

Úlohy k opakování:

0.

1. Dokažte $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

2. $A, B \subseteq X$. Pak $A \subseteq B \Leftrightarrow X \setminus A \supseteq X \setminus B$.

3. $\forall A, B, C$ množin: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

4. $A, B \subseteq X$. Pak $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq X \setminus B (\Leftrightarrow B \subseteq X \setminus A)$

1. 3 dělí $2^{2n+1} + 1$, $2^{2n+1} + 1$ dělitelné 3. Dokažte.

2. $n^{n+1} > (n+1)^n \quad \forall n \geq 3$, dokažte

1. $\sup, \inf, \min, \max$ z $M = \{0,5; 0,55; 0,555; \dots\}$
4 ③ ① ②

2. (d.c.v.) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$. Dokažte $\sup M$ není racionální.

Smíte použít: (a,b) , $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ obsahuje racion. číslo.

1. De Morganovo pravidlo: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$. (A) MWOŽ/AY 1.

Dk.: a) $\neg(A \vee B)$ platí, právě tehdy když (ptk) $A \vee B$ neplatí, což nastane ptk oba neplatí ($\neg A \wedge \neg B$ platí), ušet' platil-li by jeden, platil by i $A \vee B$.

Tabulkové ověření, že $A \vee B$ neplatí, ptk $\neg A \wedge \neg B$ platí:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

sloupec "dobudavna"

b) Jen tabulkové ověření:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

1. Analogie de Morganovo pravidlo: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

2. Dokažte: $A, B \subseteq X$. Pak $A \subseteq B \Leftrightarrow X \setminus A \supseteq X \setminus B$. (Rozli' obrací implikaci.)

1. Dk.: 1. Necht' $A \subseteq B$ (*). Chceme $X \setminus B \subseteq X \setminus A$. Necht' $x \in X \setminus B \Rightarrow x \in X \wedge x \notin B$. Pak nutně $x \notin A$.

Sporum. Kdyby $x \in A$, tak podle (*): $x \in B$. Spor.

2. Necht' $X \setminus B \subseteq X \setminus A$ (**). Chceme: $A \subseteq B$. Necht' $x \in A$. Kdyby $x \notin B$, tak ale $x \in X \setminus A$ podle (**), To je spor s $x \in A$. Tedy $x \in B$. Celkem $A \subseteq B$.

2. Dk. (oboji' najednou). Použijeme $a \Rightarrow b \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$

(princip nepřímého důkazu).

dokonce $\Leftrightarrow$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \in A \Rightarrow x \in B) \stackrel{\text{dokonce}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)(x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

$$X \setminus B \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \notin B \Rightarrow x \notin A), \text{ což je blíž!}$$

③ $\forall A, B, C$ množiny platí $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Dk.: $x \in C \setminus A \cap B \iff x \in C \wedge x \notin A \cap B \iff$

$$x \in C \wedge \neg(x \in A \cap B) \iff x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\stackrel{\text{de Morg.}}{\iff} x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \stackrel{\text{distr.}}{\iff}$$

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \stackrel{\text{def } \cup}{\iff}$$

$$x \in C \setminus A \vee x \in C \setminus B \iff x \in C \setminus A \cup C \setminus B. \quad \square$$

④ $A, B \subseteq X$. Pak $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq X \setminus B (\iff B \subseteq X \setminus A)$.

1. Dk.: a) $A \cap B = \emptyset$ (předpokládáme). Pakud $x \in A$, chceme

dokázat, že $x \notin B$. Dle bodu 4 je $X \setminus A \cap B =$

$$X \setminus A \cup X \setminus B. \text{ Protože } A \cap B = \emptyset, \text{ je } X = X \setminus A \cup X \setminus B$$

Protože $A \subseteq X$, je $\forall x \in X$, ať $x \in X \setminus A$ nebo $x \in X \setminus B$ (def. sjed.). Jelikož $x \notin X \setminus A$, je

nutně $x \in X \setminus B$, tj. $x \notin B$. Celkem $A \subseteq X \setminus B$.

Podobně $B \subseteq X \setminus A$.

b) Předpokládej $A \subseteq X \setminus B$. Sporem. Předpokládáme (ž)

$\exists x \in A \cap B$. Odtud $x \in A$. Dle předpokladu (*)

je $x \in X \setminus B$, tj. $x \notin B$. To je spor.

Pozn.: Bod b) dokazujeme sporem. Nepřímý důkaz, tj. $A \Rightarrow B$ dokazují pomocí $\neg B \Rightarrow \neg A$, je "úložiště" z $\exists x \in A \cap B$ bych chtěl $A \not\subseteq X \setminus B$, tj. $\exists a \in A$, jež $\notin X \setminus B$.

2. Dk. (dokazujeme " $\Leftarrow$ " bez použití bodu 4).

$A, B \subseteq X$. a) Předpokládám: $A \cap B = \emptyset$. Necht' $x \in A$.

Pak $x \in X$ ($A \subseteq X$). Kdyby $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \nRightarrow (A \cap B = \emptyset)$.

Tj. $x \notin B$ a $x \in X \setminus B$.

b) Předpokládám: $A \subseteq X \setminus B$. Necht' pro spor $x \in A \cap B$.

Pak $x \in A$.

$x \in X \setminus B$, tj. $x \notin B \nRightarrow$ spor s $x \in A \cap B$.

③ Zpět k njrokům opřir. čísel 3.

①. Dokažte, že $2^{2n+1} + 1$ je dělitelné 3 pro každé $n \geq 1$.
(Píšeme $3 \mid 2^{2n+1} + 1$.)

Dk.: 1) $n=1$: $3 \mid 2^3 + 1 = 9$, ano.

2) Pp. $V(n)$: $3 \mid 2^{2n+1} + 1$ (ind. pp.), tj. $2^{2n+1} + 1 = 3k$,

$k \in \mathbb{N}$. Chceme $V(n+1)$, tj. $3 \mid 2^{2(n+1)+1} + 1$.

Píšeme: $2^{2(n+1)+1} + 1 = 2^{2n+3} + 1 = 2^2 \cdot 2^{2n+1} + 1 =$

$= 4(3k-1) + 1 = 12k - 3 = 3(4k-1)$, tj.

$2^{2(n+1)+1}$ je také dělitelné 3. □

②. $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geq 3$.

1) $n=3$: $3^4 = 81 > 64 = 4^3$ ✓

2) Pp. $V(n)$: $n^{n+1} > (n+1)^n$

Chceme $V(n+1)$: $(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$.

Ne: $(n+1)^{n+2} = (n+1)^n (n+1)^2 \leq \underbrace{n^{n+1}}_{\text{Ale my chceme } (n+1)^{n+2} \geq} (n+1)^2$

Ne: $\bullet$ Nakreslíme $(n+2)$ pomocí $(n+1)$, tj. např.

$$(n+2)^{n+1} = (n+1+1)^{n+1} \stackrel{\text{bin.}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} (n+1)^k \binom{n+1}{k} \quad \text{Ale } \frac{n+1}{0!} =$$

$$\sum_{k=0}^n (n+1)^k \binom{n+1}{k} + (n+1)^{n+1} \leq \quad \text{dále vřel}$$

složité.

Ne: $\bullet$ Nakreslíme $n+1$ pomocí n , tj.

$$(n+1)^{n+2} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n+2} n^k \binom{n+2}{k} \dots \stackrel{?}{\geq} \sum_{k=0}^n (n+1)^k \quad \text{ALE OPĚT OPACNÁ NEROVNOST}$$

• Zkusme vše na jednu stranu:

Ano:

$$\text{ind. pp.: } \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < 1, \text{ tj. } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < 1.$$

$$\text{Chceme: } \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} < 1, \text{ tj. } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n+1} <$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \underset{\text{ind. pp.}}{<} 1 \quad \cdot \square$$

③ Suprema a infima

Zpět k sup. a inf. : supremum (superior) : horní závora nejmenší
 $\exists x_0 \in M$
 $x_0 > \sup M - \varepsilon$

infimum (inferior) : dolní závora největší
 $\exists x_0 \in M$
 $x_0 < \inf M + \varepsilon$

Pozn.: Největší horní závora (a analog. nejmenší dolní závora) nemá příslušný smysl. [$M = (a, b)$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. $\sup M = ?$ $\forall c > b$ je c horní závora. Největší zjevně neexistuje. (Vždy najdeme větší, $c+1$.)]

① Pr.: $M = \{0,5; 0,55; 0,555; \dots\}$. Určete $\min M, \max M$, $\inf M$ a $\sup M$.

② 1) $\min M = 0,5$. Zřejmě $0,5 \leq 0, \underbrace{5 \dots 5}_{n\text{-krát}}$, tj. žádný člen $z M$ není menší.

2) $\max M$ neexistuje. Sporem. Necht' existuje, označ jej $\underline{a}$. Z def max. $a \in M$, tj. $a = 0, \underbrace{5 \dots 5}_{n\text{-krát}}$.

Vezmi $b = 0, \underbrace{5 \dots 55}_{(n+1)\text{-krát}}$. Zjevně $b \in M$ a $b > a, t_j$. 5.

a nem' maximum.

3) inf $M = 0,5$. Existuje-li min, je rovno inf. Obecně
fakt (Neslo: min nemusí ex, ale inf ano. Analogicky
pro supremum.)

4) Tvrdíme $\sup M = 0, \overline{5}$. (Všimni
se, že $\sup M \notin M$.) 1. $0, \underbrace{5 \dots 5}_{n\text{-krát}} \leq 0, \overline{5}$ ✓

2. Bud' $\varepsilon > 0$. Zkoumej $0, \overline{5} - \varepsilon$.
Pokud $0, \overline{5} - \varepsilon \leq 0$, tak $\forall x$ platí $x > 0, \overline{5} - \varepsilon$
Pokud $0, \overline{5} - \varepsilon > 0$, v $0, \overline{5} - \varepsilon$ se změnila číslice
oproti $0, \overline{5}$. Vezmi první změněnou číslici /
Označ ji b : $0, \overline{5} - \varepsilon = 0, \underbrace{5 \dots 5 b \dots}_{n \text{ číslic}}$.

Je nutně $b < 5$. Vezmi $x = 0, \underbrace{5 \dots 55}_{n \text{ číslic}}$.

Pak $x > 0, \overline{5} - \varepsilon$. Tj. i 2. vlastnost suprema
je splněna.

⑥ Lze křivku přistoupit i jinak, a sice popsat
číslo π bez deset. zápisu.

Zjevně $a_n = 0,5 + 0, \underline{05} + 0,005 + \dots + 0, \underbrace{0 \dots 05}_{n \text{ číslic}} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 5 \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{9} =$$

$\frac{5}{9}(1 - 10^{-n})$. Jen min a sup.

$$1) \min M = \frac{1}{2}, \text{ neboť } \frac{1}{2} \leq \frac{5}{9} (1 - 10^{-n}) \Leftrightarrow 9 \leq 10(1 - 10^{-n}) \Leftrightarrow 10^{-n+1} \leq 1, \text{ což platí } \forall n \geq 1. \quad 6.$$

$$2) \sup M = 0, \overline{5}. \quad a) \forall x \in M \quad x < 0, \overline{5} \quad \wedge$$

Je potřeba dokázat: $b) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M \quad x > 0, \overline{5} - \varepsilon.$

Pro to spočítáme (bez použití des. čárek) číslo $0, \overline{5}$.

Označ $c = 0, \overline{5}$. Pak $10c = 5, \overline{5} / - 0, \overline{5} (= -c)$

$$9c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{9}.$$

Nyní: a) $\frac{5}{9} (1 - 10^{-n}) \leq \frac{5}{9} ?$ Zjevně ano: $0 < 1 - 10^{-n} < 1.$

b) $\exists x > 0, \overline{5} - \varepsilon$ i tj. $\frac{5}{9} (1 - 10^{-n}) > \frac{5}{9} - \varepsilon \quad \exists n ?$

$$5 - 5 \cdot 10^{-n} \geq 5 - 9\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \geq \frac{5}{9} \cdot 10^{-n} / \log$$

$$\log \frac{9}{5} \varepsilon \geq -n \Leftrightarrow n \geq -\log \left(\frac{9}{5} \varepsilon \right). \text{ Ale } \forall \varepsilon \exists$$

n přirozené a větší nebo rovno z . □

② Dokážte $\sup \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3 \} \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ = množina všech racionálních čísel. Snažte použít, že každá interval (a, b) , $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ obsahuje aspoň jedno racionální. (d.e.v.)

Opakují $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ racionální

$\mathbb{R}$ reálná

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\})$$

D) Definice limity a první příklady

7

Uvědomme si, jako už víchrať, že $|x-a| < c$ značí



od a o méně než c , h. $x \in (a-c, a+c)$.

Nechť $A \in \mathbb{R}$. Definujme: *

Def. Řekn, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon.$$

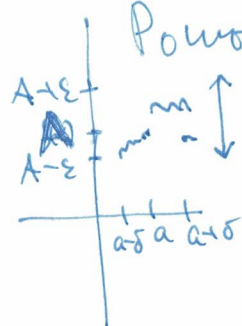
Pozn.: 1. f předpokládám, že je definována na nějakém

$$(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

tr. prstencovém okolí.

2. f nemusí být def. pro $x=a$ ($0 \neq |a-a|=0$)

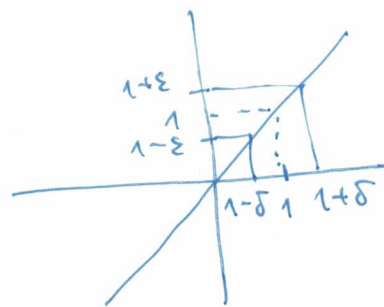
Použití intervalů:



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \text{ je } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

"Pro dosti malá prstencová okolí a je f ~~libo~~ blízko A ."

Př.: $f(x)=x \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=1$

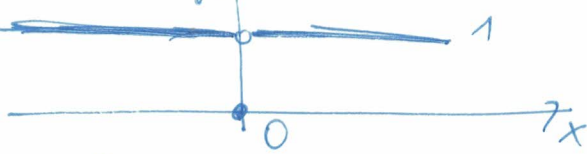


Proč $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $\forall x \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}$ je
 $f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$?

Jestli přepíšeme: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}$
je $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Ted' snadné: Pro lib
 ε zvol $\delta = \varepsilon$. (Mohl zvolit i $\delta = \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{3}, \dots$)

Mám: $\forall x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \setminus \{1\}$ je $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

* Case $A \in \mathbb{C}$ a $A = \pm \infty$.

Př.: $f(x) =$  δ . Formální přese

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

Trdíme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

a) f je def. všude (na $\mathbb{R}$), spec. i na prstencovém okolí 0.

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta ? \quad x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

Auťak $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) = 1$, tj.

$$f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \quad \forall \varepsilon.$$

Zde tedy můžeme δ vzít libovolně (kladně) a docílíme toho, že f na $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ je v $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ (nebo je = 1).

Věta: Necht' existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a je reálné a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a je reálné. Pak

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3) Je-li navíc $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Důležitá lemma: $f = h$ na prstencovém okolí a a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ a je rovné $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Př.: $a \in \mathbb{R}$. Spočti $\lim_{x \rightarrow a} x^n$.
 $a, n \in \mathbb{N}$

Dle aritm. limit: $\lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_{n\text{-krát}} = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} x$,
 VOAL
 jeden z

pokud $\lim_{x \rightarrow a} x$ existuje. Obdobně jako v předchozích

příkladech ($\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$) zjistím, že $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. Tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}} = a^n.$$

Př.: Vypočti $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)}$. VOAL nelze použít, protože

$$\lim_{x \rightarrow -1} x(x+1) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x) \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} x = (-1)^2 + (-1) = 0$$

! ("Nesmím dělit nulou.")

"Trik" zkrácením a použití lemmatu:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{(x+1)}{x} \quad \forall x \neq 0, -1.$$

Je tedy $f = h$ na $(-1 - \delta, -1 + \delta) \setminus \{-1\}$.
 prstenc. okolí -1

$$\text{Proto } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{-1+1}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow -1} x},$$

pokud $\lim_{x \rightarrow -1} x \neq 0$.

Př.: Vypočti $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x-1)}$. VOAL
 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + 2) = (-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$
 $= \frac{1 - 2 + 2}{2} = \frac{1}{2}$ (lim c = c ... suadue!)