## CVIČENÍ 12

1. Najděte lokální extrémy

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$x^{\frac{1}{3}}$ má me def. na celém $\mathbb{R}$ (Je i přístup def. $x^q$ jen na $\mathbb{R}_0^+$.)

spojitá na celém $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{2/3} - \frac{2}{3}x^{1/3}(1-x)^{-1/3} =$$

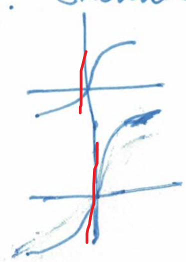
$$= \frac{1}{3}\,\frac{(1-x)-2x}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1-3x}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}}.$$

Podezřelé

- Stacionární bod ($\stackrel{def}{=} f'(c)=0$): $x = \frac{1}{3}$
- Bod $\nexists$ vlastní derivace: 0 a 1. De facto ale říkáme jen, že nefungují vzorečky. Skutečně neexistují derivace v 0 & 1?

$f(x)$ u nuly $x^{1/3}$ neexistuje

u 1 $y^{2/3}$ neexistuje } vidím



Přesně u nuly:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}(1-h)^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-2/3}\underbrace{(1-h)^{2/3}}_{1} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

U 1 analogicky.

- Znaménka $f'$ na $(-\infty,0) \cup (0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},1)$ $(1,\infty)$

$x^{2/3} \geq 0$

| | $(-\infty,0)$ | $(0,\frac{1}{3})$ | $(\frac{1}{3},1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(1-x)^{\frac{1}{3}}$ | + | + | + | − |
| $1-3x$ | + | + | − | − |
| | + | + | − | + |
| | roste | roste | lok max | lok min |

Ani { / ° \ }, ani { \ ° / } nenastane, neboť $f$ je spojitá. Je tedy

2. Dokažte nerovnost

$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ ; $x, y \ge 0$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Youngova nerovnost

$f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$ ; $f'(x) = y - x^{p-1}$

$D_f = \mathbb{R}_0^+$, $f$ spoj.; $f'$ $\exists$ na $\mathbb{R}_0^+$, $f'(x_0) = 0 \iff x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$

| | $(0, x_0)$ | $(x_0, \infty)$ |
|---|---|---|
| | $+$ | $-$ |
| | $\nearrow$ | $\searrow$ |

V $x_0$ je lokální maximum; maximum je globální.

Tj.: $f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = y^{\frac{1}{p-1}} y - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = y^{\frac{1+p-1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} =$

maximum

$= y^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\frac{p-1}{p}\right) \ge xy - \frac{x^p}{p}$ $\forall x, y \ge 0$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \boxed{q = \frac{p}{p-1}}$ : $\frac{y^q}{q} \ge xy - \frac{x^p}{p} \iff$

$p + q = pq$

$$\boxed{\frac{y^q}{q} + \frac{x^p}{p} \ge xy}$$

Lépe: nejdřív 3., pak 2.

3. Dokažte $e^x > x + 1$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (v 0 rovnost triv.)

$f(x) = e^x - x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$, spoj. na $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff \underline{x = 0}$

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |
| | $\searrow$ | $\nearrow$ |

$f$ má lokální minimum v $\underline{x = 0}$.

Minimum je ostré (z def.) : $f' < 0$ na $(-\infty, 0)$, $f' > 0$ na $(0, \infty)$.

Minimum je globální (z def.).

$f(0) = e^0 - 1 = 0$ : $f(x) \ge f(0)$ $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$

$f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ostrost.

tj. $e^x - x - 1 > 0$ na $D_f \setminus \{0\}$.

$e^x > x + 1$

4. Globální extrémy $f(x)=x^2-4x+6$ na $[-3,10]$.

$D_f=[-3,10]$, f spoj. na $[-3,10]$ (v $-3$ zprava, v $10$ zleva)

stac. body $f'(x)=2x-4=0 \iff x=2$
body nespoj.: $\emptyset$
body $\nexists f'$ vlastní: $\emptyset$
krajní body: $-3, 10$.

| | $(-\infty,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |

Spojitá:  $\Rightarrow x=2$ lok. minimum.

Zřejmě glob. minimum. (z def! Proč? formalis-
ticky: $f(x)\ge f(2)$? $x \boxed{\le} 2 \Rightarrow f(x) \boxed{\ge} f(2)$ klesá vím z $f'<0$
$x \boxed{\ge} 2 \Rightarrow f(x) \boxed{\ge} f(2)$ roste vím z $f'>0$

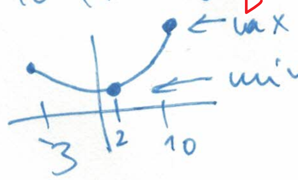
zobr. jasné.

Celkem: v 2 je glob. minimum.

Globální maximum: $\exists$ (spoj. na uzavřeném!)
důl. a dk. – složitá věta
zásadní ve vývoji
matematiky

a) v lok. maximu, jež však $\nexists$
b) v krajních bodech $D_f$ nebo : $-3, 10$
v krajních bodech spojitosti $-3, 10$
v krajních bodech $\exists$ vlastní derivace : $-3, 10$
nebo v krajních bodech

$(-3)^2+12+6=27$
$(10)^2-40+6=66 \Rightarrow$ glob. max v $x=10$, a sice 66.




5. $f(x)=xe^{-\frac{x}{100}}$ glob. extr. na $(0,\infty)$.
(jinak $(-\infty,\infty)$)

$D_f=(0,\infty)$ ze zadání
spoj. na $(0,\infty)$
$D_{f'}=(0,\infty)$

4

$$f'(x) = \underline{e^{-\frac{x}{100}} + x\left(-\frac{1}{100}\right)e^{-\frac{x}{100}}} = 0$$

$-100 + x = 0 \iff \underline{x = 100}$, stac. bod

(podezřelý z lok. extrému)

| | $(0, 100)$ | $(100, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

spoj.: (v $x = 100$)

Lokální maximum v $x = 100$, lok. min. $\nexists$

gl. max. $\exists$ (v bode lok. max.)

Body nespoj. $\emptyset$

Body $\nexists$ 1. der. $\emptyset$

Stac. body $x = 100$, $f(x) = 100e^{-1}$

„Krajní body": $x = 0$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{100}}} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim \frac{1}{\frac{1}{100}e^{\frac{x}{100}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Nebo růst. řada $x \gg \left(e^{\frac{1}{100}}\right)^x$ $<1$

Celkem: glob. minimum $\emptyset$, největší glob. maximum v $x = 100$

[Na $[0,\infty)$ je glob. minimum v $x = 0$.]

6. Lokální a globální extrémy $f(x) = |x^2+x-2| - |x^2-3x+2|$ na $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$, $f$ spojitá.

$x^2+x-2 \quad (x-1)(x+2)$

$x^2-3x+2 \quad (x-1)(x-2)$

| $I$ | $(-\infty,-2)$ | $(-2,1)$ | $(1,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-3x+2$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |

a) $f(x) = 4x - 4$ ✓

b) $f(x) = -2x^2 + 2x$ ✓

c) $f(x) = 2x^2 - 2x$ ✓

d) $f(x) = 4x - 4$

$\lim_{x\to\pm\infty} f = \pm\infty \Rightarrow$ nemá glob. extr.

Lokální: a) Podezř.: $-2$

b) Podezř.: $-2, 1$, $-4x+2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

c) $1, 2$, $4x-2 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \notin I$

d) $2$

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,\frac{1}{2})$ | $(\frac{1}{2},1)$ | $(1,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

Lok. max. v $\frac{1}{2}$, lok. min. v 1.

$D_f = (-3,3)$ $\longrightarrow$ Pro stejnou f, ale s omezenym Df na Df=(-3,3) urceno na whiteboardu. Staci dpoocist hodnoty v krajnich bodech, jez pribyly, tj. +/-3

# Vyšetřování průběhu

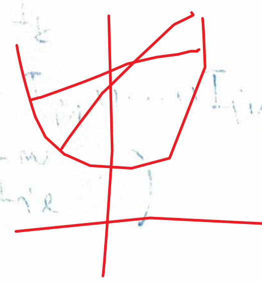
1. $D_f$, obor spoj., limity v bodech nespoj. a hraničních / krajních bodech $D_f$.
2. Spec. vlastn.: sudost / lichost, periodicita
3. Intervaly monotonie $f'$
4. Body lok. a glob. extrémů
5. Obor hodnot $(H_f, R_f)$. Omezenost
6. Nulové body, jde-li.
7. konk. / konv., infl.
8. Asymptoty
9. Náčrtek

Doplnění věci z minula: $f''>0 \Rightarrow$ ryze konv.

$f''<0 \Rightarrow$ ryze konk.

$f''\geq 0 \Rightarrow$ konv.

$f''\leq 0 \Rightarrow$ konk.



Pokud $\exists$ asymptota $Ax+B$, pak $A = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$B = \lim (f(x)-Ax)$. Pak bych měl zkontrolovat

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-Ax-B)=0$. Analog. pro $-\infty$.

Př.: Vyšetřete průběh $f(x)=e^{-x^2}$

1. $D_f=\mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ (slož. spoj.!).

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=0$ (vnější řady)

VOS $y=-x^2$

2. Je sudá. Není lichá. Není periodická.

3. $f'(x)=-2x\,e^{-x^2}$ f roste na $(-\infty,0\rangle$, f klesá na $\langle 0,\infty)$

| | $(-\infty,0)$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | + | $-$ |

$\Rightarrow$ v 0 lok. maximum.

4. v 0 lok. max.

Lok. minimum není.

Glob. minimum: není: $f(x)>0 \wedge f\to 0,\ x\to\pm\infty$

Glob. maximum: lok max $f(x)=1$, $x=0$

[Dk. opět triv z def.: $x\le 0$ $f(x)\le 1$ roste

$x\ge 0$ $f(x)\le 1$ klesá

$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\le 1$ ]

5. $H_f=(0,1\rangle$ (spojitá, nabývá mezihodnot na int.)

6. Nulové body: $\emptyset$

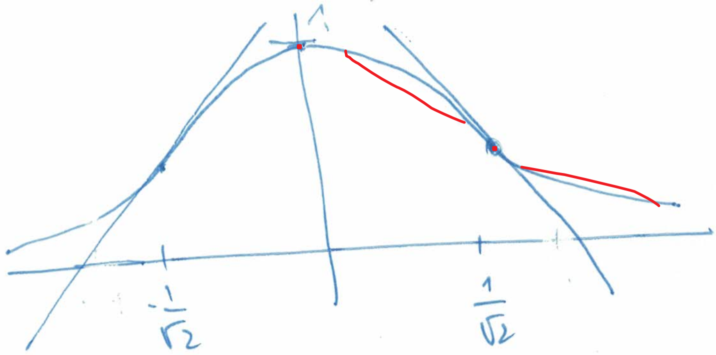
7. $f''(x)=-2e^{-x^2}-2x(-2x)e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$2x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

| | $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt2})$ | $(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ | $(\frac{1}{\sqrt2},\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | + | $-$ | + |
| $f$ | konv | konk. | konv |

infl. infl.

8




8. Asymptoty: $x \to \infty \quad y = 0$
$x \to -\infty \quad y = 0$

Př.: Vyšetři $f(x) = \operatorname{sh} x$ snadne. doporucuji pro "zakladni porozumeni"

1. $D_f = \mathbb{R}$, spoj. na $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. lichá: $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$.

Není per. (bez dk.). Není sudá.

3. $f'(x) = \cosh x = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 0 \; / e^x \Leftrightarrow e^{2x} = -1 \Rightarrow \emptyset$

cosh je součet kladných $\Rightarrow$ kladná $\Rightarrow$

$f$ je rostoucí

4. Nemá lok. min.

—‖— max.

Glob: v bodech lok. extr. $\emptyset$ nebo v krajních bodech $\emptyset$

Nejsou.

5. $H_f = (-\infty, \infty)$ (z limit $f(x)$ a spoj. $f$)

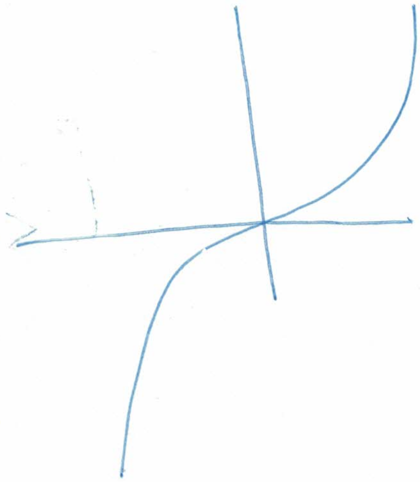
6. Nulové body $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\operatorname{sh}(0) = 0$.

7. $f''(x) = \operatorname{sh} x$ $\quad f'''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad f'''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Graf



konv. na $\langle 0, \infty)$

konk. na $(-\infty, 0\rangle$

$\nabla$ Do konkávy kávu nenaleješ – pomůcka.

8. Asymptoty nejsou.

Př.: Vyšetři $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. $D(\arcsin) = [-1, 1]$

$$-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2-1 \overset{a)}{\leq} x^2-1 \overset{b)}{\leq} x^2+1$$

a) $0 \leq x^2$ ✓ $\quad$ b) $-1 \leq 1$ ✓

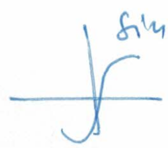
Dále $x^2+1 \neq 0$ nikdy na $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$;

Spoj: $x^2-1$, $x^2+1$ spoj, $x^2+1 \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}$ spoj.

arcsin spoj. Slož. spoj. a spoj. je spojitá.

Obor spojitosti $\mathbb{R}$.





$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \arcsin 1^- = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \arcsin 1^- = \frac{\pi}{2}$$

2.

Sudá: $f(x)=f(-x)$.

Není lichá.

Není period.

3. $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{|x^2+1|}{\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}}\,\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)\sqrt{4x^2}}\overset{x\neq 0}{=}$$

$$=2\,\mathrm{sgn}(x)\,\frac{1}{x^2+1},\quad \underline{x\neq 0}.\qquad \mathrm{sgn}\,x:=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}.$$

Obor platnosti výpočtu: arcsin' má jen na $\langle -1,1\rangle$, přičemž v $-1$ zprava a v $1$ zleva.

Vlastní jen na $(-1,1)$. $-1<\frac{x^2-1}{x^2+1}<1$ ovšem z výpočtu vyjde až na bod $\underline{x=0}$ (případ a))

• Je derivace $f$, fce $f$, vlastní v $x=0$? [To to potřebuji pro vely.] $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{h^2-1}{h^2+1}-\arcsin(-1)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(\frac{h^2-1}{h^2+1}\right)+\frac{\pi}{2}}{h}=\cdots$$

Na whiteboard nebylo, spoctete l' Hosp.
Derivace je urcena vyse, bude treba rozlisit 0^+ a 0^- : 0^- -2, 0^+, vpravo, +2.

4. $f'(x)=0$. (Stacionární: $f'(x_0)=0$)

Stacion. body: $\emptyset$

Krajní body $D_f$:

Krajní body spoj. $f$: $\Big\}\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

$=\frac{\pi}{2}$.

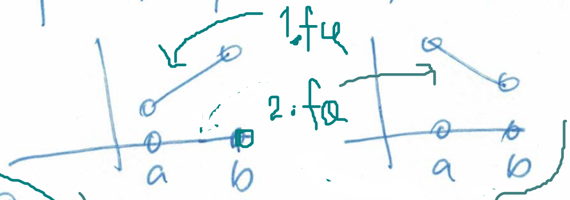
$f'>0$ pro $x>0$

$f'<0$ pro $x<0$

Lok. extrémy mez:
glob. extrémy mez.

Pozn.: [a,b), [a,b), (a,b], [a,b]

α) (a,b)



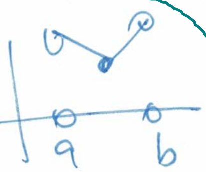


Cela struktura je z hlediska formulace slozita - velke mnozstvi pripadu, ale z obrazku srozumitelna.

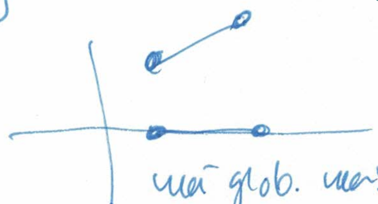
nemá gl. max
—||— gl. min.
—||— lok. max.
—||— lok. min.

NEMÁ lok. min
má lok. max.
nemá glob. max.
nemá glob. min.

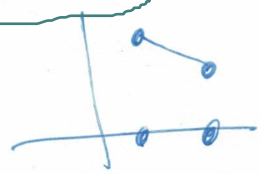
ma lok. min
ma glob. min
nema lok. max
nema glob. max



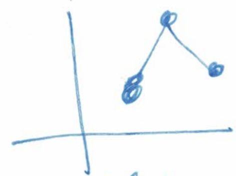

β) [a,b]



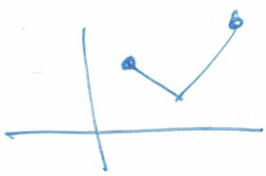
má glob. max.
má glob. min
ne má lok. max.
ne má lok. min.



ne má lok. min
ne —||— max
má glob min
má glob max.



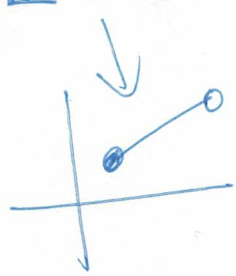
ne má lok. min.
ne má lok. max.
má glob. max.
má glob. min.



analogicky

γ) (a,b], δ) [a,b) analogicky

Tyto doplneni ne jsem pridal na zaklade poznamek predneasejiciho z jeho webu. Pozadovalo se, aby lok. minima/maxima byla pouze v bodech, jez jsou stredy okoli a to takovych okoli, kde je fce definovana



ne má lok. min
nemá lok. max
MÁ glob. min
nemá glob. max. !!

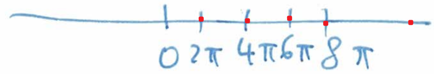
Nestrilel bych z toho.

Celkem tedy: 16 případů. Navíc obrácením nerovnosti, klesání → 32 případů (důležité pro vyzrost).

Nezapomente, ze lokalni extremy musi byt v bodech Df (intuitivne jasne), ale navic takovych, jez maji okoli U, ktere je cele v Df (zrejme, kdyz si zopakujete definici lokalniho extremu). Rikame nekdy ve vnitrnich bodech.

Př. Vyšetři $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|$

1. $\frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$




$x \neq 2\pi + 4k\pi$

$\operatorname{tg}\frac{x}{4} \neq 0$ $\quad \frac{x}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq 4k\pi$

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi+2\pi)$$

Obor spoj. $= D_f$ (ln spoj., $|\;|$ spoj., tg ( ) spoj., $\frac{x}{4}$ spoj.)

$\lim\limits_{x\to 4k\pi} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| = -\infty$ $\quad (\ln 0^+)$

$\lim\limits_{x\to 4k\pi+2\pi} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| = +\infty$ $\quad (\ln +\infty)$

2. $f(-x) = \ln\left|\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right)\right| = \ln\left|-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right)\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| = f(x)$

sudá

$4\pi$-periodická. Proč?

$f(x+4k\pi) = \ln\left|\operatorname{tg}(x+k\pi)\right| = \ln\left|\operatorname{tg} x\right| = f(x)$

3. Stačí vyšetřovat na $(0,2\pi)\cup(2\pi,4\pi)$.

Na $(0,2\pi)$: $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4} > 0$

$(2\pi,4\pi)$: $f(x) = \ln\left(-\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{-\operatorname{tg}\frac{x}{4}}\,(-1)\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\,\frac{1}{4} < 0$

Na $(4k\pi, 4k\pi+2\pi)$ roste.

$(4k\pi+2\pi, 4k\pi+4\pi)$ klesá.

4. Extrémy nejsou: Stac. body $\emptyset$

Lok: Roste klesá, ale $4k\pi+2\pi \notin D_f$

Glob: limity v krajních bodech $\pm\infty$ $\Rightarrow$ nejsou glob. extr.

5. Zlimit v ① a spojitosti $H_f = \mathbb{R}$

Není omezená.

6. Nul: $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = \pm 1$ $(2k+1)\pi$ $\left[ \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \right]$

7. $$f'' = \left( \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}} \cdot \cos^2\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right)' = \left( \frac{1}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}} \frac{1}{2} \right)' =$$

$$= \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} \frac{1}{2} \cos\frac{x}{2} = \frac{-\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

konv. $V_1 > 0 \iff \cos\frac{x}{2} < 0$ $\iff x \in \langle (4k+1)\pi, (4k+2)\pi \rangle$ a $((4k+2)\pi, (4k+3)\pi\rangle$

konk. $K_1 < 0 \iff \cos\frac{x}{2} > 0 \iff x \in (4k\pi, (4k+1)\pi\rangle$ a $\langle 4k+3 \; 4k+4)\pi$

inflexní $x = (2k+1)\pi$.

$-$ $+$

$4k\pi$ $5k\pi$ $6k\pi$

8. Asympt.: if existují $A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}|}{x}$ $\nexists$, $x = 2k\pi^+$

Heine

$\lim\limits_{2k\pi^+} \operatorname{tg}\frac{k\pi}{2} = 0 \vee \infty$

$\ln 0^+ = -\infty$

$\ln\infty = \infty$

$\Rightarrow \nexists$

9.