D.cv. z minula:

Př.: $\exists a\in\mathbb{R}\ \forall \varepsilon>0\ \forall \alpha\in\mathbb{R}\ \exists x\in(a,a+\varepsilon):\ x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-\alpha|<1$. **Řešení:**

Co to znamená? Existuje číslo ($\underline{a}$), ~~exi~~ že pro všechny $\varepsilon>0$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: x je od a o méně než epsilon $\Rightarrow$ x je od α o méně než 1. Není náhodou x u a & x u libovolné (jiného) čísla? To se zdá, že neplatí. Chceme to dokázat.

Připomeň negaci: $\neg\forall x\ V(x)\Leftrightarrow\exists x\neg V(x)$

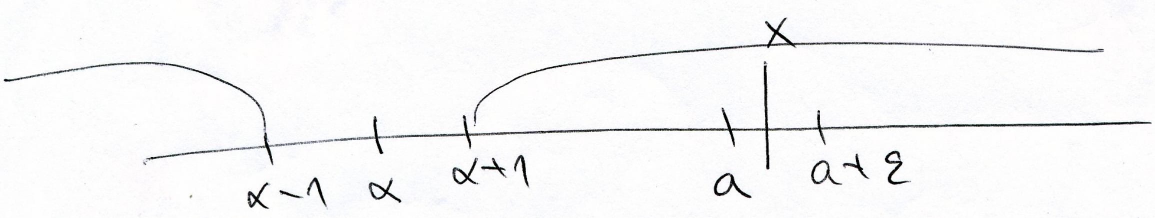
$\neg\exists x\ V(x)\Leftrightarrow\forall x\neg V(x)$

$$\neg\forall x\exists y\ V(x,y)\Leftrightarrow\neg\forall x\,(\exists y\ V(x,y))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists x\neg\exists y\ V(x,y)\Leftrightarrow\exists x\forall y\neg V(x,y),$$

tj. obracíme kvantifikátory a negaci píšeme k výrokové formuli. Chceme tedy dokázat:

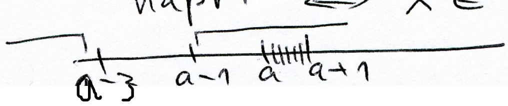
$$\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall x\in(a,a+\varepsilon):\ x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow\neg x\in(\alpha-1,\alpha+1)\Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow\neg|x-\alpha|<1$, tj. $x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus(\alpha-1,\alpha+1)$.

$\Leftrightarrow x\notin(\alpha-1,\alpha+1)$



Stačí $\alpha+1<a$ a je to". Formálně

$\exists\varepsilon=1$, $\exists\alpha=a-2$ např. " $\forall x\in(a,a+1): x\in(a,a+1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus(a-3,a-1)$



↯

Zpět k množinám: Viděli jsme, že množinové rovnosti lze dokazovat pomocí ekvivalence ($\Leftrightarrow$) z logiky. Připomeňme ještě: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. ①

Je výhodné: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Proč je to pravda?

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$ (Připomenutí $\subseteq$)

Nyní „snadné": $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$,

neboť $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$. Celkem

$\Leftrightarrow (\forall x)(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

__Def__ Obraz zobrazení: $f: A \to B$, pak $f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}$.

__Pozn.:__ Někdy obor hodnot zvlášť pokud $B \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{C}$

__Př.:__ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Obraz (obor hodnot)

$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2\}$.

Snadno: $f(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty)$, neboť

a) $y \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \quad y = f(x) = x^2 \geq 0 \Rightarrow$

$y \in \langle 0, \infty)$

b) $\underline{y \in \langle 0, \infty)} \Rightarrow^? y \in f(\mathbb{R}) \Leftrightarrow y = x^2$ pro

nějaké $x \in \mathbb{R}$? Ano $x := \sqrt{y}$ (i $x = -\sqrt{y}$).

[Odmocnina existuje, neboť $\underline{y \geq 0}$. $\langle 0, \infty) \subseteq f(\mathbb{R}) \Rightarrow$

Celkem $f(\mathbb{R}) \subseteq \langle 0, \infty) \wedge \langle 0, \infty) \subseteq f(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$f(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty)$. To bylo z definice. Později snadnější metody.

Př.: Dokažte: $f(M_1)\setminus f(M_2) \subseteq f(M_1\setminus M_2)$ pro $f: A\to B$, $M_1, M_2 \subseteq A$. Připomeňme množinový rozdíl $X\setminus Y = \{x\in X \mid x\notin Y\}$. 02

Dk.: $\underline{y\in f(M_1)\setminus f(M_2)} \overset{\text{rozdíl}}{\Rightarrow} y \in f(M_1) \wedge y\notin f(M_2)$

$\Rightarrow \exists x_1\in M_1\ f(x_1)=y \wedge \neg(\exists x_2\in M_2)(y=f(x_2))$

$\Rightarrow \exists x_1\in M_1\ f(x_1)=y \wedge (\forall x_2\in M_2)(y\neq f(x_2)), x_2\in M_2$

Odtud $x_1\in M_1 \wedge \underline{x_1\notin M_2}$. Kdyby $x_1\in M_2$, pak $y=f(x_1)$ pro $x_1\in M_2$. To to ale neexistuje.

Celkem $\underline{y\in f(M_1\setminus M_2)}$, a tak $f(M_1)\setminus f(M_2) \subseteq f(M_1\setminus M_2)$.

Dcv. Kdy platí rovnost?

Ještě k procvičení: $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(A\cup C)$, dokažte. Řešení*) Platí: $(A\wedge B)\vee C \Leftrightarrow (A\vee C)\wedge(A\vee C)$ (*) (ověřte tabulkou!!). K množinám:

$\underline{x\in(A\cap B)\cup C} \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} x\in A\cap B \vee x\in C \Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)\vee x\in C \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} (x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)$

$\overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} x\in A\cup C \wedge x\in B\cup C \overset{\text{def } \cap}{\Longleftrightarrow} \underline{x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)}$.

Celkem $x\in(A\cap B)\cup C \Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, tj. $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$.

*) Celkem svižně předvedeno.

Matematická indukce

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Výrokovou formuli: $\forall n \geq n_0\ V(n)$ dokazujeme tak, že dokážeme $V(n_0)$ a implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, $n \geq n_0$.

[Víme pak $V(n_0)$. Jelikož $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, tak $V(n_0) \Rightarrow V(n_0+1)$. Jelikož $V(n_0)$ víme, víme i $V(n_0+1)$. Dále $V(n_0+1) \Rightarrow V(n_0+2)$ a víme $V(n_0+1)$, tj. víme $V(n_0+2)$ atd. Mat. indukce se dokazuje v rámci teorie množin.]

Př.: $\forall n \geq 1 \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Dokažte.

Dk.: $n_0 = 1$

1. $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$ ✓ je pro $n = n_0$.

2. Předpokládejme $V(n)$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$V(n+1)$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

dokazujeme

Indukční předpoklad

(dosadíme $n+1$ za n ve)

úpravy na požad. tvar

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$, což bylo dokázat.

Př.: $\forall n \geq 1$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Smíte použít vzorec pro součet aritm. řady.

Dk.: Opět $n_0 = 1$.

1. Pro $n = n_0 = 1$: $1^3 = (1)^2 = 1$ ✓

2. Předpokládejme $V(n)$, tj. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ (Indukční předpoklad)

$V(n+1)$: $1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = (1+2+\dots+(n+1))^2$ ②

chceme dokázat.

$$1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = [1^3+2^3+\dots+n^3]+(n+1)^3 \overset{\text{ind. předpoklad}}{=}$$

$$(1+2+\dots+n)^2+(n+1)^3 \underset{\text{součet aritmetické řady (znám!...!)}}{=} \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2+(n+1)^3 =$$

$$= \frac{1}{4}[n^2(n+1)^2+4(n+1)^3] = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2 \overset{\text{opět } \Sigma \text{ aritm. řady}}{=} (1+2+\dots+(n+1))^2,$$

což bylo dokázat.

• Symboly: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\dots+a_n$; Například $\sum_{i=1}^{n^2} a_i =$

$= a_1+a_2+\dots+a_{n^2}$. (Suma a_k od 1 do n)

$\prod_{p=1}^{m} x_p = x_1\cdots x_m$. (Součin / produkt x_p od 1 do m.)

„Přirozeně" можем sčítat i $\sum_{k=m}^{n} x_k$, $m \le n$.

Něco „mírně" jiného: (Pro všechna $n \ge 1$:)

Př.: $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \ge -2$ a x_i stejná znam. $i=1,\dots,n$

Dk.: $n_0=1$. 1) $(1+x_1) \ge 1+x_1$ $\forall x_1 \in \mathbb{R} \leftarrow$ reálná čísla

2) Předpokládej $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$ (ind. pp.)

A) Počítejme $\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) \underset{\text{snaha použít ind. pp.}}{=} \left[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right](1+x_{n+1}) \overset{\text{ind pp.}}{\ge}$

$\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1+x_{n+1})$

pokud $x_{n+1} \ge -1$

$\boxed{\text{pp – předpoklad}}$

Proč? Víme $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} x_i \quad / \cdot \underbrace{(1+x_{n+1})}_{\geq 0} \Rightarrow$ (3)

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i)(1+x_{n+1}) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1+x_{n+1}).$$

Dále: $\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1+x_{n+1}) = 1+x_{n+1}+$

$$+\sum_{i=1}^{n} x_i + \underbrace{x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\geq 0 \text{ (stejná zn.)}} \geq 1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

Celkem složité-vynecháno

B) • Co případ, kdy $\exists x_i \ngeq -1$? (obtížnější)

•) Nejdřív $\forall i \quad x_i \in \langle -2, 1)$. „Po různém zkoušení" se ukazuje vhodnost dvoukrokové indukce, tj. dokážu $V(1)$ a $V(2)$ a $V(n) \Rightarrow V(n+2)$ [odtud $V(1)$, $V(2)$; $V(1) \Rightarrow V(3)$ $\Rightarrow V(3)$; $V(2) \Rightarrow V(4) \wedge$ $\wedge V(2)$ vím $\Rightarrow V(4)$; ...]

$V(1)$ bylo. $V(2)$: $(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+\underbrace{x_1x_2}_{>0} \geq$

$\geq 1+x_1+x_2 = 1+\sum_{i=1}^{2} x_i$ ✓. Nyní $V(n) \Rightarrow V(n+2)$

Výhodné je, že $(1+x_n)(1+x_{n+1}) > 0$! (navzdory od $1+x_n$ a $1+x_{n+1}$).

$$V(n+2): \prod_{i=1}^{n+2}(1+x_i) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\overbrace{\underbrace{(1+x_{n+1})}_{<0}\underbrace{(1+x_{n+2})}_{<0}}^{>0}$$

$$\geq \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1+x_{n+1})(1+x_{n+2}) = \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot$$

$$\cdot(1+x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+1}x_{n+2}) = 1+x_{n+1}+x_{n+2}+$$

$$\underbrace{x_{n+1}x_{n+2}}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^{n} x_i + (\underbrace{x_{n+1}}_{\in\langle -1,0)} + \underbrace{x_{n+2}}_{\in\langle -1,0)} + x_{n+1}x_{n+2})\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\geq 1+x_{n+1}+x_{n+2}+\sum_{i=1}^{n} x_i + \overbrace{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{<0}\underbrace{[\underbrace{(1+x_n)(1+x_{n+2})}_{\in(0,1\rangle}-1]}_{\in(-1,0)}}^{>0}$$

$$\geq 1+x_{n+1}+x_{n+2}+\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+\sum_{i=1}^{n+2} x_i, \text{ cbd}$$

což bylo dokázat.

••) Nyní: Některá $x_i \in \langle -2,-1)$, jiná ne. Avšak stejná znaménka, tj. $x_j \in \langle -1,0)$ ($x_j > 0$ nemůže být).

Označme $M_1 = \{ i \mid x_i \in \langle -2,-1) \}$, $M_2 = \{ j \mid x_j \in \langle -1,0) \}$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = \prod_{i\in M_1}(1+x_i)\underbrace{\prod_{j\in M_2}(1+x_j)}_{\geq 0} \overset{\text{dle •)}}{\geq} \Big(1+\sum_{i\in M_1} x_i\Big)\prod_{j\in M_2}(1+x_j)$$

$$= \prod_{j\in M_2}(1+x_j) + \sum_{i\in M_1} x_i \prod_{j\in M_2}(1+x_j) \overset{A)}{\geq} 1+\sum_{j\in M_2} x_j + \sum_{i\in M_1} \underbrace{x_i}_{\leq 0} \underbrace{\prod_{j\in M_2}(1+x_j)}_{\in\langle 0,1)}$$

$$\geq 1+\sum_{j\in M_2} x_j + \sum_{i\in M_1} x_i = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

• Př.: $\forall n \geq 0$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, kde uvažujeme $x^0 = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dokažte. Snažte použít: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, kde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

!! $0! = 1$

Dk.: 1) $n=0$: $(a+b)^0 = \cancel{a+b}$, $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^{0-k}b^k = \binom{0}{0}a^0b^0 \cancel{+\binom{1}{1}a^0b^1} = \cancel{a+b}$

Idea*) 2) $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) \overset{\text{ind.pp}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \overset{\text{ok.}\,\nabla\text{ (Idea)}}{=}$$

ekv. upravovat k cilove fmli

$k := k'-1$, $k=0 \Rightarrow k'=1$, $k=n \Rightarrow k'=n+1$

$$= \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}a^{k'}b^{n-(k'-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} =$$

[zpět ke k :)]

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

*) Musíme získat sumy s $a^k b^{n+1-k}$ ∇ Další možnost (těžší) je snaha o transf. komb. čísel, by byla $\binom{n+1}{k}$...

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{(n+1)-k} + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Př. (sami): $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Dokažte $\forall n \geq 1$.

Pozn.: Jde o $1 \cdots n \leq \frac{(n+1)}{2} \cdots \frac{(n+1)}{2}$.

Dk.: 1) $1! \leq 1^n = 1$

2) $(n+1)! = (n+1)n! \overset{\text{ind. pp.}}{\leq} (n+1) \frac{(n+1)^n}{2^n} =$

$= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}$. Chceme $\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \overset{(**)}{\leq} \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$.

Je $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{2} \geq$ ← Příklad s Π & Σ

$\geq \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + (n+1)\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$,

tj. skutečně $(**)$, a tak $\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$,

cbd.

Př. AG-nerovnost. $\forall x_i \geq 0$ je

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\text{geom.}} \leq \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}_{\text{aritm. průměr}}$$

Krátký důkaz.

Lemma: $x_1 \cdots x_n = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$.

Dk.: 1) $n=1$ triv

2) Předp. $V(n)$. Chceme $V(n+1)$:

$$x_1 \cdots x_n x_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n+1.$$

a) $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 1 = n+1 \geq n+1$ ✓

b) $\exists x_i \neq 1$, $\underbrace{\text{BÚNO}}_{\text{bez újmy na obecnosti}}$ $x_i > 1$. Díky $x_1 \cdots x_n x_{n+1} = 1$ ale existuje $x_j < 1$ $(j \neq i)$. Pro jednoduchost uvažujme $i = n$ & $j = n+1$. Víme

$$\underbrace{x_1 \cdots x_{n-1} (x_n x_{n+1})}_{n \text{ čísel!}} = 1 \Rightarrow \left[x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n \right] \ (\Delta)$$

Potřebujeme $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n+1$. Z (Δ):

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1 \geq n+1.$$

Pokud $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1$, jsme hotovi. To to je ekvivalentní

$x_n + x_{n+1} \geq x_n x_{n+1} + 1$, což je ekviv.

$(x_n - 1)(1 - x_{n+1}) \geq 0$, což v jak platí.

<u>Důkaz nerovnosti:</u> $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Vezmi normalizované $\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$.

Součin je $\frac{x_1 \cdots x_n}{(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})^n} = 1$, tj. pp. lemmatu je splněn, a tak $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \geq n$, odkud

$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$, a tedy $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq$

$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$, cbd.

<u>Pozn.:</u> Důkaz samotné nerovnosti je bez použití indukce.

Př.: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$. Dokažte.

ind.pp.

Dk.: 1) $2! < 2^2 \cdot (1!)^2$ ✓

2) $(2n+2)! = (2n)!\,(2n+1)(2n+2) <$

$< 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) < 2^{2n+2}[(n+1)!]^2 =$

pokud ukážu

$= 2^{2n+2}(n!)^2(n+1)^2$, jsem hotov (to je $V(n+1)$).

Stačí tedy $(2n+1)(2n+2) < 2^2(n+1)^2$

$4n^2+6n+2 < 4n^2+8n+4$

$0 < 2n+2$, triv. $n > -1$

Uspořádání (elegantnější"): Zřejmě

(*) $(2n+1)(2n+2) < 2^2(n+1)^2$, neboť L.S $4n^2+6n+2$

a P.S. $4(n^2+2n+1) = 4n^2+8n+1$ (LS<PS pro $n \geq 1$).

Dále $(2n+2)! = (2n)!\,(2n+1)(2n+2) \overset{\text{i.pp.}}{<} 2^{2n}(n!)^2 \cdot$

$\cdot (2n+1)(2n+2) \overset{(*)}{\leq} 2^{2n}(n!)^2 2^2 (n+1)^2 =$

$= 2^{2n+2}[(n+1)!]^2$, cbd.

Supremum & infimum

8

Def.: $M \subseteq \mathbb{R}$ shora omezená $\Leftrightarrow \exists k_1\ \forall x \in M\ \ x \le k_1$

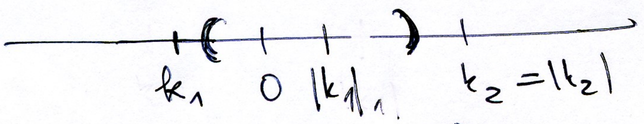
$M \subseteq \mathbb{R}$ zdola omezená $\Leftrightarrow \exists k_2\ \forall x \in M\ \ k_2 \le x$

$M \subseteq \mathbb{R}$ omezená $\Leftrightarrow \exists k\ \forall x \in M\ \ |x| \le k$

$\Updownarrow$

M je shora i zdola omezená ($k = \max\{|k_1|, |k_2|\}$)

Obr.



$\max(|k_1|, |k_2|) = k_2$

Nejmenší prvek M, tj. min M, je prvek z M, že $\forall x \in M$: $\min M \le x$

Největší prvek M, tj. max M, je prvek z M, že $\forall x \in M$ $x \le \max M$.

minimalni prvek x: jakmile je neco mensi nebo rovno x, je to x; maximalni y: jakmile je neco vetsi nebo rovno y, je to y.
V R a jinych dobre usporadanych mnozinach minmialni je totez co nejmensi a maximalni je totez conejvetsi, pokud existuji.

Př.: $\max\, [0,1] = 1$ ($\forall x \in [0,1]: x \le 1 \wedge 1 \in [0,1]$)

$\max\, [0,1)$ neexistuje! $1 \notin [0,1) \wedge$ pro $1-\delta$ ($\delta > 0$) najdu v $[0,1)$ prvek větší, viz níže.

Proto supremum & infimum.

$C_1 \in \mathbb{R}$ horní závora $M \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in M\ \ x \le C_1$

$C_2 \in \mathbb{R}$ dolní závora $M \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in M\ \ x \ge C_2$

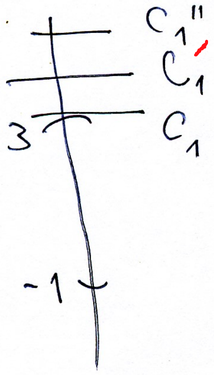
Supremum M, sup M, nejmenší horní závora

Infimum M, inf M, největší dolní závora

Nejvetsi a nejmensi prvek je jediny. Napr. x a y nejvetsi, pak x =<y a y =< x, z cehoz dle (slabe) antisymetrie x=y.

Nejvetsi, nejmensi, minimalni a maximalni prvek nemusi existovat. Minimum a maximum nemusi byt jedina: Pr.: A={0,1}, Q(A)={{0}, {1}, {0,1}}, cast mny vsech podmnozin A. Defiujme (x =< y) := (x subseteq y): {0} i {1} jsou minimalni, nejsou nejmensi, maximum a nejvetsi v Q(A) je mna {0,1}.

Obr.:



c_1', c_1'' horní závory
c_1 je z nich nejmenší
(určitě menší než c_1' a c_1'')

Ekviv. definice sup & inf

Poznatek: A) 1. $\forall x \in M: x \leq \sup M$

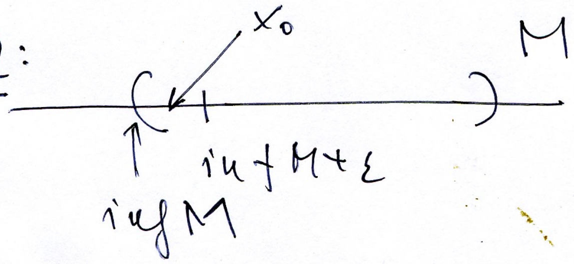
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in M: x_0 > \sup M - \varepsilon$

Jakmile vezmu menší než sup M, menší horní závoru, najdu „element" x_0 větší než $\sup M - \varepsilon$.

B) 1. $\forall x \in M: x \geq \inf M$

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in M \ \ x_0 < \inf M + \varepsilon$

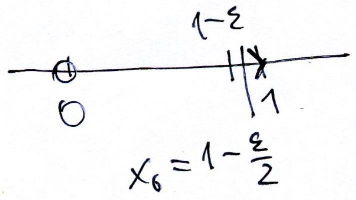
Ilustrace B2:



Př.: 12a) $M = (0,1\rangle$

- $\max (0,1\rangle = 1 \quad (\forall x \in (0,1\rangle \ \ x \leq 1)$
- $\sup (0,1\rangle = 1$: 1. $\forall x \in (0,1\rangle \ \ x \leq 1$

2. Necht' $\varepsilon > 0 \ \overset{?}{\exists} x_0 > 1 - \varepsilon$
$x_0 \in (0,1\rangle$? Ano $x_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$



Vskutku:
$1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$
$1 > \frac{1}{2}$ ✓

Zde bych jeste mel rici, co pro eps>2, pak totiz zvolene x_0 neni z (0,1>. Staci ale vzit x_0=0nebo i 1/2.

10

- min $(0,1]$ neexistuje! Pro spor. Nechť $\exists$. Je elementem $(0,1]$, tj. jde o nějaké $0<\delta_0\leq 1$. Vezmi $\frac{\delta_0}{2}$. $\frac{\delta_0}{2}<\delta_0$? Ano: $\frac{1}{2}<1$ a mohu dělit $\delta_0\neq 0$.

- $\inf (0,1]=0$: 1. $\forall x\in(0,1]: x\geq 0$
  2. $\forall \varepsilon>0\ \exists x_0=\frac{\varepsilon}{2}$
  $x_0<0+\varepsilon$, ano $\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Opet, co kdyz x_0=eps/2>1 a nepatri do (0,1]. Staci ovsem x_0=1. Tut uvahu s hodnym epsilonem nemusite provadet, pokud jste v casove tisni. Tato, byt zradna, situace je spise trivialni. Natipneme cisla.

b) $M=[0,1]$; $\sup [0,1]=1=\max[0,1]$
$\inf [0,1]=0=\min [0,1]$

c) $M=(0,\infty)$. Zde musíme definici sup a inf doplnit: M není shora omezená $\Rightarrow$ $\sup M=\infty$; M není zdola omezená $\Rightarrow$ $\Rightarrow \inf M=-\infty$.

Zde Max M neexistuje
Min M neexistuje (jako v $(0,1]$)
$\sup M=\infty$
$\inf M=0$.

d) $M=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$

$\sup M=+\infty$ $(n=1)$
max M neexistuje
$\inf M=0$
min M neexistuje, neboť

$\forall x\in M$

Vezmi 1/2 z x.

Toto číslo je ještě menší než x, a proto x není minimem. Žádné $x \in M$ není minimem $\Rightarrow$ minimum $\nexists$.

11

<u>Definujme</u>: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A+B := \{x = a+b \mid a \in A, b \in B\}$

$-A = \{-x \mid x \in A\} = \{x \mid -x \in A\}$.

<u>Př.</u>: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A, B omezené. Dokažte, že $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Dk.: $\left.\begin{array}{ll} \forall a \in A & a \leq \sup A \\ \forall b \in B & b \leq \sup B \end{array}\right\}$ $a+b \leq \sup A + \sup B$

1. Tj. $\forall x \in A+B$

$\exists a, \exists b: x = a+b \leq \sup A + \sup B$

$\Rightarrow$ $\sup A + \sup B$ je horní závora $A+B$.

2. Bod 2 Pozn. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_A \;\; x_A > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_B \;\; x_B > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

Odtud $x_A + x_B > \sup A + \sup B - \varepsilon$,

tj. našli jsme $(\forall \varepsilon > 0)$ $x_0 = x_A + x_B \in A+B$,

že $x_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$. Tím je 2. bod def. sup. dokázán, a tak

$\sup(A) + \sup(B)$ je supremem $A+B$, $\sup(A+B)$.

• D.cv. (opět nepovinné): $\inf(-A) = -\sup A$.

• Př.: Dokažte $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$.

Dk.: $\inf(A-B) = -\sup(-A+B) = -[\sup(-A)$ $+\sup(B)] = -\sup(-A) - \sup(B) =$ $= \inf A - \sup B$.

Pozn.: $A - B := A + (-B)$ $[-(A-B) = B - A$? $x \in -(A-B) \Leftrightarrow -x \in A-B \Leftrightarrow -x = a + (-b)$, $a \in A, b \in B \Leftrightarrow x = b - a = b + (-a) \Leftrightarrow x \in B - A]$.

Supremum & infimum funkce

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in M\} = \sup f(M)$$

$$\inf_{x \in M} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in M\} = \inf f(M).$$

Př.: $\sup\limits_{x \in M}(f(x)+g(x)) \leq \sup\limits_{x \in M}(f(x)) + \sup\limits_{x \in M}(g(x))$ pro f, g omezené $(= \exists K\ \forall x \in M\ |f(x)| < K)$

Dk.: $f(x) \leq \underbrace{\sup_{\tilde{x} \in M} f(\tilde{x})}_{=\alpha} \wedge g(x) \leq \underbrace{\sup_{\tilde{x} \in M} g(\tilde{x})}_{=\beta} \Rightarrow$

$f(x) + g(x) \leq \sup\limits_{\tilde{x} \in M} f(\tilde{x}) + \sup\limits_{\tilde{x} \in M} g(\tilde{x}) \Rightarrow$

$\alpha + \beta$ je horní závora $f(x) + g(x)$.

$\sup\limits_{x \in M}(f(x)+g(x))$ $\exists$, neboť $f(x)+g(x)$ je také omezená (Proč?). Jelikož $\sup\limits_{x \in M}(f(x)+g(x))$ je nejmenší hor. záv $\Longrightarrow \sup\limits_{x \in M}(f(x)+g(x)) \leq \sup\limits_{x \in M}(f(x)) + \sup\limits_{x \in M}(g(x))$