

Jméno a příjmení (čitelně): _____

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Belejová Beran Johanovská Prokop Zymin

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test ZS 2022/23
Varianta B

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3} \left(n^2 - \sqrt{n^4 - 12n + 7} \right).$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = \ln \left(\frac{x-4}{2x} \right),$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Hyperbola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+3}.$$

Určete všechny body, v nichž má hyperbola tečnu se směrnici 1, a v každém takovém bodě určete rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto hyperbolu s vyznačenými průsečíky s osami, středem, asymptotami a s vypočtenými tečnami, u tečen určete a vyznačte jejich průsečíky s osami a body dotyku s hyperbolou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = xe^{2-x}$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

Pomůcka: $e \doteq 2,72$, $e^2 \doteq 7,39$, $\frac{1}{e} \doteq 0,37$.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{5}{2}y^2 - 6x$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, 4x + 3y \geq 0, x \geq 0\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M spočtěte příslušnou hodnotu λ . Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+3} (n^2 - \sqrt{n^4-12n+7}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+3} (n^2 - \sqrt{n^4-12n+7}) \frac{n^2 + \sqrt{n^4-12n+7}}{n^2 + \sqrt{n^4-12n+7}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+3} \cdot \frac{(n^2)^2 - (\sqrt{n^4-12n+7})^2}{n^2 + \sqrt{n^4-12n+7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+3} \cdot \frac{n^4 - n^4 + 12n - 7}{n^2 + \sqrt{n^4-12n+7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+3} \cdot \frac{n(12 - \frac{7}{n})}{n^2(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{n} + \frac{7}{n^2}})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} \cdot (12 - \frac{7}{n})}{n^2(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{n} + \frac{7}{n^2}})} = \frac{12}{2} = \boxed{6}$$

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x-4}{2x}\right)$ $D_f: \frac{x-4}{2x} > 0$ $\frac{-4}{2 \cdot (-1)} \quad \frac{1-4}{2 \cdot 1} \quad \frac{5-4}{2 \cdot 5}$ $D_f = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

$\cdot 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-4}{2x}} \cdot \frac{1 \cdot 2x - 2(x-4)}{(2x)^2} = \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{2x - 2x + 8}{(2x)^2} = \frac{4}{2x(x-4)}$$

$D_f' = D_f$

$f': x \neq 4 \dots$ mac morekto j?

3. $f(x) = \frac{2x-3}{x+3}$ $k=1$ $y = 2x+q = x+q'$
 n krde $[x_0, y_0]$

$$1 = k = f'(x_0) = \frac{(x+3) \cdot 2 - (2x-3) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+3}{(x+3)^2} = \frac{9}{(x+3)^2}$$

$$1 = \frac{9}{(x+3)^2} \Rightarrow q = (x+3)^2 \Rightarrow x+3 = \pm 3 \Rightarrow x_0 = \begin{cases} 0 \\ -6 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ $y_0 = \frac{2 \cdot 0 - 3}{0 + 3} = -1$ $T_1 = [0, -1]$

$x_0 = -6$ $y_0 = \frac{2(-6) - 3}{(-6) + 3} = \frac{-15}{-3} = 5$ $T_2 = [-6, 5]$

$T_1: y = 2x + q = x + q'$
 $-1 = 0 + q' \Rightarrow q' = -1$

lema: $y = x - 1$

$P_X = [1, 0]$

$P_Y = [0, -1]$

$T_2: y = x + q'$
 $5 = -6 + q'$
 $q' = 11$

$y = x + 11$

$P_X = [-11, 0]$

$P_Y = [0, 11]$

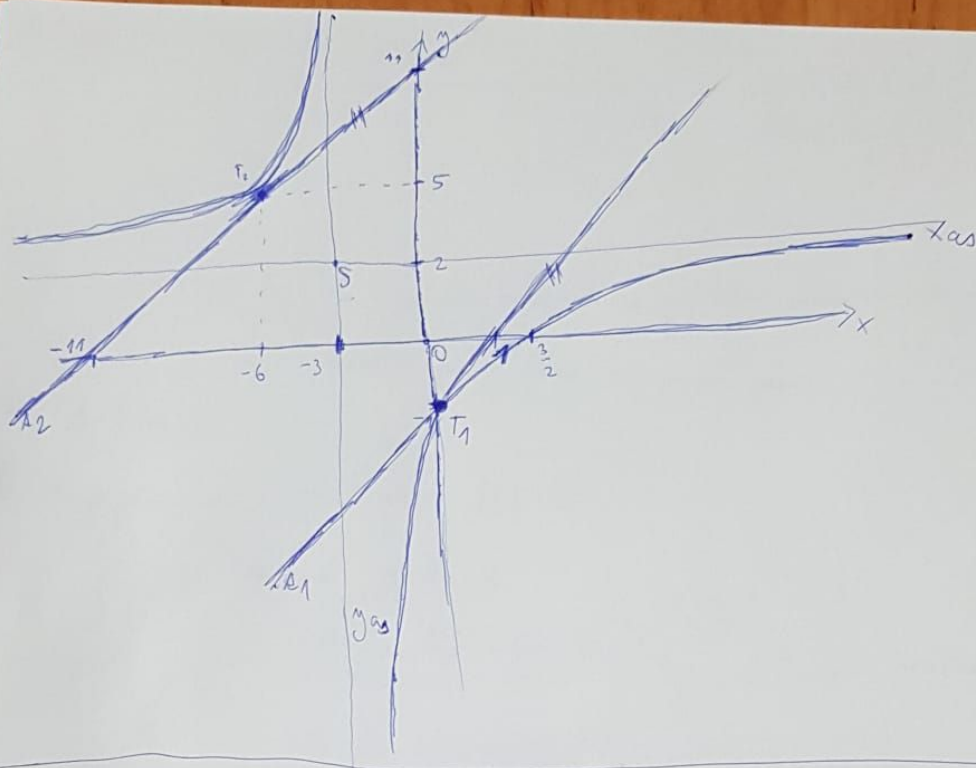
$(2x-3):(x+3) = 2 - \frac{9}{x+3}$
 $\frac{2x+6}{0-9}$ $y_{\infty} = 2$
 $x_{\infty} = -3$

hyperbola

$P_X: y = 0 = \frac{2x-3}{x+3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
 $P_X = [\frac{3}{2}, 0]$

$P_Y = [0, -1]$

$S = [-3, 2]$



4.

$$f(x) = x e^{2-x}$$

1. $D_f = \mathbb{R}$ (nemám problém s 0; ani s kladnou odmocninou, ani s logaritmem.)
 SUDOST/LIGNOST $f(-x) = (-x) \cdot e^{2-(-x)} = -x e^{2+x} \neq x e^{2-x}$ nem' sudá
 $\neq -x e^{2-x}$ nem' liché

2. $P_y = [0; 0 \cdot e^2] = [0; 0]$

$P_x = [0; 0]$

3. KLADNOST/ZÁPORNOST $f(x)$

$(-\infty, 0)$	-1	$-e^3$	$\ominus$
$(0, \infty)$	1	e^1	$\oplus$

záporná na $(-\infty, 0)$
 kladná na $(0, \infty)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2-x} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{2-x} = \infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0 \Rightarrow$ MUSÍM UPRAVIT: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'H}} \frac{e^2 \cdot 1}{e^x} = 0$

5. $f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x} (1-x)$

NB: $x=1 \quad y=f(x)=e$
 NB: $[1, e]$

6. INTERVALY MONOTONIE

např. 0	např. 2
$f' = e^2 \cdot 1$ $\oplus$	$f' = e^0 (1-2)$ $\ominus$

roste na $(-\infty, 1)$
 klesá na $(1, \infty)$

tot $[1, e]$... lokální maximum i globální maximum (limity $\rightarrow \infty$ a $-\infty$)
 • lokální ani globální minimum není

7. $H_f = (-\infty, e)$

8. Asymptoty — svislé: nejsou ($D_f = \mathbb{R}$)

— vodorovné $y = Ax + B$

$$A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{2-x}$$

$\nearrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2-x} = 0$
 $\searrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-x} = \infty$... není asymptota!

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2-x} - 0 \cdot x e^{2-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{2-x} = 0$$

na dráze

$\Rightarrow$ ASYMPTOTA

$$y = 0$$

9. $f'' = e^{2-x}(-1)(1-x) + e^{2-x}(-1) = -e^{2-x}(1-x+1) = -e^{2-x}(2-x)$

IB: $x = 2$ $y = f(x) = 2e^{2-2} = 2e^0 = 2$

IB: $[2, 2]$

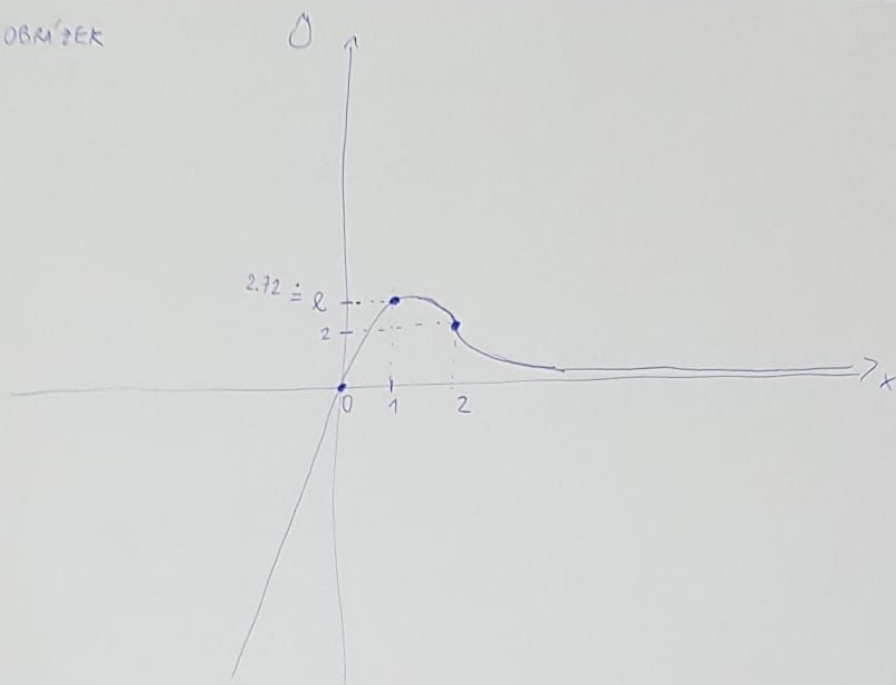
KONVEX / KONKÁV f''

	0	$-e^{2-0}$	$\ominus$	$\cap$
$(-\infty, 2)$	3	$-e^{-1}(-1)$	$\oplus$	$\cup$

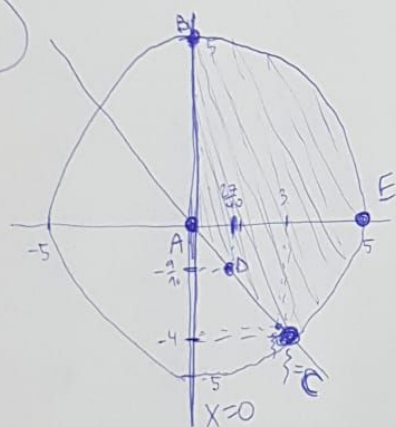
KONKÁVNÍ NA $(-\infty, 2)$

KONVEXNÍ NA $(2, \infty)$

10. OBRÁZEK



5.



$$f(x,y) = \frac{5}{2}y^2 - 6x$$

$$\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, 4x + 3y \geq 0, x \geq 0\}$$

1. OBRÁZEK

$$y \geq -\frac{4x}{3} \quad P_x = [0, 0]$$

$$E = [3, -4]$$

2. PROSECÍV • $x=0 \quad y = -\frac{4x}{3}$

$$[0, 0] = A$$

• $x=0 \quad x^2 + y^2 \leq 25$

$$[0, 5] = B$$

$$[0, -5] \in \Pi \quad \forall$$

• $x^2 + y^2 = 25 \quad y = -\frac{4x}{3}$

$$x^2 + \frac{16x^2}{9} = 25 \Rightarrow \frac{25x^2}{9} = 25 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$y = -\frac{4x}{3} = -4$$

$$[3, -4] = C$$

Π leží jen $x=3$

3. STAC. BODY V PROSTORU

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -6 = 0 \dots \text{NIKDY } \neq$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 5y = 0$$

SB NEJSOU

4. VAZBY

$$\bullet x=0$$

$$f(0,y) = \frac{5}{2}y^2$$

$$f'(0,y) = 5y = 0 \text{ pro } y=0 \Rightarrow \text{bod } [0,0] \in A$$

$$\bullet y = -\frac{4}{3}x \quad f(x, -\frac{4}{3}x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{9}x^2 - 6x = \frac{40}{9}x^2 - 6x$$

$$f'(x, -\frac{4}{3}x) = \frac{80}{9}x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 9}{80} = \frac{27}{40} \quad y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{40} = -\frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \text{bod } \left[\frac{27}{40}, -\frac{9}{10} \right] \in A$$

$$\bullet x^2 + y^2 = 25$$

$$L = \frac{5}{2}y^2 - 6x + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$\text{I } \frac{\partial L}{\partial x} = -6 + 2\lambda x = 0$$

$$\text{II } \frac{\partial L}{\partial y} = 5y + \lambda 2y = 0 \Rightarrow y(5 + 2\lambda) = 0$$

$$\text{III } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$\begin{matrix} y=0 \\ \text{do III} \\ x=\pm 5 \end{matrix}$$

(v M lež jen $x=5$)

$$E = [5,0] \text{ pro } \lambda \text{ z I } \dots -6 + 2\lambda 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$-6 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)x = 0$$

$$x = \frac{6}{-5} = -\frac{6}{5}$$

neleží v M? ($x \geq 0$)
→ mívá se k řešení

5. GLOBAL EXTREM

$$f(x,y) = \frac{5}{2}y^2 - 6x$$

$$A = [0,0]$$

$$B = [0,5]$$

$$C = [3,-4]$$

$$D = \left[\frac{27}{40}, -\frac{9}{10}\right]$$

$$E = [5,0]$$

$$0$$

$$\frac{125}{2} = 62,5$$

MAX

$$\frac{5}{2} \cdot 16 - 18 = 22$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{81}{100} - 6 \cdot \frac{27}{40} = \frac{405}{200} - \frac{81}{20} = \frac{405 - 810}{200} = -\frac{405}{200} \approx -2$$

$$0 - 6 \cdot 5 = -30$$

MIN

globální maximum je v bodě
[0,5]

a globální minimum je v bodě
[5,0]