1. Spočtěte derivaci a určete, kde existuje.

   $f(x) = \ln(2+\cos x^2) + \sqrt{\cos x}$.

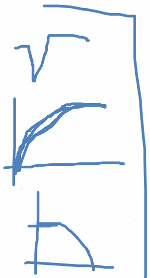
2. Spočtěte pomocí vzorce pro derivaci inverzní funkce derivaci

   $$f(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1,1).$$

5. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{1}{x\cdot(1+x^2)^2}$.

4. Spočtěte (per-partes nejraději) $\int \sin^3 x \, dx$.

1. $f(x)=\ln(2+\cos x^2)+(\cos x)^{\frac{1}{2}}$ $\cos x \geq 0$!



$f'(x) = \frac{1}{2+\cos x^2}(-\sin x^2)(2x) + \frac{1}{2}\frac{(-\sin x)}{\sqrt{\cos x}} = \frac{-4x\sin x^2\sqrt{\cos x} + (-\sin x)(2+\cos x^2)}{2(2+\cos x^2)\sqrt{\cos x}}$. Avšak nyní $\cos x > 0$ navíc, tj.

Celkem $x \in \{(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2. $f(x)=(\cos x)^{\ln x}+\sin(\cos x)$. Určete $f'(x)$ ~~všude~~, kde existuje.
T

Bez def oboru f a f'.

$f'(x) = [e^{\ln(\cos x)\ln x}]' + \cos(\cos x)(-\sin x) =$

$= \left| \; !! \; (\cos x^{\ln x})' \neq \ln x \cos x^{\ln x - 1} \text{ špatně} \quad \text{jako} \quad (e^x)' \neq x e^{x-1} \right| =$

$= \underbrace{e^{\ln(\cos x)\ln x}}_{\cos x^{\ln x}!}(\ln(\cos x)\ln x)' - \cos(\cos x)\sin x =$

$= \cos x^{\ln x}\left[\underbrace{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g} + \underbrace{\ln(\cos x)}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\right] - \sin x \cos(\cos x) =$

$= (\cos x)^{\ln x - 1}\frac{-x\sin x \ln x + \cos x \ln(\cos x)}{x} - \sin x \cos(\cos x).$

3. Určete ze vzorečku pro der. inv. fce. derivaci $f(x)=\sqrt{x}$ a def. obor f', tj. kde všude der. existuje.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, pokud $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Záhada?

Zdůvodnění: $f^{-1}(f(x)) = x \quad /'$

Ne dkaz, nebot nervim, zda f^-1 derivaci vubec ma.

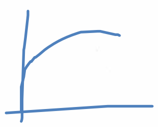
$$(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_{y}) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(\underset{x}{y}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\underset{x}{y}))}.$$

$\sqrt{x^2} = x,\ x \geq 0$

Počítejme: $\sqrt{\ }$ je inv k $x \mapsto x^2$ s derivací $x \mapsto 2x$.

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2x(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\quad \text{Odpovídá } (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$



fce $2x$ — v bodě

Zjevně stačí $x \geq 0 \wedge (x \mapsto x^2)' \neq 0$ $\quad 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Tj. $x > 0$. V nule limita, myslí se zprava, neexistuje jako reálné číslo, tj. vlastní.

opět: $f'(g(x))g'(x) = (f\circ g)'(x)$

4. Svižně $(\ln x)'$: $\underbrace{\ln}_{f}(\underbrace{e^x}_{g}) = x \quad \ln'(e^x)(e^x)' = 1 \Rightarrow$

$$\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x} \Rightarrow \ln'(y) = \frac{1}{y}.$$

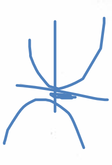
Pak $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Píše se však $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, zde $y = e^x > 0$, tj. také $x > 0$.

4'. Arcsin T.

5. Derivace exist. na $\subsetneq D(f)$.

$f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$; $e^{-x^2} \leq 1$ ok

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-e^{-x^2})^{-\frac{1}{2}}(-e^{-x^2})(-2x) = \frac{+xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}},\quad x \neq 0.$$



$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{h} \overset{a)}{=} \lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{1-e^{-h^2}}{h^2}} =$$

zdef.

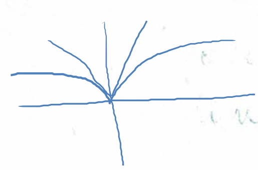
$$= \lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{e^{-h^2}-1}{-h^2}} \underset{\text{VOS}}{=} \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{e^x-1}{x}} = 1$$

b) $\lim_{h\to 0^-} -\sqrt{\frac{1-e^{-h^2}}{(-h)^2}} = \dots = -1$ prověřte

$\forall$ mimo nulu

! Ještě srovnat $f(x) = \sqrt{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x^4}$ či $\sqrt{x^3}$. $\to \exists f' \ \forall$



6. $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$, $\cos 2x \le 1$, OK. $D_f=\mathbb{R}$.   DER zprava ex. na větším.

$f'(x)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}(-1)(-\sin 2x)2 = \sin 2x(1-\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}$.

Nyní $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Zkusme aspoň derivaci v $x=0$ zprava či zleva

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2h}}{h} \overset{a)}{=} \lim_{h\to 0^+} 2\sqrt{\frac{1-\cos 2h}{(2h)^2}}=$

$=2\sqrt{\frac{1}{2}}$ | b) $\lim_{h\to 0^-} -2\sqrt{\frac{1-\cos 2h}{(2h)^2}} = -2\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sgn}|\sin x|\cos x$, kde sgn 0 „nyní" NEDEFINUJI.

7. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Určete $f'(x)$ a $D_{f'}$. DÚ odevzdat za 14 dní.

Kap. Primitivní funkce

- K f hledáme F, že $F'=f$.
- Př.: pro $f(x)=x$ ... $F=x^2$? $F'=2x$ ne (skoro)
  $F=\frac{1}{2}x^2$ $F'=\frac{1}{2}2x=x$; ano!
- Nejedn.: i $\frac{1}{2}x^2+5$ ... Píšeme $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Metody: 1. Tabulka (díky derivování a tabulka pro der...)

$\int cf = c\int f$

2. Per-partes

3. Parciální zlomky

4. Substituce

Leibnizův vzorec: $(fg)' = f'g + fg'$ $\Rightarrow$ $\int f'g = fg - \int fg'$ 5

NEBO $\int fg' = fg - \int f'g$ (mírně užitečnější, ale jedno).

Př.: $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\cos x}\, dx = x\sin x - \int \underset{f'}{1} \underset{g}{\sin x}\, dx = x\sin x + \cos x + C$

$f' = 1$ $g = \sin x$

Př.: $\int \underset{f}{x^2} \underset{g'}{\sin x}\, dx = -x^2\cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2\cos x +$

$g = -\cos x$, $f' = 2x$ | $+ 2\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\cos x}\, dx =$ $g = \sin x$

$= -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x +$

$+ 2\cos x + C.$

Kontrola: Derivace!! $(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x)' =$

$= -2x\cancel{\cos x} + x^2\sin x + 2\cancel{\sin x} + 2x\cancel{\cos x} - 2\cancel{\sin x} =$

$= x^2\sin x$

Sami spočtěte: $\int x e^{-x}\, dx$.

Jiný typ (Lépe otočit a zkusit logaritmus, pak arctg)

Př.: $\int \operatorname{arctg} x\, dx = \int \underset{g'}{1}\, \underset{f}{\operatorname{arctg} x} = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx =$

$f' = \frac{1}{1+x^2}$

$g = x$, ale f' snadné!

$= x\operatorname{arctg} x - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx}_{} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left[\ln(1+x^2)\right]' dx \overset{*)}{=}$

$\int \frac{f'}{f}\, dx = \ln|f| + C$ $\Leftarrow$ toto seznáme později automaticky

$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

*) $F' = f = g' \Rightarrow F = g + C \ldots$

SNADNÉ: $\int$ a ' jsou INV.

Př.: $\int \sin^3 x \, dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{f} \, \underbrace{\sin x}_{g'} \, dx = \left| \begin{array}{l} f' = 2\sin x \cos x \\ g = -\cos x \end{array} \right|$

$= -\sin^2 x \cos x + \int 2 \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\cos^2 x}_{g} \, dx$

a) $-\sin^2 x \cos x + 2\left[-\cos^3 x - \int \cos x \, 2 \cos x \sin x \, dx\right]$

Celkem porovnáním: $\int \sin x \cos^2 x = -\cos^3 x - 2\int \cos^2 x \sin x \, dx + C$

$\Rightarrow \int \sin x \cos^2 x = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{C}{3}$, může stále psát C.

Tj. $\int \sin^3 x \, dx = -\sin^2 x \cos x - 2\cos^3 x + 2\frac{\cos^3 x}{3} + C = -\sin^2 x \cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x + C$

b) nebo: $-\sin^2 x \cos x + 2\int \sin x (1 - \sin^2 x) \, dx =$

$= -\sin^2 x \cos x + 2\int \sin x \, dx - 2\int \sin^3 x \, dx$.

Porovnáním: $3\int \sin^3 x = -\sin^2 x \cos x - 2\cos x \Rightarrow$

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$$

Př.: Spočtěte $\int \ln x \, dx$ per partes rozložením (vracíme se zpět)

- $\int \underset{f}{1} \, \underset{g'}{\ln x} \, dx = 1\left(\int \ln x \, dx\right) - \int \left[0 \int \ln x\right] dx \to$ nic.
- $\int \underset{g'}{1} \, \underset{f}{\ln x} \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$

Sice $g = x$ je „složitější" než 1, ale f' „extrémně" jednoduché.

Př.: $\int \cos^4 x \, dx$ DÚ za 14 dní (2. příklad).

Rozklad na parciální zlomky

$\deg S < \deg T$: $=t$

$$\frac{S(x)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{A_i^l}{(x-a_i)^l} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{B_j^k + C_j^k x}{(x^2+p_j x+q_j)^k}$$

reálná a_i

kořeny $\notin \mathbb{R}$

$\boxed{\text{NEBO}}$

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{\tilde{A}_i^l}{(x-a_i)^l} \qquad a_i \in \mathbb{C} \text{ (jednotlivě } \forall \text{ kořeny)}$$

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = t$$

pak sečtu na „kv. výrazy“

Pokud stupen S >= stupen T, pouzijeme algoritm. na d lení. Ziskame podil (polynom P) a zbytek R. Integrujeme polynom P a rac. lomenou R/T, kde uz stupen R< stupen T.

V popisu postupu pro integrovani budeme uva~ovat druhy rozklad.

1) NejdYíve integrujeme zlomky se jmenovateli s reálnými koYeny (vede na logaritmy pro l = 1 a na reciproke mocniny jmenovatelu s pYísl. koeficientem pro l>1, napY.:
int 1/(x-3)^{3} dx = (1/-2) 1/(x-3)^{2} + C.

2) Pak pYejdeme ke komplexním koYenom: KoYeny vystupují v párech navzájem komplexn sdru~ených ísel (plyne z realnosti koeficientu rac. lom. fce), napY. 2 + i a 2 - i.
NejdYíve stejné mocniny se vzáejmn sdru~enými koYeny dáme k sob :

napY. i / [x - (2 + 3i)]^l + -i/ [x - (2- 3i)]^l - koYeny vzájemn sdru~ené a mocniny stejné

i) Pro l > 1 integrujeme ka~dý len dvojice jako dYíve [na reciproke mocniny jmenovatele vynásobené koef. 1/(-n+1)] a pak integrály se teme. Musime dostat racionalni lomenou fci s realnymi koeficienty.
To je zkouska. //To, ze tak muzeme postupovat jsme diskutovali vicekrat na cviceni. Muzeme totiz spocitat derivaci (x-a_i)^n také pro komplexni a_i, a to z definice derivace, kde pouzijeme binomickou vetu (a+b)^n = a^n + na^n-1 b +... + nab^n-1 + b^n. pro a = x a b = - a_i komplexni íslo (v jejim dukazu se nic o realnosti a ani b nepouzilo): prislusne cleny se odectou a vydeleni h (v derivaci) projde. //

ii) Pro l = 1 nejdYív se teme a pak integrujeme, o tom dale.

3) Jediný problémem je tedy získání koeficiento A_i^l (s vlnkou) u mocnin v rozkladu. Základní metody jsou tYi: zakrývací, neur ité koeficienty a eventualne "tipnutí". První dv fungují v~dy - ty se musíme pYi >>procvi ování se<< nau it. A~ to zvládneme, pYistupujeme k jejich modifikacím, nebo k tipnutí.
Je nutné si vytvoYit jistotu, ~e pYíklady zvládneme. Jsou toti~ Yeaitelné algoritmicky.

4) Hledání koYeno: v principu slo~ité. Pro stupeH jmenovatele 1 nebo 2 umíte ze stYední akoly. Pro vyaaí tipuji koYeny (zkouaím typicky 1,0,-1), nebo je n kdo sd lí a pak d lím polynom výrazy (x-a_i), kde a_i je pYísl. koYen. Lepe to vice mene nejde a pro prvni semestry je to dostacujici.

Př.: $\dfrac{5x-4}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} \;\Big/ \overset{a)}{(x+1)} \;\Big/ \overset{b)}{x-2}$

a) $\dfrac{5x-4}{x-2} = A + B\dfrac{x+1}{x-2} \;\Big/\; x := -1$

$-\dfrac{9}{-3} = 3 = A + B\cdot 0 \Rightarrow A = 3$

b) $\dfrac{5x-4}{x+1} = \dfrac{A(x-2)}{x+1} + B \;\Big/\; x := 2$

$\dfrac{6}{3} = 2 = B$

c) „Rychle" $\dfrac{5\cdot(-1)-4}{-3} = 3 = A \;\Big|\; \dfrac{5\cdot(+2)-4}{+2+1} = \dfrac{6}{3} = 2 = B$

Počítám-li (koef.) u $x+1$, zakrývám $x+1$ vlevo a dosazuji kořen $x+1$. Počítám-li koef. u $x-2$, zakrývám $x-2$ vlevo a dosazuji 2.

písmenka „nekorespondují" světoví o rozkl.: mnoho lidem

Př.: $\dfrac{5x-4}{(x^2-x-2)(x+1)} = \dfrac{5x-4}{(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x-2}$

Začnu s B! Jinak obtíž. ukážeme.
nebo s C

1. Např. s C (zakrývám): $\dfrac{5\cdot 2-4}{3^2} = C = \dfrac{2}{3}$

2. Teď bych měl postupovat od B k A. Zkusme špatně naopak: Zakrývání ~ násobení & dosazení: Vynásobím $x+1$: $\dfrac{5x-4}{(x+1)(x-2)} = A + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-2}$.

Nelze dosadit $(x=-1)$. Vynásobím $(x+1)^2$,

$\dfrac{5x-4}{x-2} = A(x+1) + B + \dfrac{C(x+1)^2}{x-2}$. Lze, ale nedostanu A. Dostanu B. Začneme tedy od B (znovu, byť i nyní B bychom spočetli).

Zakrývání: $B = \frac{5\cdot(-1)-4}{-3} = \underline{\underline{3}}$. Mám! Ale A

stále obtížné. Vynásobím-li $(x+1)^2$ a dosadím $(x=-1)$,

opět $A \cdot 0 = \dots$. Proto odetu

$$\frac{5x-4}{(x+1)^2(x-2)} - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{5x-4-3(x-2)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{2x+2}{(x+1)^2(x-2)} =$$

$$= \frac{2}{(x+1)(x-2)}$$. Vykrácení je zároveň kontrola správnosti odečítání. (Více intuice: teorie komplexních fcí.) ~ 4. sem.

$$\frac{2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \dots \Rightarrow A = \frac{2}{-1-2} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}.$$

Př.: $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$. Rozložte na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

1. C : $\frac{-2}{(-2-1)^2} = \frac{-2}{9}$

2. B! : $B = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

3. A : $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1/3}{(x-1)^2} = \frac{x - 1/3(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{(x-1)^2(x+2)}$

$$= \frac{2/3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{C(=-\frac{2}{9})}{x+2}$$ (Lze už násobit ... a hlavně něco získat!)

vykrácení!

$$\frac{2/3}{1+2} = \frac{2}{9} = A$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{2}{9}}{(x+2)}$$

!?

Mozny k zlepsovak k odcitani pro vypocet A: po spocteni B a C zjistim A dosazenim za x do leve i prave strany cislo, jez neni korenem, napr. x = -1. Lze i v predchozim pr., x = 1.

Př.: Stejný princip, ale „trápení" s kplx-čísly. (komplx. čísla jsou „fun", Freude ...)

Rozložte na parciální zlomky: $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ (ničíme

číslé $\frac{1}{(x-z_i)^l}$ i nekvadratické.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+i} + \frac{C}{(x+i)^2} + \frac{D}{x-i} + \frac{E}{(x-i)^2}.$$

$x^2+1=0$

$x=\pm i$

(1. hodina)

- $A = \frac{1}{1^2} = 1$ ✓
- $C = \frac{1}{-i(-i-i)^2} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$ $\overset{\text{teorie}}{\Longrightarrow}$ $E = \overline{-\frac{i}{4}} = \frac{i}{4}$

→ B, D odečtení! D netřeba, neb (teorie) $D = \overline{B}$.

- $$\frac{1}{x(x^2+1)^2} - \frac{+i/4}{(x+i)^2} = \frac{1 + i/4\, x(x-i)^2}{x(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{i}{4}x(x^2-2ix-1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{\frac{i}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{i}{4}x + 1}{x(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{ix^3+2x^2-ix+4}{4x(x^2+1)^2} = \frac{ix^2+3x-4i}{4x(x-i)^2(x+i)} = \frac{B}{x+i} + \frac{D}{x-i} + \dots$$

$$(ix^3+2x^2-ix+4) : (x+i) = ix^2+3x-4i$$
$$\begin{array}{l} -(ix^3 - x^2) \\ \hline \quad 3x^2 - ix + 4 \\ \quad -(3x^2+3ix) \\ \hline \qquad -4ix+4 \\ \qquad -(-4ix+4) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$B = \frac{i(-i)^2 - 3i - 4i}{4(-i)(-i-i)^2} = \frac{-i-3i-4i}{-4i\,4(-1)} = \frac{-8i}{16i} = -\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ teorie $\quad D = \overline{B} = -\frac{1}{2}$.

Opet D (nebo B) muzu dostat dosazenim "nekorene", napr. opet x=1. V prip. kplx cisel je dosazeni doporucene.

$$\frac{A}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+i} + \frac{-\frac{i}{4}}{(x+i)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{i}{4}}{(x+i)^2} .$$

Integrovaní parc. zlomků ($z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; jinak snadné).

$\boxed{\ell > 1}$: $\frac{A}{(x-z)^\ell} + \frac{\overline{A}}{(x-\overline{z})^\ell}$;

$$\int \frac{A\,dx}{(x-z)^\ell} + \int \frac{\overline{A}\,dx}{(x-\overline{z})^\ell} = \frac{A(x-z)^{-\ell+1}}{-\ell+1} + \frac{\overline{A}(x-\overline{z})^{-\ell+1}}{-\ell+1} \left(= \frac{1}{1-\ell}\left[\frac{A(x-\overline{z})^{\ell-1} + \overline{A}(x-z)^{\ell-1}}{[\underbrace{(x-z)(x-\overline{z})}]^{\ell+1}}\right] \right.$$

Čitatel také: $\alpha + \overline{\alpha}$ je reálné $\xrightarrow{\text{reálné}} \left.(\alpha = A(x-\overline{z})^{\ell-1})\right)$

$\boxed{\ell = 1}$.

$$\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i} : \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int [\ln(x^2+1)]'\,dx = \ln(x^2+1) + C.$$

Pro "slozitejsi" koeny, stale ale myslime z C\R, muze byt citatel i jmenovatel složitjši. Uvazme koreny 1+i a 1 - i(vime, ze vy

Dostavame tedy (opet integr. log. derivace) ln|x^2-2x+2| +C a integral, ktery povede na arctan.
Arctan ziskame: upravou jmenovatele na ctverec a dalsimi jednou az dvema std. lineranimi substitucemi.
Viz priste: 9_cviceni.pdf .

Tim v principu umime integrovat prisl. casti. parcialnich zlomku.