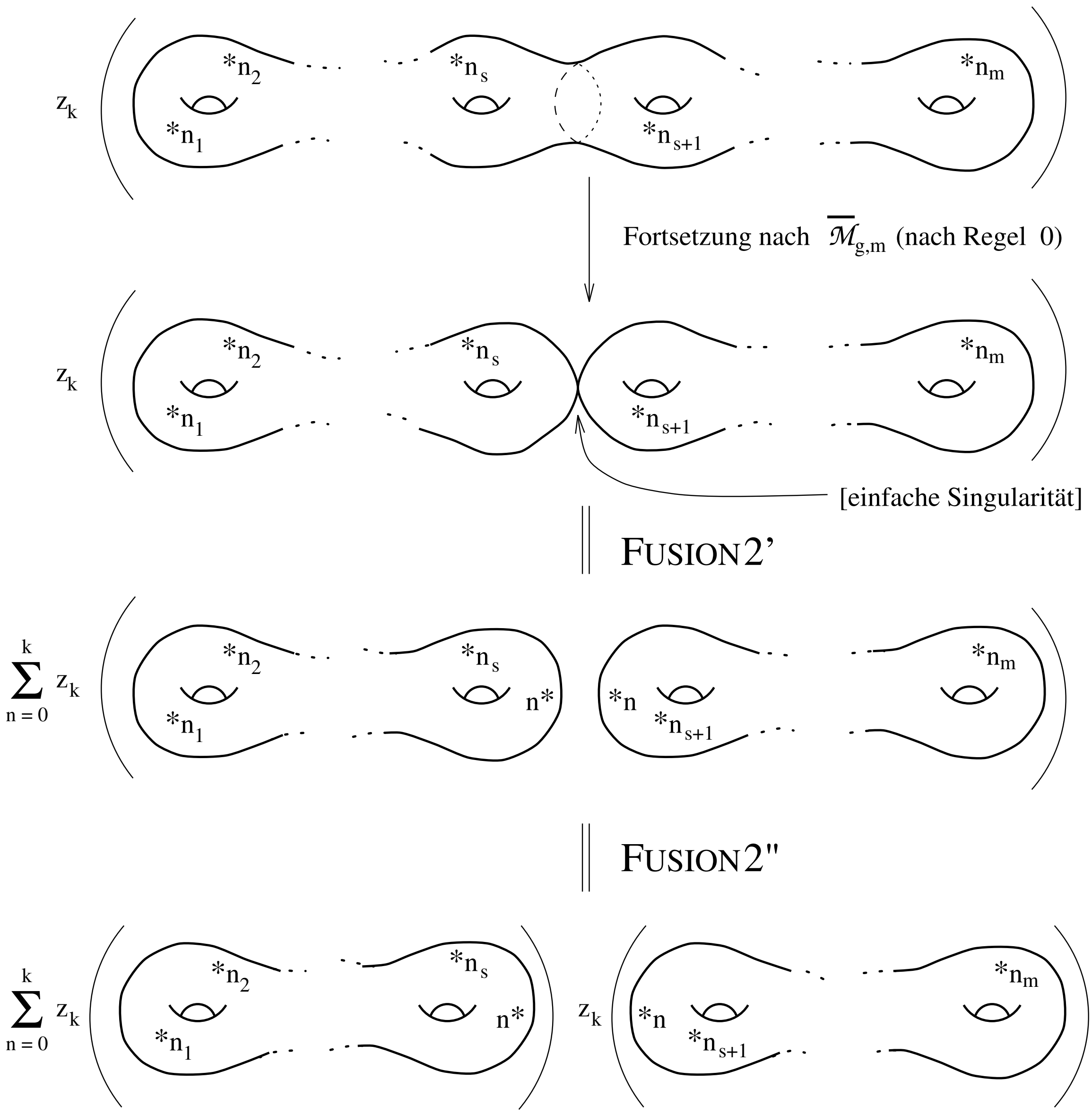

Abbildung 2: Fusionsregel 2 ergibt sich aus der Hintereinanderausführung von 2′ und 2″.

Der Fall $P \neq 0$ hat seine Bedeutung für das Programm von Witten, die Jones-Polynome der Knotentheorie im Rahmen der Quantenfeldtheorie zu beschreiben. Die $Z_{k,g}(R)$ sind in diesem Bild die quantentheoretische Zustandsräume, die mittels Pfadintegration [Wit89] oder über die geometrische Quantisierung [Sch92], [ScSc95] gefunden werden können. Die rigorose Konstruktion der zugehörigen Zustandsvektoren, welche einer kompakten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M mit dekorierten Knoten ("Wilson loops") mit Rand zugeordnet werden müssen, um eine topologische Quantenfeldtheorie zu erhalten, steht noch aus. Es gilt zum Beispiel, einer solchen Mannigfaltigkeit M mit durch $SU(r)$-Darstellungen dekorierten Knoten $K = (K_1, \ldots, K_s)$ und mit dem Rand $\partial M = S_g \cup S'_{g'}$ einen Vektor $Z_k(M,K)$ in $Z_{k,g}(R)^* \otimes Z_{k,g'}(R') \cong \mathrm{Hom}\,(Z_{k,g}(R), Z_{k,g'}(R'))$ zuzuordnen. Dabei sind die Punkte in S_g, $S'_{g'}$ und die Markierungen R, R' durch die Knoten $K_1, \ldots, K_s$, die auch von Rand zu Rand verlaufen können, induziert. Anstelle des ursprünglichen Programms von Witten wurden inzwischen verschiedene leicht abgewandelte Konstruktionen von topologischen Quantenfeldtheorien — zum Teil mit Verwendung von Quantengruppen — durchgeführt, siehe z.B. [Tur94].

10.4 Kombinatorik auf Fusionsringen

Mit Hilfe der Fusionsregeln aus Abschnitt 10.3 läßt sich die Verlinde-Formel zurückführen auf die Bestimmung von $z_k(0; n, m, l)$ für $n, m, l \in \{0, \ldots, k\}$. Diese kombinatorische Reduktion hat eine Algebraisierung, die auch ihre Bedeutung für allgemeinere Gruppen als $SU(r)$ hat (vgl. [Bea94a], [Bea94b], [Sze94]).

Definition 10.8 *F sei ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem ausgezeichneten Element $1 \in F$. Zu jedem $g \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in F$ sei $Z(g)_{v_1,\ldots,v_m} \in \mathbb{C}$ gegeben. $(F, 1, Z)$ heißt dann* Fusionsring, *wenn die folgenden Fusionsregeln erfüllt sind:*

(F1) $Z(g)_{1,\ldots,1} = 1$,

(F2) $Z(g)_{v_1,\ldots,v_m} = Z(g)_{1,v_1,\ldots,v_m}$ *unabhängig von der Anordnung der* $v_1, \ldots, v_m$.

(F3) $v \longrightarrow Z(0)_{v_1,\ldots,v_j,v,v_{j+1},\ldots,v_m}$ *ist $\mathbb{C}$-linear.*

(F4) $(v, w) \longrightarrow Z(0)_{v,w}$ *ist nichtausgeartet.*

Wir verwenden die Notation

$$\int v := Z(0)_v, \quad \langle v, w\rangle := Z(0)_{v,w} \quad \text{und} \quad \eta(v, w, u) := Z(0)_{v,w,u}.$$

Sei $(b_j), (b^j)$ ein Paar von Basen mit $\delta^i_j = \langle b_j, b^i\rangle$. Dann gelten noch die Regeln

(F5) $Z(g)_{v_1,\ldots,v_m} = \sum Z(g-1)_{b_j,b^j,v_1,\ldots,v_m}$, $g \geq 1$ *(Fusion 1).*

(F6) $Z(g+g')_{v_1,\ldots,v_m,v'_1,\ldots,v'_m} = \sum Z(g)_{v_1,\ldots,v_m,b_j} Z(g')_{b^j,v'_1,\ldots,v'_m}$, *(Fusion 2).*

Man sieht leicht:

Lemma 10.9 *Mit dem Produkt $v \cdot w := \sum \eta(v, w, b_j) b^j$ für $v, w \in F$ wird F zu einer kommutativen und assoziativen $\mathbb{C}$-Algebra.*

Lemma 10.10 *Mit* $\alpha := \sum b_j b^j = \sum \eta(b_i, b^i, b_k) b^k \in F$ *gilt die abstrakte Verlinde-Formel*

$$Z(g)_{v_1,\ldots,v_m} = \int \alpha^g v_1 \cdot \ldots \cdot v_m.$$

Beweis. Durch Induktion nach m zeigt man zunächst

$$Z(g)_{v_1,\ldots,v_m} = Z(g)_{v_1\cdot\ldots\cdot v_m}.$$

Der Fall $m = 1$ ist trivial. Für $m \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} Z(g)_{v_1,\ldots,v_m} &= \sum Z(0)_{v_1,v_2,b_j} Z(g)_{b^j,v_3,\ldots,v_m} \quad \text{nach (F6)} \\ &= \sum \eta(v_1, v_2, b_j) Z(g)_{b^j,v_3,\ldots,v_m} = \sum Z(g)_{\eta(v_1,v_2,b_j)b^j,v_3,\ldots,v_m} \quad \text{nach (F3)} \\ &= Z(g)_{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_m} = Z(g)_{v_1\cdot v_2\cdot v_3\cdot\ldots\cdot v_m} \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung.} \end{aligned}$$

Jetzt folgt

$$Z(g)_v = \sum Z(g-1)_{b_j,b^j,v} = Z(g-1)_{\alpha v} = Z(g-2)_{\alpha^2 v} = Z(0)_{\alpha^g v}$$

und damit für $v = v_1 \cdot \ldots \cdot v_m$ die Behauptung. ■

Zur Herleitung der Verlinde-Formel (Satz 10.5) aus den Fusionsregeln mit Hilfe von Lemma 10.10 siehe z.B. [Sze94].

Literatur

[APW91] S. Axelrod, S. Della Pietra, and E. Witten. Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory. *J. Diff. Geom.*, **33**:787–902, 1991.

[Bar54] V. Bargmann. On unitary ray representations of continous groups. *Ann. Math*, **59**:1 – 46, 1954.

[Bar64] V. Bargmann. Note on Wigner's theorem on symmetry operations. *J. Math. Phys.*, **5**:862–868, 1964.

[Bea94a] A. Beauville. Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula. *Preprint*, 1994.

[Bea94b] A. Beauville. Vector bundles on curves and generalized theta functions: Recent results and open problems. *Preprint*, 1994.

[Bot91] R. Bott. Stable bundles revisited. *Surveys in Differential Geometry (Supplement to J. Diff. Geom.)*, **1**:1–18, 1991.

[BPZ84] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, **B241**:333–380, 1984.

[BT93] M. Blau and G. Thompson. Derivation of the Verlinde formula from Chern-Simons theory. *Nuclear Physics*, **B408**:345–390, 1993.

[Car86] J.L. Cardy. Operator content of two-dimensional conformally invariant theories. *Nucl. Phys*, **B270**:186–204, 1986.

[CdG94] F. Constantinescu and H.F. de Groote. *Geometrische und Algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren.* Teubner, Stuttgart, 1994.

[Die69] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis, Volume 10-I.* Academic Press, New York-London, 1969.

[DFN84] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov. *Modern geometry-methods and applications I.* Springer-Verlag, 1984.

[Fal94] G. Faltings. A proof of the Verlinde formula. *J. Alg. Geom.*, **3**:347–374, 1994.

[FFK89] G. Felder, J. Fröhlich, and J. Keller. On the structure of unitary conformal field theory, I. Existence of conformal blocks. *Comm. Math. Phys.*, **124**:417–463, 1989.

[FQS84] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker. Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents. In *Vertex operators in Mathematics and Physics, Eds. Lepowsky et al.*, pages 419–449. Springer Verlag, 1984.

[FQS86] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker. Details of the non-unitary proof for highest weight representations of the Virasoro algebra. *Comm. Math. Phys.*, **107**:535–542, 1986.

[FS87] D. Friedan and S. Shenker. The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory. *Nucl. Phys.*, **B281**:509–545, 1987.

[Gaw89] K. Gawedski. Conformal field theory. *Sém. Bourbaki 1988-89*, Astérisque 177-178(no 704):95–126, 1989.

[GF68] I.M. Gelfand and D.B. Fuks. Cohomology of the Lie algebra of vector fields of a circle. *Funct. Anal. Appl.*, **2**:342–343, 1968.

[Gin89] P. Ginsparg. Introduction to conformal field theory. *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Les Houches 1988, Elsevier, Amsterdam 1989.

[GKO86] P. Goddard, A. Kent, and D. Olive. Unitary representations of the Virasoro and Super-Virasoro algebras. *Comm. Math. Phys.*, **103**:105–119, 1986.

[GO89] P. Goddard and D. Olive. Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum mechanics. *Int. J. Mod. Physics*, **A1**:303 – 414, 1989.

[GSW87] M.B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory, Vol. 1.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[GW85] R. Goodman and N.R. Wallach. Projective unitary positive-energy representations of Diff($\mathbb{S}$). *Funct. Analysis*, **63**:299–321, 1985.

[Hit90] N. Hitchin. Flat connections and geometric quantization. *Comm. Math. Phys.*, **131**:347–380, 1990.

[HN91] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Lie Gruppen und Lie Algebren.* Vieweg, 1991.

[IZ80] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill, 1980.

[Kac80] V. Kac. Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras. In *Proc. Intern. Congress Helsinki*, Acad. Sci. Fenn., pages 299–304, 1980.

[Kak91] M. Kaku. *Strings, Conformal Fields and Topology.* Springer Verlag, 1991.

[KJ88] A.A. Kirillov and D.V. Juriev. Representations of the Virasoro algebra by the orbit method. *J. Geom. Phys.*, **5**:351–363, 1988.

[KNR94] S. Kumar, M.S. Narasimhan, and Ramanathan. Infinite Grassmanians and moduli spaces of G-bundles. *Math. Ann.*, **300**:41-75, 1994.

[KR87] V. Kac and A.K. Raina. *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras.* World Scientific, Singapore, 1987.

[LM76] M. Lüscher and G. Mack. The energy-momentum tensor of critical quantum field theory in 1+1 dimensions. Unpublished Manuscript, 1976.

[LPSA94] R. Langlands, P. Pouliot, and Y. Saint-Aubin. Conformal invariance in two-dimensional percolation. *Bull. AMS*, **30**:1–61, 1994.

[Mil84] J. Milnor. Remarks on infinite-dimensional Lie groups. In *Relativity, Groups and Topology II, Les Houches 1983*, pages 1007–1058. North-Holland, 1984.

[MS80] V. Mehta and C. Seshadri. Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures. *Ann. Math.*, **248**:205–239, 1980.

[MS89] G. Moore and N. Seiberg. Classical and conformal field theory. *Comm. Math. Phys.*, **123**:177–254, 1989.

[MZ55] D. Montgomory and L. Zippin. *Topological Transformation Groups.* Interscience, New York, 1955.

[Nas91] C. Nash. *Differential Topology and Quantum Field Theory.* Academic Press, 1991.

[NR93] M.S. Narasimhan and T. Ramadas. Factorization of generalized theta functions I. *Invent. Math.*, **114**:565–623, 1993.

[NS65] M.S. Narasimhan and C. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemannian surface. *Ann. Math.*, **65**:540–567, 1965.

[OS73] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for euclidean Green's functions I. *Comm. Math. Phys*, **31**:83 ff, 1973.

[OS75] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for euclidean Green's functions II. *Comm. Math. Phys*, **42**:281 ff, 1975.

[Ram94] T. Ramadas. Factorization of generalized theta functions II: The Verlinde formula. *Preprint*, 1994.

[Sch92] P. Scheinost. Metaplectic quantization of the moduli spaces of flat and parabolic bundles. *Dissertation, LMU München*, 1992.

[Sch95] M. Schottenloher. *Geometrie und Symmetrie in der Physik.* Vieweg, 1995.

[ScSc95] P. Scheinost and M. Schottenloher. Metaplectic quantization of the moduli spaces of flat and parabolic bundles. *J. reine angew. Math*, **466**:145-219, 1995.

[Seg88a] G. Segal. The definition of conformal field theory. Unpublished Manuscript, 1988.

[Seg88b] G. Segal. Two dimensional conformal field theories and modular functors. In *Proc. IXth Intern. Congress Math. Phys. Swansea*, pages 22–37, 1988.

[Seg91] G. Segal. Geometric aspects of quantum field theory. *Proc. Intern. Congress Kyoto 1990, Math. Soc. Japan*, pages 1387–1396, 1991.

[Sim68] D. Simms. *Lie Groups and Quantum Mechanics*, volume **52** of *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, 1968.

[Sor95] C. Sorger. La formule de Verlinde. *Preprint*, 1995. (to appear in Sem. Bourbaki, année 1994-95, n° 793)

[Sze94] A. Szenes. The combinatorics of the Verlinde formula. *Preprint*, 1994.

[Tho84] C.B. Thorn. A proof of the no-ghost theorem using the Kac determinant. In *Vertex operators in Mathematics and Physics, Eds. Lepowsky et al.*, pages 411–417. Springer Verlag, 1984.

[TUY89] A. Tsuchiya, K. Ueno, and Y. Yamada. Conformal field theory on the universal family of stable curves with gauge symmetry. in: Conformal field theory and solvable lattice models. *Adv. Stud. Pure Math.*, **16**:297–372, 1989.

[Tur94] V.G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. DeGruyter, 1994.

[Ver88] E. Verlinde. Fusion rules and modular transformations in two-dimensional conformal field theory. *Nucl. Phys.*, **B300**:360–376, 1988.

[Wig31] E. Wigner. *Gruppentheorie*. Vieweg, 1931.

[Wit89] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, **121**:351–399, 1989.

Index